Sapienza
Università di Roma

A.A. 2009-2010

CARATTERIZZAZIONI DI SPAZI DI BANACH DUALI

Tesi di Dottorato

Dottorando: Stefano Rossi

Relatore: prof. Sergio Doplicher

Coordinatore del Dottorato: prof. Alberto Tesei

Dipartimento di Matematica Guido Castelnuovo

Introduzione

Scopo principale della presente esposizione è quello di presentare con sufficiente autoconsistenza una serie di strumenti dell'Analisi Funzionale lineare, necessari alla comprensione sicura dei risultati originali ottenuti nell'ambito della tesi di dottorato, dove, fra le altre cose, si è ricavata una caratterizzazione degli spazi di Banach coniugati, che è particolarmente significativa nel caso separabile.
Il teorema cui ci riferiamo si enuncia come segue:

Teorema *Se X è uno spazio di Banach separabile, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *X è uno spazio duale.*
2. *Esiste un sottospazio chiuso in norma $M \subset X^*$, che è determinante e* norm-attaining.

Inoltre ogni sottospazio $M \subset X^*$ come in 2. è canonicamente un preduale di X.

La terminologia introdotta nell'enunciato sarà naturalmente presentata in tutti i dettagli nei capitoli successivi, come anche i corollari e le applicazioni del risultato annunciato. Qui preferiamo, invece, anticipare qualche commento sulla strategia seguita e sugli strumenti dispiegati, in modo da giustificare la presenza e l'ordine di presentazione degli argomenti successivi. Sebbene l'enunciato del nostro teorema introduca terminologia appartenente alla sola teoria degli spazi di Banach, le idee coinvolte nella sua dimostrazione appartengono alla più generale teoria degli spazi vettoriali topologici localmente convessi. Tale circostanza non deve sorprendere più di tanto, perchè, come è ben noto, uno strumento essenziale per lo studio degli spazi normati completi è rappresentato dalle topologie deboli, che sono eminenti esempi di topologie localmente convesse. Ciononostante la teoria di tali strutture, quantunque motivata da esigenze di natura schiettamente pragmatica[1], non trova spazio nei corsi istituzionali della laurea in Matematica. I primi due capitoli della tesi sono dedicati, pertanto, all'esposizione di quei contenuti generali della teoria che si rivelano indispensabili

[1] Un esempio su tutti è quello della teoria delle distribuzioni, [49].

in ogni sviluppo successivo. Ci riferiamo alle generalizzazioni di alcune nozioni classiche in Analisi funzionale, che si estendono senza difficoltà ai contesti non metrizzabili, pur di essere espresse attraverso una teoria della convergenza più duttile, com'è quella dei filtri o delle reti generalizzate. Tali nozioni talora sono considerate ostiche, a causa dell'elevata astrazione necessaria a trattarle. Senza esprimere un nostro parere a tal riguardo, ci limitiamo piuttosto ad osservare che, non avedo potuto ignorare queste difficoltà tecniche per risolvere il problema di nostro interesse, ci sembra opportuno fornirne una trattazione sufficientemente approfondita, che non vuole essere, tuttavia, un trattato organico e completo della materia; numerosissimi sono infatti i testi che la espongono in tutti i suoi sviluppi e non sarebbe certo consigliabile porsi a confronto con i riferimenti classici.
La nostra trattazione, pertanto, non sarà esaustiva, ma si concentrarà soltanto sugli aspetti strettamente necessari a trattare con rigore il problema risolto. Questo per dire che gli argomenti presentati non sono quelli che l'autore ritiene i più interessanti ed indispensabili, quanto piuttosto quelli di cui non ha potuto fare a meno. Non figurano, quindi, nozioni di grande interesse, come i limiti induttivi di spazi localmente convessi o gli spazi nucleari di Grothendieck[2], tanto per citare due esempi particolarmente significativi per le applicazioni[3].
Fra gli argomenti generali che, invece, sono presentati con dovizia di particolari compare la teoria degli spazi in dualità, che è l'argomento principale del terzo capitolo, dove viene fornita una dimostrazione del ben noto teorema di *Mackey-Arens* sulle topologie compatibili. Si tratta di un risultato notevole ed elegante, che trova un impiego massiccio nella nostra strategia dimostrativa.
Il quarto capitolo fornisce, infine, una trattazione esaustiva dei profondissimi lavori di *R. C. James* sulla compattezza debole. Molto nota è la caratterizzazione di James della riflessività in termini di funzionali norm-attaining: uno spazio di Banach X è riflessivo se e solo se ogni $\varphi \in X^*$ raggiunge la sua norma sulla palla unità di X. Meno note sono, invece, le generalizzazioni di questo risultato, che rappresentano a tutt'oggi la più soddisfacente caratterizzazione degli insiemi debolmente compatti nel quadro degli spazi localmente convessi *completi*. I nostri risultati, descritti con attenzione nel quinto e ultimo capitolo, sono proprio applicazioni dei teoremi generali di James.
L'appendice raccoglie infine tutta una serie di risultati, alcuni dei quali ben noti ed elementari, più riposti e specialistici talaltri, che avrebbero rischiato di appesantire eccessivamente la trattazione se presentati in *media re*.
Nello sforzo di presentare la materia con autoconsistenza si è cercato di

[2] Un'ottima presentazione degli spazi nucleari è contenuta nel classico trattato di Pietsch [38].

[3] In teoria delle distribuzioni e nelle formulazioni rigorose della Meccanica quantistica, dove si rivelata feconda la nozione di spazio di Hilbert *equipaggiato*, *cfr.* [12].

mantenere un certo grado di generalità nelle definizioni e nelle proposizioni relative; non figurano, pertanto, i classici teoremi relativi agli spazi di Banach, la cui teoria è in sostanza presupposta nota.

Indice

Introduzione **5**

1 Spazi vettoriali topologici **9**
1.1 Generalità 9
1.2 Completezza 12

2 Spazi localmente convessi **17**
2.1 Seminorme e convessi 17
2.2 Spazi di Fréchet 21
2.3 Spazi bornologici 25
2.4 Spazi barreled 27
2.5 I teoremi di Nachbin-Shirota 31

3 Dualità **35**
3.1 Prime definizioni 35
3.2 Due risultati fondamentali 36
3.3 Topologie compatibili con una dualità: teorema di Mackey-Arens 39
3.4 Spazi riflessivi 41

4 Caratterizzazioni della riflessività secondo James **45**
4.1 Il controesempio di James 45
4.2 Un controesempio al teorema di James 47
4.3 Il teorema di James 49
4.4 Subriflessività 58
4.5 Alcune considerazioni 60

5 Caratterizzazioni di spazi di Banach duali **65**
5.1 La caratterizzazione 66
5.1.1 Il caso separabile 72
5.1.2 Applicazioni 76
5.2 Unicità del preduale 78

A Filtri e convergenza **81**

B Il teorema di Hahn-Banach 87

C Limiti di Banach 91

D Versioni geometriche del teorema di Hahn-Banach 95

E Teorema di Krein-Milman 97

F Compattificazione di Stone-Čech 99

G Il teorema di Eberlein-Šmulian 101

H Il teorema di Krein-Šmulian 105

Capitolo 1

Spazi vettoriali topologici

1.1 Generalità

Definizione 1.1.1. *Uno spazio vettoriale topologico è una coppia* $(E, \mathfrak{T})$*, dove* E *è uno spazio vettoriale e* $\mathfrak{T}$ *è una topologia su* E *tale che:*

1. $+ : E \times E \to E$ *è continua.*
2. $\cdot : \mathbb{C} \times E \to E$ *è continua.*

dove $E \times E$ *e* $\mathbb{C} \times E$ *si intendono muniti della topologia prodotto.*

Il lemma seguente esprime equivalentemente la continuità delle operazioni dello spazio vettoriale in termini del filtro degli intorni degli elementi dello spazio vettoriale. La sua dimostrazione è un'immediata esplicitazione delle definizioni, pertanto preferiamo ometterla.

Lemma 1.1.1. *Una topologia* $\mathfrak{T}$ *su uno spazio vettoriale* E *è una topologia di spazio vettoriale topologico se e solo se valgono le seguenti condizioni:*

1. *Dati* $x, y \in E$ *e* $W \in \mathcal{N}_{x+y}$*, esistono* $U \in \mathcal{N}_x$*,* $V \in \mathcal{N}_y$ *tali che* $U + V \subset W$*.*
2. *Dati* $\lambda \in \mathbb{C}, x \in E$ *e* $W \in \mathcal{N}_{\lambda x}$*, esistono* $\delta > 0$ *e* $U \in \mathcal{N}_x$ *tali che* $\mu U \subset W$ *per ogni* $\mu \in \mathbb{C}$ *tale che* $|\mu - \lambda| < \delta$*.*

Così come per i gruppi topologici, sussiste il seguente risultato:

Proposizione 1.1.1. *Uno spazio vettoriale topologico è di Hausdorff se e solo se è separato* T_1*.*

Dimostrazione. Supponiamo che $(E, \mathfrak{T})$ sia separato T_1, in modo che $\{0\} \subset E$ è chiuso. Consideriamo l'applicazione $\Phi : E \times E \to E$ data da $\Phi(x, y) = x - y$. Se $\Delta \subset E \times E$ è la diagonale nel prodotto, abbiamo $\Delta = \Phi^{-1}(0)$, cosicchè Δ è chiuso e, quindi, E è uno spazio di Hausdorff. □

Nella dimostrazione del teorema precedente viene utilizzata soltanto la struttura algebrica del gruppo additivo $(E, +)$ dello spazio vettoriale topologico; sfruttando anche l'operazione del prodotto con gli scalari è possibile dimostrare il seguente risultato, per la cui dimostrazione rimandiamo a [53] o a [30].

Teorema 1.1.1. *Uno spazio vettoriale topologico separato T_0 è* completamente regolare*.*

Fissato un vettore $x_0 \in E$ la traslazione $\Phi(x) = x + x_0$ è un omeomorfismo di E in sè, pertanto una base di intorni di x_0 è data da $\{U + x_0 : U \in \mathcal{B}\}$, dove $\mathcal{B}$ è una base di intorni di 0.
Prima di enunciare qualche proprietà degli intorni di 0, ricordiamo le seguenti definizioni di pretta natura algebrica:

Definizione 1.1.2. *Un insieme $C \subset E$ si dice* equilibrato *(o bilanciato) se $\lambda C \subset C$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $|\lambda| \leq 1$.*

Definizione 1.1.3. *Un insieme $C \subset E$ si dice* assorbente *(o radiale) se, comunque dato $x \in E$, esiste $r > 0$ (dipendente da x) tale che $x \in \lambda C$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $|\lambda| \geq r$.*

Osservazione 1.1.1. *Un insieme equilibrato $C \subset E$ è assorbente se e solo se per ogni $x \in E$ esiste $r > 0$ tale che $x \in rC$.*

Lemma 1.1.2. *Ogni intorno di $0 \in E$ è un insieme assorbente.*

Dimostrazione. Sia $U \in \mathcal{N}_0$ e sia $x \in E$. Siccome $0x = 0$, esistono $V \in \mathcal{N}_x$ ed $r > 0$ tali che $\lambda V \subset U$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $|\lambda| < r$ da cui si ha $V \subset \frac{1}{\lambda}U$ per ogni λ di modulo minore di r, quindi $x \in \mu U$ per ogni μ tale che $\mu > \frac{1}{r}$. □

Lemma 1.1.3. *In ogni spazio vettoriale topologico esiste una base di intorni di 0 equilibrati.*

Dimostrazione. Sia $U \in \mathcal{N}_0$. Occorre far vedere che esiste $V \in \mathcal{N}_0$ equilibrato tale che $V \subset U$. A tal scopo, siccome $0 \cdot 0 = 0$, esistono $W \in \mathcal{N}_0$ e $r > 0$ tali che $\lambda W \subset U$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $|\lambda| < r$. $V \doteq \bigcup_{|\lambda|<r} \lambda V$ ha le proprietà richieste. □

Lemma 1.1.4. *In ogni spazio vettoriale topologico esiste una base di intorni di 0 chiusi.*

Dimostrazione. Sia $U \in \mathcal{N}_0$: Occorre esibire un intorno chiuso di 0 V contenuto in U. Sia $W \in \mathcal{N}_0$ tale che $W - W \subset U$ (un tale W esiste per la continuità dell'applicazione $(x, y) \to x - y$). Se mostriamo che $\overline{W} \subset U$, avremo la conclusione. Sia $x \in \overline{W}$; siccome $x + W$ è un intorno di x, si ha che l'intersezione $W \cap (x + W)$ è non vuota, cioè esistono $w_1, w_2 \in W$ tali che $w_1 = x + w_2$, da cui $x = w_2 - w_1 \in W - W \subset U$, ciò che conclude la prova. □

I risultati seguenti sono espressioni della compatibilità della topologia con le operazioni relativamente a sottospazi e a sottoinsiemi convessi.

Lemma 1.1.5. *Sia $F \subset E$ un sottospazio. Allora:*

1. *F ha interno vuoto se è proprio.*

2. *$\overline{F}$ è un sottospazio.*

Dimostrazione. Supponiamo che F abbia interno non vuoto, cioè che esistano $x \in V$ e $U \in \mathcal{N}_0$ tali che $(x + U) \subset F$. Se ora $y \in E$, esiste $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $y \in \lambda U$, perciò $x + \lambda y \in F$, da cui $\lambda y \in F$, cioè $y \in F = E$.
La seconda affermazione è di facile verifica. □

Prima di enunciare il prossimo risultato, ricordiamo la nozione di convessità per un insieme:

Definizione 1.1.4. *Un insieme $C \subset E$ si dice convesso se, per ogni coppia di punti $x, y \in C$ si ha $tx + (1 - t)y \in C$ per ogni $t \in [0, 1]$.*

Lemma 1.1.6. *Sia $C \subset$ un insieme convesso. Allora:*

1. *$\overline{C}$ è convesso.*

2. *$\overset{\circ}{C}$ è convesso.*

Dimostrazione. Siano $x, y \in \overline{C}$. Sia $t \in (0, 1)$; mostriamo che $tx + (1 - t)y \in \overline{C}$. Se U è un intorno di $tx + (1 - t)y$, esistono V_t e W_t intorni di tx e $(1 - t)y$ rispettivamente, tali che $V_t + W_t \subset U$. Definiamo $V = \frac{1}{t}V_t$ e $W = \frac{1}{1-t}W_t$, in modo che V e W sono intorni di x e y rispettivamente. Allora $V \cap C$ e $W \cap C$ sono intersezioni non vuote, cosicché (grazie alla convessità di C) $(V_t + W_t) \cap C$ è non vuota; a fortiori $U \cap C$ è non vuoto, cioè $tx + (1 - t)y \in \overline{C}$.
Siano ora $x, y \in \overset{\circ}{C}$, in modo che esiste $U \in \mathcal{N}_0$ tale che $(x+U) \subset C$ e $(y+U) \subset C$. Se $t \in [0, 1]$, si ha

$$tx + (1 - t)y + U = tx + (1 - t)y + tU + (1 - t)U = t(x + U) + (1 - t)(y + U) \subset C$$

da cui $tx + (1 - t)y \in \overset{\circ}{C}$. □

Concludiamo questa sezione con un utile risultato di generazione di topologie di spazio vettoriale topologico, al quale premettiamo la seguente:

Definizione 1.1.5. *Sia E uno spazio vettoriale. Una base $\mathcal{B}$ di filtro in E si dice* additiva *se per ogni $U \in \mathcal{B}$, esiste $V \in \mathcal{B}$ tale che $V + V \subset U$.*

Teorema 1.1.2. *Sia E uno spazio vettoriale. Sia $\mathcal{B}$ una base di filtro additiva costituita da insiemi equilibrati ed assorbenti. Allora esiste un'unica topologia $\mathfrak{T}$ di spazio vettoriale topologico su E tale che $\mathcal{B}$ sia una base di intorni di $0 \in E$.*

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{T}$ la collezione dei sottoinsiemi $A \subset E$ tali che per ogni $x \in A$ esiste $U \in \mathcal{B}$ tale che $(x + U) \subset A$. Si verifica molto facilmente che $\mathfrak{T}$ è una topologia. L'unica verifica non ovvia è che $\mathfrak{T}$ è chiusa per intersezioni finite: Siano $A, B \in \mathcal{B}$ e sia $x \in A \cap B$. Allora esistono $U, V \in \mathcal{B}$ tali che $(x + U) \subset A$ e $(x + V) \subset B$. Siccome $\mathcal{B}$ è base di un iltro, esiste $W \in \mathcal{B}$ tale che $W \subset U \cap V$, sicché $(x + W) \subset A \cap B$, da cui $A \cap B \in \mathfrak{T}$.
Vogliamo verificare che $\mathcal{B}$ è una base di intorni di $0 \in E$ per la topologia $\mathfrak{T}$. Per prima cosa verifichiamo che ogni $U \in \mathcal{B}$ è un intorno di 0 nella topologia $\mathfrak{T}$. A tal scopo definiamo l'insieme

$$A = \{x : x + V \subset U \quad \text{per qualche } V \in \mathcal{B}\}$$

Evidentemente $A \subset U$. Se mostriamo che A è aperto, abbiamo la conclusione. Sia $x \in A$, in modo che esiste $V \in \mathcal{B}$ tale che $(x + V) \subset U$. Siccome $\mathcal{B}$ è additiva, esiste $W \in \mathcal{B}$ tale che $W + W \subset V$. L'ultima inclusione implica che $(x + W) \subset A$, poichè si ha $(x + W) + W \subset (x + U) \subset V$.
Infine, se A è un aperto contenente 0, esiste $U \in \mathcal{B}$ tale che $(0 + U) = U \subset A$. Ciò mostra che $\mathcal{B}$ è una base di intorni dello zero.
Veniamo alla continuità delle operazioni, cominciando dalla somma. Siano $x, y \in E$ e U un $\mathfrak{T}$-intorno di $x + y$. Sia $V \in \mathcal{B}$ tale che $(x + y + V) \subset U$. Sia $W \in \mathcal{B}$ tale che $W + W \subset V$. Evidentemente $U_x = x + W$ e $U_y = y + W$ sono intorni di x e y rispettivamente ed inoltre $U_x + U_y \subset U$, ciò mostra la continuità della somma.
La continuità del prodotto con gli scalari è leggermente più delicata. Sia $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in E$ e $\lambda x + U$ un intorno di λx, $U \in \mathcal{B}$. Allora esistono $V \in \mathcal{B}$ tale che $V + V + V + V \subset U$ e $W \subset \mathcal{B}$ tale che $\lambda W \subset V$, $W \subset V$ (semplice verifica che richiede di usare l'additività della base di filtro *mathcalB* e il fatto che gli insiemi di $\mathcal{B}$ sono equilibrati).
Siccome V è assorbente, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\mu x \in V$ per ogni $\mu \in \mathbb{C}$ tale che $|\mu| < \varepsilon$. Se ora $\mu \in \mathbb{C}$ è tale che $|\lambda - \mu| < \varepsilon$, si ha $\mu(x + W) \subset \lambda x + U$ (facile verifica), che è la parafrasi della continuità del prodotto.
L'unicità di $\mathfrak{T}$, infine, è ovvia, poichè $\mathcal{B}$ è una base di intorni. □

1.2 Completezza

Nella teoria degli spazi metrici e, più in particolare, nello studio degli spazi normati la nozione di completezza è fondamentale, perchè molti fra i principali risultati dell'Analisi Funzionale (come il teorema di Banach-Steinhaus ed i teoremi della mappa aperta, grafico chiuso) sono validi solo sotto questa ipotesi. La nozione di completezza, come è ben noto, richiede che ogni successione di Cauchy sia convergente. A prima vista la definizione di successione di Cauchy sembra avere un carattere fondamentalmente metrico; tuttavia se $(E, \mathfrak{T})$ è uno spazio vettoriale topologico, la compatibilità delle operazioni permette di introdurre una *struttura uniforme* (cfr. [22]), grazie

alla quale molte nozioni relative agli spazi metrici (successioni di Cauchy, funzioni uniformemente contuinue) possono essere opportunamente generalizzate. Per lo studio degli spazi vettoriali topologici non è necessario conoscere la teoria degli spazi uniformi nella sua più piena generalità, così come è presentata nel classico trattato di J.L. Kelley [22], in quanto la presentazione è notevolmente semplificata dalla struttura algebrica dello spazio supporto E. Segnaliamo, comunque, che molte idee che andremo esponendo si ritrovano più o meno inalterate nella teoria generale dei gruppi topologici.
Passiamo alle definizioni preannunciate.

Definizione 1.2.1. *Sia E uno spazio vettoriale topologico. Una successione $\{x_n\} \subset E$ si dice di Cauchy se per ogni intorno $U \in \mathcal{N}_0$ esiste un intero N_U tale che $x_m - x_n \in U$ per ogni $m, n \geq N_U$.*

Ogni successione convergente è di Cauchy, come mostra un'immediata applicazione delle definizioni. In generale il viceversa non è vero (nemmeno nel caso degli spazi normati), pertanto la seguente definizione è di interesse.

Definizione 1.2.2 (Spazi sequenzialmente completi)**.** *Uno spazio vettoriale topologico E si dice* sequenzialmente completo *se ogni successione di Cauchy in E converge ad un elemento di E.*

Alcuni autori usano l'aggettivo *semi-completo* in luogo di sequenzialmente completo; qui preferiremo il secondo, perchè meglio richiama il contenuto della definizione corrispondente.

La nozione di completezza testé introdotta non è propriamente la generalizzazione della nozione già nota, poichè, in generale, le successioni non sono uno strumento sufficientemente valido per esperire le proprietà di una topologia, salvo il caso in cui sia soddisfatto il primo assioma di numerabilità (in tal caso la topologia di spazio vettoriale topologico è metrizzaile con una distanza che è invariante per traslazioni, cfr. [45]).
La nozione più adatta, invece, è quella di filtro di Cauchy nel senso della seguente:

Definizione 1.2.3 (Filtro di Cauchy)**.** *Un filtro $\mathcal{F}$ su uno spazio vettoriale topologico E si dice di Cauchy se per ogni $U \in \mathcal{N}_0$ esiste $B \in \mathcal{F}$ tale che $B - B \subset U$.*

Di nuovo, ogni filtro convergente è di Cauchy. Se $\mathcal{F}$ converge a $x \in E$, allora $\mathcal{N}_x \leq \mathcal{F}$. Ora, dato $U \in \mathcal{N}_0$, esiste $V \in \mathcal{N}_0$ tale che $V - V \subset U$. Sia $B = x + V$. Abbiamo $B \in \mathcal{F}$ (perchè $x + V$ è un intorno di x) e $B - B \subset U$.
Con la nozione di filtro di Cauchy è possibile dare la più generale definizione di completezza.

Definizione 1.2.4 (Insiemi completi)**.** *Un sottoinsieme $A \subset E$ di uno spazio vettoriale topologico si dice* completo *se ogni filtro di Cauchy di A converge ad un elemento di A; E è completo se è completo come sottoinsieme di se stesso.*

Una nozione di completezza intermedia fra quella appena data e la completezza sequenziale è la *quasi-completezza*, per la quale è richiesta preliminarmente la seguente:

Definizione 1.2.5 (Insiemi limitati)**.** *Un insieme $B \subset E$ si dice* limitato *se è assorbito da ogni intorno di $0 \in E$, cioè se dato $U \in \mathcal{N}_0$ esiste $\lambda > 0$ tale che $B \subset \lambda U$.*

Negli spazi normati gli insiemi limitati giocano un ruolo importante, perchè in qualche senso permettono di ricostruire la topologia (mutuata dalla norma) dello spazio. Nella teoria generale, invece, il legame è meno profondo, con l'eccezione dei cosiddetti spazi *bornologici*, che presenteremo nel capitolo successivo.
Tornando alle questioni di completezza, sussiste la seguente:

Definizione 1.2.6 (Spazi quasi-completi)**.** *Uno spazio vettoriale topologico E i cui insimi chiusi e limitati sono completi si dice quasi-completo.*

Naturalmente uno spazio completo è quasi completo. Meno ovvio è che uno spazio quasi completo sia sequenzialmente completo.
Prima di verificare tale asserto, introduciamo una definizione importante:

Definizione 1.2.7 (Insiemi totalmente limitati)**.** *Un insieme $B \subset E$ si dice* totalmente limitato *se per ogni $U \in \mathcal{N}_0$ esistono $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$ tali che*

$$B \subset \bigcup_{j=1}^{n} (x_j + U)$$

.

Sussiste il seguente prevedibile risultato:

Lemma 1.2.1. *Ogni insieme totalmente limitato è limitato.*

Dimostrazione. Sia $B \subset E$ totalmente limitato. Sia U un intorno di 0 che possiamo supporre equilibrato. Per totale limitatezza esistono $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$ tali che $B \subset \cup_{j=1}^{n}(x_j + U)$. Siccome U è assorbente, esistono $\lambda_j > 0$ tali che $x_j \in \lambda_j U$. Se $\lambda = \max_{j=1,2,\dots,n}\{1, \lambda_j\}$, si ha $B \subset \lambda U$, poichè U è equilibrato. □

Le successioni di Cauchy sono insiemi limitati, infatti:

Lemma 1.2.2. *Una successione di Cauchy è un insieme totalmente limitato.*

Dimostrazione. Sia $\{x_n\} \subset E$ una successione di Cauchy. Se U è un intorno di 0, allora $x_m - x_n \in U$ per ogni $m, n \geq N$ (dipendente da U). Ciò significa che $\{x_n\} \subset \cup_{j=1}^{N}(x_j + U)$. □

Veniamo alla proposizione preannunciata.

Proposizione 1.2.1. *Uno spazio vettoriale topologico E quasi-completo è sequenzialmente completo.*

Dimostrazione. Sia $A = \{x_n\} \subset E$ una successione di Cauchy e sia $B \subset E$ la chiusura di A. B è limitato quale chiusura di un insieme limitato (facile verifica). Sia $\mathcal{F}$ il filtro associato alla successione relativamente a B (vedere l'appendice). Evidentemente $\mathcal{F}$ è un filtro di Cauchy, dunque convergente ad un elemento $x \in E$. Ciò significa che la successione $\{x_n\}$ converge ad x. □

Come per gli spazi normati vale il seguente risultato di completamento:

Teorema 1.2.1. *Sia E uno spazio vettoriale topologico. Allora esiste una coppia $(i, \hat{E})$, dove $\hat{E}$ è uno spazio vettoriale topologico completo e $i : E \to \hat{E}$ è un'applicazione lineare tale che:*

1. *E ed $i(E)$ (con la topologia relativa) sono linearmente omeomorfi attraverso i.*

2. *$i(E)$ è denso in E.*

La coppia (i, E) è unica nel senso che se (j, F) è un'altra coppia con le proprietà di cui sopra, esiste un omeomorfismo lineare $\Phi : F \to E$.
Infine, se E è uno spazio di Hausdorff, $\hat{E}$ può assumersi di Hausdorff.

Per la dimostrazione rimandiamo a [49]. Qui ci limitiamo ad osservare che essa ricalca, salvo qualche dettaglio tecnico, quella per gli spazi metrici.

Negli spazi completi sussiste la seguente caratterizzazione dei compatti:

Teorema 1.2.2. *Sia E uno spazio vettoriale topologico di Hausdorff* completo. *Dato un sottoinsieme $K \subset E$, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *K è compatto.*

2. *K è chiuso e totalmente limitato.*

Dimostrazione. Se $K \subset E$ è compatto, K è chiuso perchè E è di Hausdorff. Sia $V \in \mathcal{N}_0$, in modo che $\{x + V : x \in K\}$ è un ricoprimento aperto di K. Per compattezza esiste un sottoricoprimento finito, quindi esistono $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ tali che $K \subset \bigcup_{j=1}^{n}(x_j + V)$, cioè K è totalmente limitato.
Viceversa, sia K un insieme chiuso e totalmente limitato. Proveremo la compattezza di K, mostrando che ogni ultrafiltro in K è convergente. Sia $\mathcal{F}$ un ultrafiltro in K. Vogliamo far vedere che $\mathcal{F}$ è di Cauchy. A tal scopo sia $V \in \mathcal{N}_0$, in modo che $K \subset \bigcup_{j=1}^{n}(x_j + V)$ per opportuni $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$, grazie alla totale limitatezza. Facciamo vedere che esiste $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tale che $(x_j + V) \in \mathcal{F}$. Siccome $\mathcal{F}$ è un ultrafiltro (filtro massimale), basta far vedere che esiste $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tale che $(x_j + V) \bigcap M$ è non vuoto per ogni $M \in \mathcal{F}$. Se così non fosse, per ogni $j = 1, 2, \ldots, n$ esisterebbe $M_j \in \mathcal{F}$ tale

che $(x_j + V) \bigcap M_j$ è vuota. Ora $M_j \subset K$, sicché $\bigcap_{j=1}^n M_j$ è vuota contro la definizione di filtro.
Sia ora $U \in \mathcal{N}_0$ e V un intorno di 0 tale che $V - V \subset U$. Grazie alle considerazione precedenti esiste $x_0 \in E$ tale che $M = (x_0 + V) \in \mathcal{F}$ e $M - M = V - V \subset U$, cosicchè $\mathcal{F}$ è un filtro di Cauchy. Siccome E è completo esiste (unico) $x \in E$ tale che $\mathcal{F}$ converge a $x \in K$, poichè K è chiuso. □

Chiudiamo questo paragrafo con un risultato che mostra che la nozione di completezza introdotta si riduce a quella nota nel caso in cui 0 ha una base numerabile di intorni (caso metrizzabile)

Teorema 1.2.3. *Sia E uno spazio vettoriale topologico con una base numerabile di intorni di* 0*. Se E è sequenzialmente completo, allora E è completo.*

Dimostrazione. Sia $\{U_n\}$ una base numerabile di intorni dello zero e $\mathcal{F}$ un filtro di Cauchy. Fissato $n \in \mathbb{N}$, sia $M_n \in \mathcal{F}$ tale che $M_n - M_n \subset U_n$. Poniamo $F_n = \cap_{j=1}^n M_j$. Siccome $\mathcal{F}$ è un filtro, gli F_n sono insiemi non vuoti, pertanto sia $x_n \in F_n$. Per costruzione la successione $\{x_n\}$ è di Cauchy, pertanto esiste $x \in E$ tale che $x_n \to x$. Mostriamo che il filtro $\mathcal{F}$ converge a x e cioè che $\mathcal{N}_x \preceq \mathcal{F}$. A tal scopo occorre e basta provare che $(x + U_n) \in \mathcal{F}$ per ogni intero n. Fissato un tale n, sia k un intero tale che $U_k + U_k \subset U_n$ e sia $h > k$ tale che $x_j \in x_k + U$ (un tale h esiste, chè la successione degli x_n converge a x). Siccome $x_h \in M_k$, abbiamo $M_k \subset U_k + x_h \subset U_k + U_k + x \subset U_n + x$, ciò che conclude la prova. □

Capitolo 2

Spazi localmente convessi

La definizione di spazio vettoriale topologico è sufficientemente generale da prevedere nel novero dei suoi esempi spazi piuttosto patologici. Ad esempio, non è difficile esibire spazi vettoriali topologici con duale (topologico) banale, cioè ridotto al solo funzionale identicamente nullo[1].
Spazi con duali poco ricchi sono di scarsa utilità e, soprattutto, lo studio delle loro proprietà non può essere affrontato con profitto con tecniche di dualità. La classe dei cosiddetti spazi localmente convessi, invece, è tanto ampia da includere tutti gli esempi provenienti dell'Analisi classica (spazi di funzioni e di distribuzioni), quanto miratamente restrittiva da escludere le patologie cui abbiamo accennato.

2.1 Seminorme e convessi

Cominciamo richiamando la ben nota definizione di seminorma su uno spazio vettoriale:

Definizione 2.1.1 (seminorma)**.** *Sia E uno spazio vettoriale. Una funzione $p : E \to \mathbb{R}$ si dice una seminorma se soddisfa le proprietà seguenti:*

1. $p(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in E$.
2. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ *per ogni* $x, y \in E$.
3. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ *per ogni* $x \in E$ *e per ogni* $\lambda \in \mathbb{C}$.

[1] Un esempio tipico è dato dallo spazio vettoriale $\mathfrak{M}([0,1])$ delle (classi di) funzioni $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ misurabili secondo Lebesgue finite quasi ovunque, munito della distanza

$$d(f, g) = \int_{[0,1]} \frac{|f - g|}{1 + |f - g|} \mathrm{d}\mu_{Leb}$$

La nozione di convergenza introdotta da d è quella in misura. Si verifica che $\mathfrak{M}([0,1])$ è completo e che il suo duale topologico è ridotto al funzionale nullo, *cfr* [40].

Si riconosce immediatamente che gli insiemi $U = \{x \in E : p(x) < 1\}$, $V = \{x \in E : p(x) \leq 1\}$ sono convessi ed equilibrati, se p è una seminorma; inoltre sono assorbenti. Il risultato che segue inverte la corrispondenza appena descritta, associando ad un convesso equilibrato ed assorbente una seminorma opportuna.

Proposizione 2.1.1 (Funzionale di Minkowski)**.** *Sia $U \subset E$ un insieme assorbente, convesso ed equilibrato. Allora la funzione data da*

$$p_U(x) = \inf\{r > 0 : x \in rU\}$$

è una seminorma. Inoltre $U \subset \{x \in E : p_U(x) \leq 1\}$.

Dimostrazione. Siccome U è assorbente, p_U è ben definita ed è positivamente omogenea. Mostriamo che p_U è subadditiva. Siano $x, y \in E$. Dato $\varepsilon > 0$ esistono $r, s > 0$ tali che $x \in rU$, $x \in sU$ e $r < p_U(x) + \varepsilon$, $s < p_U(y) + \varepsilon$. Siccome U è convesso ($\frac{x}{r}$ e $\frac{y}{s} \in U$), abbiamo che $\frac{x+y}{r+s} = \frac{r}{r+s}\frac{x}{r} + \frac{s}{r+s}\frac{y}{s} \in U$, perciò $p_U(\frac{x+y}{r+s}) \leq 1$, cioè $p_U(x + y) \leq r + s < p_U(x) + p_U(y) + 2\varepsilon$. Siccome ε è arbitrario, se ne conclude che $p_U(x + y) \leq p_U(x) + p_U(y)$, come volevamo.
Resta da provare che p_U è omogenea. Ciò è un'immediata conseguenza del fatto che U è equilibrato. □

Finora non abbiano supposto assegnata alcuna topologia su E, sebbene il caso degli spazi vettoriali topologici sia il quadro dove collocare le osservazioni preliminari che stiamo presentando, con lo scopo di definire gli spazi localmente convessi. Da adesso in poi, pertanto, supporremo che E sia uno spazio vettoriale topologico. Sussiste il seguente semplice risultato, la cui dimostrazione costituisce un'ovvia verifica.

Lemma 2.1.1. *Sia p una seminorma su E. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *p è continua in 0.*

2. *p è continua.*

3. *Esiste una seminorma continua q tale che $p \leq q$.*

Osserviamo che la verifica del precedente richiede di constatare che ogni semimorma p verifica la disuguaglianza $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$ per ogni $x, y \in E$ in conseguenza della subadditività.
Passiamo a dare la definizione di spazio localmente convesso:

Definizione 2.1.2 (Spazi localmente convessi)**.** *Uno spazio vettoriale topologico E si dice localmente convesso se possiede una base di intorni di 0 convessi.*

Salvo avviso contrario, considereremo soltanto spazi di Hausdorff, pertanto l'espressione "localmente convesso" sottointenderà sempre "di Hausdorff".
Un'immediata applicazione del teorema di Hanh-Banach mostra che il duale topologico di uno spazio localmente convesso è sempre sufficientemente ricco da separare i punti dello stesso. A tal scopo premettiamo un utile lemma, che trova sovente applicazioni concrete[2].

Lemma 2.1.2. *Sia E uno spazio localmente convesso. Una forma lineare $\varphi : E \to \mathbb{C}$ è continua se e solo se esiste un intorno U convesso ed equilibrato di $0 \in E$ tale che $|\varphi(x)| \leq p_U(x)$ per ogni $x \in E$.*

Dimostrazione. Se U è un intorno convesso ed equilibrato di 0, p_U è una funzione continua, perciò $|\varphi(x)| \leq p_U(x)$ per ogni $x \in E$ implica che φ è continua. Viceversa se φ è continua, $U \doteq \{x \in E : |\varphi(x)| \leq 1\}$ è un intorno convesso ed equilibrato di 0 ed è immediato riconoscere che $|\varphi| \leq p_U$. □

Una caratterizzazione più generale della continuità di forme lineari è, invece, la seguente, che vale anche in contesti non localmente convessi:

Proposizione 2.1.2. *Sia E uno spazio vettoriale topologico e $\varphi : E \to \mathbb{C}$ una forma lineare. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *φ è continua.*
2. *$\mathrm{Ker}\varphi \subset E$ è un sottospazio chiuso.*

Dimostrazione. Siccome $\mathrm{Ker}\varphi = \varphi^{-1}(0)$, la condizione *1.* implica immediatamente la *2.*, poichè $\{0\} \subset \mathbb{C}$ è chiuso. Dimostriamo, quindi, l'implicazione *2.* $\Rightarrow$ *1.* Se φ non è continua, esiste una rete $\{x_i\}$ tale che $x_i \to 0$ $|\varphi(x_i)| \geq \delta$ per qualche $\delta > 0$. Sia $x_0 \in E$ tale che $\varphi(x_0) = 1$ (un tale x_0 esiste,a meno di considerare una forma lineare identicamente nulla). Si ha la decomposizione in somma diretta (algebrica) $E = \mathrm{Ker}\varphi \oplus \mathbb{C}x_0$, da cui $x_i = y_i + \varphi(x_i)x_0$, con $y_i \in \mathrm{Ker}\varphi$ per ogni i. Consideriamo la rete $\{\frac{y_i}{\varphi(x_i)}\} \subset \mathrm{Ker}\varphi$. Siccome si ha

$$\frac{y_i}{\varphi(x_i)} = \frac{x_i}{\varphi(x_i)} - x_0 \quad \text{per ogni } i$$

riesce $\frac{y_i}{\varphi(x_i)} \to -x_0 \notin \mathrm{Ker}\varphi$, cioè $\mathrm{Ker}\varphi$ non è chiuso. □

Qui sotto il risultato sull'abbondanza di forme lineari continue per gli spazi localmente convessi:

Proposizione 2.1.3. *Sia E uno spazio localmente convesso e $x \in E$ un vettore non nullo. Allora esiste $\varphi \in E^*$ tale che $\varphi(x) \neq 0$.*

[2] Ad esempio per dimostrare i teoremi di struttura delle distribuzioni, *cfr* [49].

Dimostrazione. Sia U un intorno convesso ed equilibrato di 0 tale che $x \notin U$. Se p_U è il corrispondente funzionale di Minkowski, si ha $p_U(x) > \geq 1$. Sia $f : \mathbb{C}x \to \mathbb{C}$ la forma lineare data da $f(\lambda x) = \lambda$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$. Riesce evidentemente $|f(y)| \leq p_U(y)$ per ogni $y \in \mathbb{C}x$. Grazie alla forma analitica del teorema di Hanh-Banach esiste un prolungamento φ di f a tutto E talce che $|\varphi| \leq p_U$. Grazie al lemma precedente $\varphi \in E^*$ e, per costruzione $\varphi(x) = 1 \neq 0$. □

In generale negli spazi localmente convessi non esistono aperti limitati, a meno di ricondursi al caso normato; vale infatti il seguente risultato.

Teorema 2.1.1 (von Neumann-Kolmogoroff)**.** *Sia E uno spazio localmente convesso nel quale esiste un* intorno limitato *di* 0*. Allora la topologia di E può essere mutuata da una norma.*

Dimostrazione. Sia $U \subset E$ un intorno di 0 limitato, che non è restrittivo supporre convesso ed equilibrato. Vogliamo dimostrare che il funzionale di Minkowski p_U è una norma, che induce la topologia assegnata su E.
Sia $x \in E$ un vettore non nullo e sia V un intorno di 0 tale che $x \notin V$. Siccome U è limitato, esiste $\lambda > 0$ tale che $U \subset \lambda V$ da cui $p_U(x) \geq \frac{1}{\lambda}$, ciò che mostra che p_U è una norma. Anche l'ultima asserzione è conseguenza immediata del fatto che U è limitato: se W è un intorno convesso ed equilibrato di 0, esiste $\mu > 0$ tale che $V \subset \mu W$, da cui $p_W \leq \frac{1}{\mu} p_U$, cosicchè la topologia generata da p_U deve coincidere con quella inizialmente assegnata. □

Negli spazi localmente convessi valgono le forme geometriche del teorema di Hahn-Banach nonchè il teorema di Krein-Milman. Allo sopo di dare gli enunciati precisi, premettiamo qualche definizione.

Definizione 2.1.3. *Due sottoinsiemi $A, B \subset E$ di uno spazio localmente convesso si dicono separati da un iperpiano se esiste un funzionale lineare continuo l a valori in $\mathbb{R}$ ed un numero reale a tale che $l(x) \leq a$ per ogni $x \in A$ e $l(x) \geq a$ per ogni $x \in B$. Se, infine, $l(x) < a$ per ogni $x \in A$ e $l(x) > b$ per ogni $x \in B$ (con $b > a$), diciamo che A e B sono strettamente separati.*

Teorema 2.1.2 (Hahn-Banach: forme geometriche)**.** *Siano $A, B \subset E$ sottoinsiemi convessi disgiunti di uno spazio localmente convesso E. Si ha quanto segue:*

1. *Se A è aperto, allora possono essere separati da un iperpiano.*

2. *Se A e B sono entrambi aperti, allora possono essere strettamente separati da un iperpiano.*

3. *Se A è compatto e B è chiuso, allora possono essere strettamente separati da un iperpiano.*

Il teorema di *Krein-Milman* concerne l'abbondanza di punti estremali per insiemi convessi compatti.

Definizione 2.1.4 (punti estremali)**.** *Sia $C \subset X$ un sottoinsieme convesso di uno spazio vettoriale X. Un punto $x \in C$ si dice estremale se $x = ty + (1-t)z$ con $t \in [0,1]$ e $y, z \in C$ implica $y = z = x$.*

L'insieme dei punti estremali di C si indica con $Extr\, C$. In generale, tale sottoinsieme può anche essere vuoto, tuttavia:

Teorema 2.1.3 (Krein-Milman)**.** *Sia $K \subset E$ un sottoinsieme convesso e compatto di uno spazio localmente convesso E. Allora $ExtrK \subset K$ è un sottoinsieme non vuoto, il cui inviluppo convesso è denso in K.*

Il teorema di Krein-Milman è uno strumento molto utile in alcuni risultati di esistenza. Applicazioni classiche si hanno, fra le altre, nella teoria delle rappresentazioni di C^*-algebre e nel teorema di rappresentazione integrale di Choquet.
Per la dimostrazione si può consultare, ad esempio, l'appendice, dovè riportata la prova di Kelley.

2.2 Spazi di Fréchet

Una classa di spazi localmente convessi particolarmente interessante è quella dei cosiddetti spazi di Fréchet. Prima di presentarne la definizione precisa, consideriamo il seguente:

Lemma 2.2.1. *Sia E uno spazio localmente convesso. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *E è metrizzabile.*
2. *$0 \in E$ possiede una base* numerabile *di intorni.*
3. *La topologia di E è generata da una collezione numerabile di seminorme.*

Dimostrazione. L'unica implicazione non banale è *3* $\Rightarrow$ *1*. Sia $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ una collezione numerabile di seminorme generanti la topologia di E. Definiamo la funzione $d : E \times E \to [0, +\infty)$, ponendo

$$d(x,y) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{1 + p_n(x-y)}$$

per ogni $x, y \in E$.
Si verifica facilmente che d è una distanza su E. Inoltre, tale metrica è invariante per traslazioni, cioè $d(x+z, y+z) = d(x,y)$ per ogni $x, y, z \in E$. Rimane da verificare che la topologia indotta da d coincide con la topologia

iniziale. Sia U un intorno di 0 per la topologia iniziale. Allora può assumersi che $U = \{x \in E : p_k(x) \leq \varepsilon \quad \forall k = 1, 2 \ldots, n\}$.
Verifichiamo che $V \doteq B_{\frac{\varepsilon}{2^n(1+\varepsilon)}}(0)$ è contenuta in U. Se $x \in V$, si ha $\frac{1}{2^k}\frac{p_k(x)}{1+p_k(x)} \leq \frac{\varepsilon}{2^n(1+\varepsilon)}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. In particolare, si ha che $\frac{p_k(x)}{1+p_k(x)} \leq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ per ogni $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ cioè $p_k(x) \leq \varepsilon$ per ogni $k \in \{1, 2 \ldots, n\}$, che è come dire $x \in U$. Questo mostra che la topologia indotta dalla distanza è più fine della topologia iniziale.
Sia ora $V \doteq B_\delta(0)$. Occorre provare che esiste un U intorno di 0 per la topologia iniziale tale che $U \subset V$. Siccome $\frac{p_n(x)}{1+p_n(x)} \leq 1$ per ogni $x \in E$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste $N > 0$ tale che $\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\frac{p_k(x)}{1+p_k(x)} \leq \frac{\delta}{2}$ per ogni $x \in E$. Poniamo $U \doteq \{x \in E : p_k(x) \leq \frac{\delta}{2N(1-\delta)} \quad \forall k = 1, 2, \ldots N\}$. Si riconosce immediatamente che $U \subset V$, ciò che conclude la dimostrazione. □

Passiamo ora alla definizione preannunciata:

Definizione 2.2.1 (Spazi di Fréchet)**.** *Uno spazio localmente convesso metrizzabile si dice uno spazio di Fréchet se è completo come spazio metrico.*

Quali spazi metrici completi, gli spazi di Fréchet sono esempi di spazi di *Baire*, pertanto non sono unione numerabile di insiemi rari; analogamente a quanto avviene negli spazi di Banach, quindi, i teoremi dell'uniforme limitatezza e della mappa aperta conservano la loro validità nel più generale contesto di tali spazi.

Proposizione 2.2.1 (Principio di uniforme limitatezza)**.** *Siano E ed F spazi di Fréchet. Se $\mathcal{F}$ è una famiglia di operatori lineari e continui da E a F tale che $\{q(F(x)) : F \in \mathcal{F}\} \subset \mathbb{R}$ è un insieme limitato per ogni seminorma continua $q : F \to \mathbb{R}$ e per ogni $x \in E$, allora per ogni seminorma continua p definita su F esiste una seminorma continua d su E e una costante $C > 0$ tale che*

$$p(F(x)) \leq Cd(x)$$

per ogni $x \in E$ e per ogni $F \in \mathcal{F}$.

Dimostrazione. Fissata una seminorma continua p su F definiamo gli insiemi $C_n = \{x \in E : p(F(x)) \leq n \quad \text{per ogni } F \in \mathcal{F}\} \subset E$. Gli insiemi C_n sono chiusi (quali intersezione di chiusi) e $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ grazie alle ipotesi. Allora esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che C_{n_0} ha interno non vuoto. Questo significa che esiste una seminorma continua d su E e un numero $\delta > 0$ tali che

$$\{x \in E : d(x - x_0) \leq \delta\} \subset C_{n_0}$$

per qualche $x_0 \in C_{n_0}$. Un semplice calcolo mostra che ciò implica $p(F(x)) \leq \frac{2n_0}{\delta} d(x)$ per ogni $x \in E$ e per ogni $F \in \mathcal{F}$. □

Corollario 2.2.1. *Sia E uno spazio di Fréchet e $\mathcal{F} \subset E^*$ una famiglia di funzionali lineari puntualmente limitata. Allora esiste una seminorma continua p su E tale che:*

$$|\varphi(x)| \leq Cp(x)$$

per ogni $x \in E$, per qualche $C > 0$.

I risultati appena dimostrati valgono in un contesto molto più generale. Non è indispensabile, infatti, lavorare in ambiente metrizzabile (e completo): la classe più ampia in cui è valido il principio di uniforme limitatezza è costituita, come vedremo, dai cosiddetti spazi *tonnelé* (barrelled[3]).
Il teorema della mappa aperta, invece, trova il suo enunciato più generale nel contesto degli spazi di *Ptak*. Daremo la dimostrazione di tale teorema direttamente in quel quadro più generale; qui ci limiteremo, piuttosto, ad enunciarlo, discutendo qualche interessante applicazione:

Teorema 2.2.1 (Mappa aperta)**.** *Sia $T : E \to F$ un'applicazione lineare continua e suriettiva fra spazi di Fréchet. Allora T è aperta, cioè $T(U)$ è aperto in F per ogni aperto $U \subset E$.*

Si hanno i seguenti corollari:

Corollario 2.2.2. *Un'applicazione lineare invertibile $T : E \to F$ fra spazi di Fréchet ha inversa continua.*

Corollario 2.2.3 (Teorema del grafico chiuso)**.** *Sia $T : E \to F$ un'applicazione lineare fra spazi di Frèchet. T è continua se e solo se il suo grafico è chiuso.*

Molti spazi provenienti dall'Analisi classica sono spazi di Fréchet: qui sotto proponiamo gli esempi più tipici.
Indichiamo con $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ lo spazio delle funzioni C^∞ a decrescenza rapida in $\mathbb{R}^n$, cioè di quelle funzioni $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tali che $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty$ per ogni coppia di multiindici[4] $\alpha, \beta \in I_n$.
Si riconosce immediatamente che $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio vettoriale sul quale sono ben definite le seminorme $p_{\alpha,\beta}$ date da $p_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)|$ per ogni $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Evidentemente $\{p_{\alpha,\beta}\}$ è una prebase numerabile di seminorme, generanti una topologia localmente convessa *metrizzabile*. La completezza è una semplice verifica. Il duale di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è costituito dalle cosiddette *distribuzioni temperate*, per le quali è ben definita la trasformata di Fourier. Per una trattazione molto dettagliata della trasformata di Fourier per tali distribuzioni rimandiamo a [39].

[3]Mancano buone traduzioni italiane di tale aggettivo. Il corrispondente in italiano è "imbottito", al quale è meglio preferire, tuttavia, l'aggettivo originale.

[4]Un n-multiindice α è una n-pla $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ tale che $\alpha_i \in \mathbb{N}$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$. Dato un multiindice α, si definisce la sua norma il numero naturale $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.
Se α è un multiindice x^α è il monomio $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, mentre $D^\alpha f(x) \doteq \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}(x)$.

Esempi notevoli di spazi di Fréchet, infine, provengno dall'Analisi complessa. Se $U \subset \mathbb{C}^n$ è un aperto, possiamo considerare lo spazio vettoriale $\mathcal{O}(U)$ delle funzioni olomorfe in U. Con la topologia della convergenza uniforme sui sottoinsiemi compatti $\mathcal{O}(U)$ è uno spazio di Frèchet.Per verificare ciò, basta scrivere un'esaustione in compatti di $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$, dove $K_i \subset U$ sono compatti chiusura di aperti tali che $K_i \subset int(K_{i+1})$ e, se $K \subset U$ è compatto, esiste i tale che $K \subset K_i$. La famiglia numerabile delle seminorme p_i date da

$$p_i(f) = \sup_{z \in K_i} |f(z)|$$

genera la topologia della convergenza uniforme sui compatti. La completezza di $\mathcal{O}(U)$ è una semplice applicazione del teorema di Morera.
Il caso $n > 1$, corrispondente alle funzioni di più variabili complesse, è particolarmente interessante, poichè possono esistere aperti $U \subset W \subset \mathbb{C}^n$ (con inclusione stretta) tali che ogni funzione olomorfa in U ammette un' estensione olomorfa a W, che è unica grazie al principio di prolungamento analitico. Una situazione tipica in cui si verifica tale evenienza, che non conosce analoghi nel caso di una singola variabile complessa, è riassunta nel seguente famoso risultato di Hartogs:

Teorema 2.2.2 (Hartogs). *Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un insieme aperto e $K \subset U$ un compatto tale che U/K è connesso. Allora ogni funzione olomorfa in U/K ammette un'estensione olomorfa a U.*

Siano ora $U \subset W$ due aperti con la proprietà che ogni funzione olomorfa in U si estende in una funzione olomorfa in W. Dato $K \subset U$, definiamo

$$\hat{K} = \left\{ w \in W : |f(w)| \leq \sup_{z \in K} |f(z)| \quad \forall f \in \mathcal{O}(U) \right\}$$

Si ha il risultato seguente:

Teorema 2.2.3. *Siano $U \subset W$ due aperti di $\mathbb{C}^n$ tali che ogni funzione olomorfa in U si estende in un'unica funzione olomorfa in W. Allora si ha:*

$$\bigcup_{K \subset U:\, K\ compatto} \hat{K} = W$$

Dimostrazione. Diamo una dimostrazione molto veloce che sfrutta la teoria degli spazi di Fréchet. Sia $T : \mathcal{O}(W) \to \mathcal{O}(U)$ l'operatore lineare dato dalla restrizione: $T(f) \doteq f \upharpoonright_U$ per ogni $f \in \mathcal{O}(W)$. Grazie alle ipotesi fatte, T è surgettivo, pertanto è un'applicazione aperta. Siccome T è iniettivo (grazie al principio di prolungamento analitico), T è un omemorfismo lineare. Ciò significa che, dato $w \in W$, esiste un sottoinsieme compatto $K \subset U$ tale che $|f(w)| \leq \sup_{z \in K} |f(z)|$, ossia $w \in \hat{K}$, ciò che conclude la prova. $\square$

2.3 Spazi bornologici

Una classe estremamente interessante di spazi localmente convessi è costituita dai cosiddetti spazi bornologici, nei quali è possibile ricostruire, in qualche senso, la topologia a partire dagli insiemi limitati. Nella teoria degli spazi normati, infatti, tali insiemi possiedono un ruolo fondamentale essendo intimamente legati alla norma; non la stessa importanza assumono, invece, nel contesto generale dove la seguente definizione mostra tutto il suo interesse. Ad essa premettiamo un semplice:

Lemma 2.3.1. *Sia E uno spazio localmente convesso. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *Ogni insieme convesso equilibrato $C \subset E$ che assorbe gli isiemi limitati è un intorno dello zero.*
2. *Ogni seminorma $p : E \to \mathbb{R}$ limitata sugli insiemi limitati è continua.*

Dimostrazione. *1.* $\Rightarrow$ 2. Sia p una seminorma limitata sugli insiemi limitati e sia $C \doteq \{x \in E : p(x) \leq 1\}$. C è un insieme convesso ed equilibrato, inoltre assorbe gli insiemi limitati: sia $B \subset E$ limitato, in modo che esiste $\lambda > 0$ tale che $p(x) \leq \lambda$ per ogni $x \in E$, allora, come è immediato riconoscere $B \subset \lambda C$.Grazie all'ipotesi segue che C è un intorno di zero.
2. $\Rightarrow$ *1.* Sia C un insieme convesso che assorbe i limitati e sia p la seminorma associata (funzionale di Minkowski). Si riconosce subito che p è limitata sugli insiemi limitati, sicchè p è continua e, dunque, C è un intorno dello zero. □

Definizione 2.3.1 (Spazio bornologico)**.** *Uno spazio localmente convesso E si dice bornologico se soddisfa una delle condizioni del lemma precedente.*

Prima di provare il prossimo risultato, che esprime il carattere bornologico degli spazi *metrizzabili*, è opportuno segnalare alcune proprietà generali degli insiemi limitati:

Proposizione 2.3.1. *Un insieme $B \subset E$ è limitato se e solo se ogni successione $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset E$ è limitata.*

Dimostrazione. Un'implicazione è ovvia. Supponiamo che E non sia limitato, in modo che esiste un intorno U di zero tale che $B \subset \lambda U$ non è soddisfatta per alcun valore di $\lambda > 0$. Ciò significa che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in B$ tale che $x_n \notin nB$. Per costruzione, la successione $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset B$ non è limitata. □

Inoltre:

Proposizione 2.3.2. *Se $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset E$ è una successione limitata, $\{\lambda_n x_n\}$ tende a zero per ogni successione $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{C}$ infinitesima.*

Dimostrazione. Sia U un intorno (equilibrato) dello zero. Siccome la successione $\{x_n\}$ è limitata, esiste $\delta > 0$ tale che $x_n \in \delta U$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia $N \in \mathbb{N}$ tale che $|\lambda_n| \leq \frac{1}{\delta}$. Allora si ha $\lambda_n x_n \in U$ per ogni $n \geq N$, cioè $\lambda_n x_n$ tende a zero. □

Proposizione 2.3.3. *Sia E uno spazio localmente convesso* metrizzabile*. Se $\{x_n\} \subset E$ è una successione che tende a zero, esiste una successione divergente $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}$ tale che $\{\lambda_n x_n\}$ tende a zero.*

Dimostrazione. Sia $\{U_k\}$ una base numerabile di intorni dello zero con $U_{k+1} \subset U_k$. Per ipotesi, per ogni $k \in \mathbb{N}$, esiste $N_k \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \in \frac{1}{k} U_k$ per ogni $n \geq N_k$. Definiamo $\lambda_n = k$ se $N_k \leq n \leq N_{k+1}$. La successione $\{\lambda_n\}$ possiede le proprietà volute. □

Finalmente possiamo provare il risultato preannunciato:

Teorema 2.3.1. *Uno spazio localmente convesso metrizzabile E è bornologico.*

Dimostrazione. Sia p una seminorma limitata sugli insiemi limitati di E. Mostriamo che p è (sequenzialmente) continua in zero. Sia $\{x_n\} \subset E$ una successione infinitesima e sia $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}$ come nella precedente. Si ha $|p(x_n)| = \frac{1}{|\lambda_n|} p(\lambda_n x_n)$ e pertanto $p(x_n) \to 0$. □

Corollario 2.3.1. *Uno spazio normato è bornologico.*

La verifica della continuità di un'applicazione lineare $T : E \to F$, dove E è uno spazio bornologico , si riconduce allo studio della limitatezza di T ovvero alla sua continuità sequenziale, come mostra il seguente risultato, che può essere riguardato come una vasta generalizzazione di quanto è ben noto in relazione agli operatori lineari fra spazi normati:

Teorema 2.3.2. *Sia E uno spazio bornologico e $T : E \to F$ un'applicazione lineare, dove F è uno spazio localmente convesso. Le seuenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *T è continuo.*
2. *T è sequenzialmente continuo.*
3. *T è* limitato *(applica insiemi limitati in insiemi limitati).*

Dimostrazione. Se T è continuo è sicuramente sequenzialmente continuo.Se T è sequenzialmente continuo, allora è limitato. Sia, infatti, $\{x_n\} \subset E$ una successione limitata. Se $\{Tx_n\} \subset F$ non fosse limitata, esisterebbe un intorno V di $0 \in F$ tale che $\{Tx_n\} \not\subseteq \lambda V$ per alcun $\lambda > 0$. Cioè, a meno di estratte, $Tx_n \notin nV$ per ogni n. Cosicchè $\frac{1}{n} Tx_n \notin U$ per ogni n. Tuttavia $\frac{1}{n} Tx_n = T(\frac{x_n}{n})$ converge a zeo, perchè T è sequenzialmente continuo.
Supponiamo T limitato e mostriamo che è continuo. Sia V un intorno convesso ed equilibrato di $0 \in F$. Sia $U \doteq T^{-1}(V)$. U è convesso ed equilibrato

quale immagine inverda di un insieme siffatto. Inoltre U assorbe gli insiemi limitati. Sia $B \subset E$ un tale insieme. Per ipotesi $T(B)$ è limitato in F, perciò esiste $\lambda > 0$ tale che $T(B) \subset \lambda V$, da cui $B \subset \lambda U$ (essendo passati alle immagini inverse). Siccome E è bornologico, U è un inorno dello zero, perciò T è continua, poichè $T(U) \subset V$. □

Corollario 2.3.2. *Una forma lineare $\varphi : E \to \mathbb{C}$ definita su uno spazio bornologico E è continua se e solo se è limitata, ovvero se e solo se è sequenzialmente continua.*

2.4 Spazi barreled

Una seconda classe molto interessante di spazi localmente convessi è costituita dai cosiddetti spazi barrelled (tonnelès), che costituiscono il più generale contesto dove è valido il principio di uniforme limitatezza.

Definizione 2.4.1. *Un insieme $C \subset E$ convesso equilibrato* chiuso *si dice un barrel (tonneau) se è assorbente.*

Definizione 2.4.2. *Uno spazio localmente convesso E si dice uno spazio barreled se ogni barrel $C \subset E$è un intorno dello zero.*

La prossima proposizione permette di stabilire che vaste classi di spazi localmente convessi sono tonnelès.

Proposizione 2.4.1. *Uno spazio localmente convesso di* Baire *è uno spazio barreled.*

Dimostrazione. Sia $C \subset E$ un barrel. Siccome C è un insieme assorbente, possiamo scrivere $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} nC$. Per ipotesi E è uno spazio topologico di Baire, pertanto C ha interno non vuoto.. La conclusione segue dall'osservare che $intC$ è convesso ed equilibrato, cosicchè $0 \in intC$. □

Gli spazi metrici completi sono spazi topologici di Baire, pertanto il seguente corollario segue immediatamente:

Corollario 2.4.1. *Gli spazi di* Frèchet *sono spazi barreled. In particolare, sono spazi barreled gli spazi di* Banach *e gli spazi di* Hilbert*.*

Con lo scopo di enunciare la formulazione generale del teorema dell'uniforme limitatezza, introduciamo la terminologia necessaria.
Se E ed F sono spazi vettoriali topologici (localmente convessi), indichiamo con $\mathcal{L}(E, F)$ lo spazio vettoriale (rispetto alle operazioni naturali) delle applicazioni lineari e continue da E a F.
$\mathcal{L}(E, F)$ può essere munito di molte topologie (localmente convesse), che descrivono utili nozioni di convergenza per operatori lineari, come la convergenza semplice o puntuale e la convergenza uniforme sugli insiemi limitati.

Prima di introdurre formalmente tali topologie, richiamiamo l'importante nozione di *equicontinuità*:

Definizione 2.4.3. *Un insieme* $F \subset \mathcal{L}(E,F)$ *si dice* equicontinuo *se per ogni intorno* U *di* $0 \in F$*, esiste un intorno* V *di* $0 \in E$ *tale che* $T(V) \subset U$ *per ogni* $T \in F$.

Nel caso degli spazi normati la nozione di equicontinuità si riduce, evidentemente, alla limitatezza rispetto alla norma degli operatori.
Se $F = \mathbb{C}$, si ha $\mathcal{L}(E,\mathbb{C}) = E^*$ e la nozione di equicontinuità per un insieme F di funzionali lineari equicontinui si esprime richiedendo che, per ogni $\varepsilon > 0$, esista un intorno U di $0 \in E$ tale che $|\varphi(x)| < \varepsilon$ per ogni $x \in U$ e per ogni $\varphi \in F$.
Passiamo ora ad introdurre le topologie di rilievo in $\mathcal{L}(E,F)$ già preannunciate.
Sia $\mathfrak{S}$ una collezione di sottoinsiemi *limitati* di E tale che:

1. Se $A, B \in \mathfrak{S}$, allora esiste $C \in \mathfrak{S}$ tale che $A \bigcup B \subset C$.
2. Se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $A \in \mathfrak{S}$, allora esiste $B \in \mathfrak{S}$ tale che $\lambda A \subset B$.

Sia infine V un intorno dello $0 \in F$. Definiamo l'insieme

$$U(B,V) \doteq \{T \in \mathcal{L}(E,F) \mid \quad T(B) \subset V\}$$

con $B \in \mathfrak{S}$

Lemma 2.4.1. *Con le notazioni precedenti,* $U(B,V) \subset \mathcal{L}(E,F)$ *è un insieme assorbente. Inoltre è convesso se* V *è convesso, equilibrato se* V *è equilibrato.*

Dimostrazione. Sia $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Siccome T è un'applicazione continua, esiste un intorno U di $0 \in E$ tale che $T(U) \subset V$. Siccome $B \subset E$ è un insieme limitato, esiste $\lambda > 0$ tale che $B \subset \lambda U$, cioè $\frac{1}{\lambda}B \subset U$, da cui segue facilmente che $T \in \lambda U(B,V)$. La seconda parte dell'enunciato è di ovvia verifica. □

Se $\mathfrak{S}$ è una collezione di insiemi limitati che soddisfa le condizioni $1-2$, la famiglia degli insiemi $U(B,V)$, al variare di $B \in \mathfrak{S}$ e di V in una base di intorni di $0 \in F$ descrive una base di intorni di $0 \in \mathcal{L}(E,F)$ di una topologia di spazio vettoriale topologico su $\mathcal{L}(E,F)$, chiamata $\mathfrak{S}$-topologia. Quando $\mathcal{L}(E,F)$ è munito di tale topologia, viene indicato con $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E,F)$. Vale il risultato seguente:

Proposizione 2.4.2. $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ *è uno spazio localmente convesso, se* F *è localmente convesso. Se* F *è uno spazio di Hausdorff e se l'unione degli insiemi di* $\mathfrak{S}$ *è densa in* E*, allora* $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ *è di Hausdorff.*

Dimostrazione. Sia $T \in \mathcal{L}(E,F)$ un'applicazione lineare tale che $T \in U(B,V)$ per ogni $B \in \mathfrak{S}$ e per ogni intorno V di $0 \in F$. Se $x \in \bigcup_{B\in\mathfrak{S}} B$, si ha $Tx \in V$ per ogni intorno V di $0 \in F$, sicché $Tx = 0$, F essendo uno spazio di Hausdorff.Siccome T è un'applicazione continua e $\bigcup_{B\in\mathfrak{S}} B$ è un sottoinsieme denso in E, ne segue che $T = 0$. La verifica di locale convessità è ovvia. □

Fra le più interessanti famiglie di sottoinsiemi limitati che soddisfano le condizioni $1-2$, menzioniamo le seguenti:

- La famiglia di tutti i sottoinsiemi *finiti* di E. La topologia corrispondente è chiamata topologia della convergenza puntuale (o semplice) e $\mathcal{L}(E,F)$ munito di tale topologia è indicato con $(L)_\sigma(E,F)$, oppure con $\mathcal{L}_s(E,F)$.

- La famiglia di tutti i sottoinsiemi *compatti* di E. La topologia corrispondente è nota come tipologia della convergenza compatta e lo spazio corrispondente è indicato come $\mathcal{L}_c(E,F)$.

- La famiglia di tutti i sottoinsiemi *limitati* di E , cui corrisponde la cosiddetta topologia della convergenza limitata (o forte). Lo spazio corrispondente è indicato con $\mathcal{L}_b(E,F)$.

Se indichiamo rispettivamente con σ, c, b le topologie appena introdotte, si ha evidentemente $\sigma \preceq c \preceq b$. Al teorema di uniforme limitatezza premettiamo qualche risultato valido nel contesto degli spazi localmente convessi (non necessariamente barreled).

Proposizione 2.4.3. *Se* $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(E,F)$ *è equicontinuo, allora* $\mathcal{F}$ *è* limitato *in* $\mathcal{L}_b(E,F)$.

Dimostrazione. Dobbiamo provare che $\mathcal{F}$ è assorbito da $U(B,V)$, ove $B \subset E$ è un insieme limitato e $V \subset F$ è un intorno di 0. Siccome $\mathcal{F}$ è equicontinuo, esiste un intorno U di $0 \in E$ tale che $T(U) \subset V$ per ogni $T \in \mathcal{F}$. Siccome B è limitato, esiste $\lambda > 0$ tale che $B \subset \lambda U$, da cui $T(\frac{1}{\lambda}B) \subset V$ per ogni $T \in \mathcal{F}$, ossia $\mathcal{F} \subset \lambda U(B,V)$. □

Il seguente risultato è di verifica immediata:

Proposizione 2.4.4. *Se* F *è uno spazio localmente convesso e* $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(E,F)$ *è equicontinuo, allora* conv$\mathcal{F}$ *è equicontinuo.*

Finalmente possiamo enunciare il teorannuniato, che mette in luce le peculiarità degli spazi barreled.

Teorema 2.4.1 (Uniforme limitatezza)**.** *Sia* E *uno spazio barreled e* F *uno spazio localmente convesso. Dato un sottoinsieme* $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(E,F)$*, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. $\mathcal{F}$ *è limitato in* $\mathcal{L}_\sigma(E,F)$.

2. $\mathcal{F}$ *è limitato in* $\mathcal{L}_c(E,F)$.

3. $\mathcal{F}$ *è equicontinuo.*

Dimostrazione. Evidentemente occorre soltanto dimostrare che la prima affermazione implica la terza. Sia F limitato in $\mathcal{L}_\sigma(E,F)$. Sia $V \subset F$ un intorno di 0, che non è restrittivo assumere convesso, equilibrato e chiuso. Sia $U \doteq \{x \in E : Tx \in V \text{ per ogni } T \in F\} = \bigcap_{T\in F} T^{-1}(V)$. U è certamente un insieme convesso, equilibrato e chiuso. Se mostriamo che U è assorbente, avremo la conclusione, E essendo barreled per ipotesi.
Sia $y \in E$. Quale sottoinsieme limitato in $\mathcal{L}_\sigma(E,F)$, F è assorbito da $U(\{y\},V)$, cosicchè esiste $\lambda > 0$ tale che $F \subset \lambda U(\{y\},V)$, cioè $T \in F$ implica $Ty \in \lambda V$, ossia $y \in \lambda U$, ciò che conclude la prova. □

Il seguente utile corollario è noto come teorema di *Banach-Steinhaus*:

Corollario 2.4.2. *Sia E uno spazio barreled e F uno spazio localmente convesso. Sia* $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(E,F)$ *una successione convergente puntualmente ad un'applicazione lineare T. Allora T è continua.*

Dimostrazione. Siccome $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è puntualmente convergente, abbiamo che tale successione è di Cauchy in $\mathcal{L}_\sigma(E,F)$. In particolare, $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un insieme limitato in $\mathcal{L}_\sigma(E,F)$, pertanto è equicontinuo. Sia V un intorno di $0 \in F$, allora esiste U intorno di $0 \in E$ tale che $T_n(U) \subset V$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.Da ciò segue immediatamente che $T(U) \subset \bar{V}$, che esprime la continuità di T. □

Concludiamo enunciando un teorema che riconosce nella *completezza sequenziale* una condizione sufficiente, affinchè uno spazio bornologico sia barreled:

Teorema 2.4.2. *Uno spazio bornologico sequenzialmente completo E è uno spazio barreled.*

Una classe molto interessante di spazi barreled è quella dei cosiddetti spazi di *Montel*:

Definizione 2.4.4. *Uno spazio barreled E si dice di Montel se ogni insieme chiuso e limitato* $C \subset E$ *è compatto.*

Osservazione 2.4.1. *Uno spazio di Montel è quasi-completo.*

Evidentemente uno spazio di Banach è di Montel se e solo se è finito-dimensionale, pertanto la nozione appena introdotta è interessante soltanto nei caso non normabile. Un tipico esempio di spazio di Montel è lo spazio $O(U)$ delle funzioni olomorfe su un aperto $U \subset \mathbb{C}$ con la topologia della convergenza uniforme sui compatti (compatta-aperta). La dimostrazione di questo fatto, che in Analisi Complessa è noto talvolta come teorema di Montel, è una semplice applicazione del teorema di Ascoli-Arzelà e della formula integrale di Cauchy. Per maggiori dettagli vedere [49].
Altri esempi tipici di spazi di Montel si incontrano nella teoria delle distribuzioni: $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $C_c^\infty(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ essendo un aperto) con i loro duali forti.

2.5 I teoremi di Nachbin-Shirota

Esempi molto interessanti di spazi localmente convessi sono dati dagli spazi di funzioni continue su spazi topologici opportuni. In questo paragrafo considereremo i cosiddetti spazi di Tychonoff, nel senso della seguente

Definizione 2.5.1 (Spazi topologici $T_{3\frac{1}{2}}$). *Uno spazio topologico X si dice di Tychonoff (ovvero separato $T_{3\frac{1}{2}}$) se è separato T_1 e se, comunque dati $x \in X$ e un sottoinsieme chiuso $C \subset X$ con $x \notin C$, esiste $f : X \to \mathbb{R}$ continua tale che $f(x) = 0$ e $f(y) = 1$ per ogni $y \in C$.*

Alcuni autori indicano la proprietà di separazione espressa sopra con l'aggettivo di *completamente regolare*.
L'interesse per tali spazi risiede nel fatto che essi rappresentano esattamente la classe di spazi topologici che ammettono compattificazione di *Stone-Čech*[5]. Da adesso in avanti, X indicherà uno spazio topologico di Tychonoff e $C(X)$ lo spazio vettoriale delle funzioni (reali o complesse) continue su X. Grazie all'ipotesi di completà regolarità $C(X)$, munito della *compatta-aperta*, si rivela uno spazio sufficientemente ricco da discriminare opportune proprietà dello spazio base X.
In ciò che segue vogliamo enunciare una coppia di teoremi, dovuti essenzialmente a Nachbin [32] e a Shirota [46], che esprimono l'equivalenza fra interessanti proprietà topologiche possedute da X e proprietà altrettanto notevoli possedute dal corrispondente $C(X)$, pensato con la topologia localmente convessa generata dalla base di seminorme p_K con

$$p_K(f) = \sup_{x \in K} |f(x)| \quad \text{per ogni } f \in C(X)$$

dove $K \subset X$ è un insieme compatto.
All'enunciato del primo premettiamo una definizione.

Definizione 2.5.2. *Un insieme $F \subset X$ si dice* $C(X)$-limitato *se ogni $f \in C(X)$ è* limitata *in F.*

Sussiste il risultato seguente:

[5]Se X è uno spazio topologico, la sua compattificazione di Stone-Cĕch è la coppia $(\beta X, i)$, dove βX è uno spazio compatto di Hausdorff e $i : X \to \beta X$ è un' inclusione (cioè un omeomorfismo fra X e la sua immagine in βX mediante i) tale che $i(X)$ è denso in βX ed è soddisfatta la *proprietà universale*:
Se K è uno spazio compatto di Hausdorff e $f : X \to K$ è un'applicazione continua, allora esiste un'unica applicazione continua $\beta f : \beta X \to K$ tale che $f = \beta f \circ i$.
Si dimostra che uno spazio topologico ammette tale compattificazione se e solo se è completamente regolare.
Esistono numerose dimostrazioni di questo risultato. Una dimostrazione svolta in un contesto di topologia generale è contenuta, ad esempio, nel libro di Kelley [22]; per una dimostrazione che sfrutta la teoria delle algebre di Banach rimandiamo all'appendice.

Teorema 2.5.1 (Nachbin-Shirota)**.** *Sia X uno spazio completamente regolare. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *$C(X)$ è uno spazio barreled.*

2. *Se $F \subset X$ è chiuso e $C(X)$-limitato, allora F è compatto.*

Il precedente teorema ammette un'interessante applicazione in topologia generale, che, a quanto ci consta, non è stata evidenziata in letteratura. Tale risultato concerne la possibilità di invertire, sotto ipotesi opportune, il teorema di *Weierstrass*, essendo possibile inferire la compattezza di X a partire dalla sua $C(X)$-limitatezza. Prima di evidenziare la nostra applicazione, è bene citare, a tal riguardo, un risultato abbastanza noto.

Teorema 2.5.2. *Sia (X, d) uno spazio metrico $C(X)$-limitato. Allora X è compatto.*

Dimostrazione. Basta verificare che X è sequenzialmente compatto. Supponiamo per assurdo che non lo sia e, cioè, che esista una successione $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$ che non ammetta sottosuccessioni convergenti. Fissato $x \in X$, sia $A_x = \{n \in \mathbb{N} : d(x, x_n) \leq \frac{1}{n}\}$. Evidentemente $A_x \subset \mathbb{N}$ ha cardinalità finita, altrimenti esisterebbe una sottosuccessione convergente ad $x \in X$. Definiamo $f_n(x) = \max\{0, 1 - nd(x, x_n)\}$ e sia $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nf_n(x)$. Osserviamo che, fissato $x \in X$, la serie che definisce f contiene soltanto un numero finito di termini non nulli, sicchè f è ben definita ed è continua. Siccome si ha che $f(x_n) \geq n$, riesce $\sup_{x \in X} |f(x)| = +\infty$, contro l'ipotesi. □

Qui sotto il risultato preannunciato.

Proposizione 2.5.1. *Sia X uno spazio topologico completamente regolare e sia $\{K_n \subset X : n \in \mathbb{N}\}$ una famiglia numerabile di compatti tale che, se $K \subset X$ è compatto, esiste n_0 tale che $K \subset K_{n_0}$. Se X è $C(X)$-limitato, allora X è compatto.*

Dimostrazione. Sotto le nostre ipotesi, $C(X)$ munito della topologia compatta-aperta è uno spazio di Fréchet, poichè la famiglia numerabile delle seminorme p_{K_n} genera la topologia e la completezza è una verifica ordinaria. Grazie al teorema di Baire, gli spazi di Frèchet sono barreled, quindi, grazie al teorema di Nachbin-Shirota, i sottoinsiemi di X chiusi e $C(X)$-limitati sono compatti. In particolare, ne segue la compattezza di X. □

Il risultato precedente acquisterebbe maggior valore, se si conoscessero esempi non metrizzabili di spazi topologici che ne verificano le ipotesi. Concludiamo la sezione con un secondo teorema di Nachbin-Shirota, al quale premettiamo la seguente:

Definizione 2.5.3 (Spazi compatti-reali)**.** *Uno spazio topologico di Tychonoff X si dice* compatto-reale *se, per ogni forma lineare moltiplicativa*[6] *non nulla $\omega : C(X) \to \mathbb{C}$, esiste un (unico) $x \in X$ tale che $\omega(f) = f(x)$ per ogni $f \in C(X)$.*

[6] cioè tale che $\omega(fg) = \omega(f)\omega(g)$ per ogni $f, g \in C(X)$.

Gli spazi topologici compatti di Hausdorff sono tutti esempi di spazi compatti reali, in modo che la nozione testè introdotta costituisce una generalizzazione opportuna della compattezza; in ogni caso ecco il risultato preannunciato:

Teorema 2.5.3 (Nachbin-Shirota)**.** *Sia X uno spazio completamente regolare. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *X è compatto reale.*

2. $C(X)$ *munito della topologia compatta-aperta è uno spazio bornologico.*

Per le dimostrazioni rimandiamo ai lavori originali [32] e [46].

Capitolo 3

Dualità

3.1 Prime definizioni

La teoria della dualità è uno degli strumenti più potenti per lo studio degli spazi localmente convessi, stabilendo una corrispondenza fra le proprietà di un tale spazio X e quelle del suo duale X^*.

Definizione 3.1.1 (Coppie duali)**.** *Due spazi vettoriali (complessi) X e Y si dicono in dualità se esiste un'applicazione $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times Y \to \mathbb{C}$ tale che:*

1. *$\langle \cdot, y \rangle : X \to \mathbb{C}$ è lineare per ogni $y \in Y$.*
2. *$\langle x, \cdot \rangle : Y \to \mathbb{C}$ è lineare per ogni $x \in X$.*
3. *Dato $x \in X$ tale che $\langle x, y \rangle = 0$ per ogni $y \in Y$, si ha $x = 0$.*
4. *Dato $y \in Y$ tale che $\langle x, y \rangle = 0$ per ogni $x \in X$, si ha $y = 0$.*

I due esempi qui sotto sono fondamentali, tanto da aver ispirato l'intera teoria che andremo a tratteggiare.

Esempio 3.1.1. *Se X è uno spazio vettoriale, indichiamo con $X^\dagger$ il suo duale algebrico. X ed $X^\dagger$ sono in dualità con $\langle x, \varphi \rangle = \varphi(x)$ per ogni $x \in X$ e per ogni $\varphi \in X^\dagger$.*

Esempio 3.1.2. *Se X è uno spazio localmente convesso (di Hausdorff) e $X^* \subset X^\dagger$ è il suo duale (topologico) la mappa di valutazione dell'esempio precedente*

$$\langle x, \varphi \rangle = \varphi(x) \quad \textit{per ogni}\, x \in X \textit{ per ogni}\, \varphi \in X^*$$

è ancora un'applicazione di dualità grazie al teorema di Hahn-Banach (X^* separa X).

Molto spesso per indicare che X e Y sono in dualità, si adotta la scrittura sintetica (X, Y) e ci si riferisce a tale simbolo col nome di coppia duale[1]. Data una coppia duale (X, Y), definiamo la $\sigma(X, Y)$-topologia su X come la topologia di spazio vettoriale localmente convesso che ha come subbase di intorni aperti dello zero gli insiemi:

$$W_y = \{x \in X : |\langle x, y\rangle| \leq 1\}$$

al variare di $y \in Y$. Tale topologia è di Hausdorff, perchè Y separa X grazie alla definizione di coppia duale.
Analogamente viene definita la $\sigma(Y, X)$-topologia su Y.
Sussiste il seguente risultato, che riconosce in Y il duale topologico di X munito della $\sigma(X, Y)$-topologia.

Proposizione 3.1.1. *Sia (X, Y) una coppia duale. L'applicazione $\Phi : Y \to X^*$, data da $\Phi(y)(x) = \langle x, y\rangle$ per ogni $y \in Y$ e per ogni $x \in X$, è un isomorfismo lineare se X è munito della $\sigma(X, Y)$-topologia.*

Dimostrazione. L'unica asserzione non ovvia è quella che riguarda la suriettività di Φ. Sia $\varphi \in X^*$, allora esistono $y_1, y_2, \ldots, y_n \in Y$ tali che

$$|\varphi(x)| \leq \sum_{i=1}^{n} |\langle x, y_i\rangle| \quad \text{per ogni } x \in X$$

In particolare, $\langle x, y_i\rangle = 0$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$ implica $\varphi(x) = 0$. Ciò significa che è ben definita la forma lineare $\lambda : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ data da

$$(\langle x, y_1\rangle, \langle x, y_2\rangle, \ldots, \langle x, y_n\rangle) \ni \mathbb{C}^n \xrightarrow{\lambda} \varphi(x) \in \mathbb{C}$$

Per il teorema di rappresentazione di Riesz (per spazi finito-dimensionali) si ha $\lambda(z) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i$ per ogni $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ per un opportuni $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Pertanto si ha $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x, y_i\rangle = \langle x, y\rangle$ con $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i \in Y$ per ogni $x \in X$, ciò che conclude la prova. □

3.2 Due risultati fondamentali

In questo paragrafo presentiamo due risultati basilari per gli sviluppi successivi della teoria: il teorema del bipolare ed il teorema di *Alaoglu*. Cominciamo con una definizione importante:

Definizione 3.2.1 (Polare di un insieme)**.** *Sia (X, Y) una coppia duale e $A \subset X$. Il polare A° di A è il sottoinsieme di Y dato da*

$$A^\circ = \{y \in Y : |\langle x, y\rangle| \leq 1 \text{ per ogni } x \in A\}$$

[1] *Dual pair* nella letterarura inglese.

Evidentemente A° è convesso, equilibrato e $\sigma(Y, X)$-chiuso (quale intersezione di chiusi), qualunque sia $A \subset X$.
La seguente proposizione è di immediata verifica, pertanto ne omettiamo la dimostrazione.

Lemma 3.2.1 (Calcolo di polari)**.** *Sia* (X, y) *una coppia duale. Allora:*

1. *Se* $A \subset B \subset X$*, allora* $B^\circ \subset A^\circ$.
2. $(\lambda A)^\circ = \frac{1}{\lambda} A^\circ$ *per ogni scalare* λ *non nullo.*
3. *Se* $\{A_\alpha\}$ *è una collezione di sottoinsiemi di* X *si ha* $(\cup A_\alpha)^\circ = \cap A_\alpha^\circ$ *e* $(\cap A_\alpha)^\circ = \cup A_\alpha^\circ$.
4. *Se* $V \subset X$ *è un sottospazio, si ha* $V^\circ = V^\perp$ *dove*

$$V^\perp \doteq \{y \in Y : \langle x, y \rangle = 0 \, \textit{per ogni} \, x \in V\}$$

.

Prima di enunciare i risultati preannunciati, consideriamo la seguente

Definizione 3.2.2 (Topologie compatibili)**.** *Sia* (X, Y) *una coppia duale. Una topologia localmente convessa* $\mathcal{T}$ *su* X *si dice* compatibile *con la dualità se il duale di* X *munito della topologia* $\mathcal{T}$ *è ancora* Y.

Evidentemente, la $\sigma(X, Y)$-topologia è compatibile con la dualità assegnata; anzi è la topologia meno fine con tale proprietà, come è immediato riconoscere. Osserviamo sin da ora che le topologie compatibili hanno gli stessi convessi chiusi e gli stessi insiemi limitati.
Ora possiamo finalmente enunciare il teorema del bipolare, che può essere considerato l'espressione astratta della forma geometrica del teorema di Hahn-Banach.

Teorema 3.2.1 (Teorema del bipolare)**.** *Per ogni sottoinsieme* $C \subset X$, $C^{\circ\circ}$ *è l'involucro convesso (equilibrato) chiuso di* C *in ogni topologia compatibile con la dualità* (X, Y).

Dimostrazione. Sia K la chiusura dell'involucro convesso (equilibrato) di $C \subset X$. Siccome $C^{\circ\circ}$ è assolutamente convesso e chiuso nelle topologie compatibili (essendo $\sigma(X, Y)$-chiuso), si ha $K \subset C^{\circ\circ}$. Mostriamo che l'inclusione non può essere stretta. Supponiamo per assurdo che esista $x_0 \in C^{\circ\circ}$ che non appartiene a K. Per una delle forme geometriche del teorema di Hahn-Banach esiste $\varphi \in X^*$ tale che $Re\varphi(x) \leq 1$ per ogni $x \in K$, mentre $Re\varphi(x_0) > 1$. Se ora $y \in Y$ è tale che $\varphi(\cdot) = \langle \cdot, y \rangle$, abbiamo $y \in K^\circ = C^\circ$, da cui $|\langle x_0, y \rangle| \leq 1$, che è assurdo. □

Come utile corollario del teorema del bipolare abbiamo che un sottospazio $V \subset X$ è denso in ogni topologia compatibile con la dualità (X, Y) se e solo se $V^{\perp} = 0$.
Il teorema seguente, che nella versione astratta che presentiamo è dovuto a L. Alaoglu, è il più generale risultato di compattezza noto nel contesto dell'Analisi Funzionale.

Teorema 3.2.2 (Alaoglu). *Sia (X, Y) una coppia duale. Se $U \subset X$ è un intorno convesso ed equilibrato di $0 \in X$ in una topologia* compatibile*, allora il polare U° è un insieme $\sigma(Y, X)$-compatto.*

Dimostrazione. Sia p_U la seminorma (funzionale di Minkowski) associata ad U. Non è difficile riconoscere che si ha:

$$U^{\circ} = \{y \in Y : |\langle x, y\rangle| \leq p_U(x) \text{ per ogni } x \in X\}$$

Fissato $x \in X$, sia $K_x = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq p_U(x)\}$. Indichiamo con K il prodotto (con la topologia di Tychonoff) $\prod_{x \in X} K_x$. K è uno spazio topologico compatto (prodotto di compatti) grazie al teorema di Tychonoff. Osserviamo che si ha un' inclusione naturale $U^{\circ} \subset K$, poichè

$$K = \{f : X \to \mathbb{C} : |f(x)| \leq p_U(x) \text{ per ogni } x \in X\}$$

Tale inclusione realizza evidentemente un omeomorfismo fra U° e la sua immagine in K. Ciò significa che U° è compatto se e solo se la sua immagine in K è chiusa. A tal scopo basta osservare che U° è il sottoinsieme di K dato da:

$$\bigcap_{x,y \in X} \bigcap_{\alpha, \beta \in \mathbb{C}} \{f \in K : P_{\alpha x + \beta y}(f) - \alpha P_x(f) - \beta P_y(f) = 0\}^2$$

ove $P_w : K \to K_w$ ($w \in X$) sono le mappe di valutazione (proiezioni). Questa riscrittura di U° mostra che tal insieme è chiuso quale intersezione di chiusi (le proiezioni sono continue). □

Come immediato corollario del teorema ritroviamo il ben noto risultao (noto come teorema di Banach-Alaoglu), secondo il quale la palla unità X_1^* del duale di uno spazio normato X è compatta nella topologia *-debole, essendo il polare della palla unità X_1 di X stesso.

Osservazione 3.2.1. L'ipotesi che $U \subset X$ sia un intorno di una topologa compatibile non può essere rimossa, come mostra il seguente controesempio.
Sia X uno spazio di Banach non riflessivo. Consideriamo la coppia duale (X^*, X) (con la dualità canonica). Sia $U \subset X^*$ la palla unità. U è un insieme

[2] La linearità di una funzione di K implica che tale funzione è della forma $\langle \cdot, y\rangle$ per qualche $y \in Y$, poichè le funzioni di K sono dominate da una seminorma continua di una topologia compatibile.

convesso ed equilibrato; inoltre è un intorno di $0 \in X^*$ per la topologia della norma. Tuttavia il polare di U è la palla unità X_1 che non è $\sigma(X, X^*)$-compatta. In effetti la topologia della norma su X^* non è comptibile con la dualità (a meno che X sia riflessivo)

3.3 Topologie compatibili con una dualità: teorema di Mackey-Arens

Se (X, Y) è una coppia duale, è possibile definire in X (e in Y) topologie localmente convesse differenti dalle topologie deboli già introdotte. In particolare, fra queste vi è la topologia di Mackey, che permette di classificare tutte le topologie compatibili con la dualità assegnata.

Definizione 3.3.1 (Topologia di Mackey)**.** *Sia (X, Y) una coppia duale. La topologia di Mackey su X è la topologia localmente convessa generata dalla famiglia di seminorme p_K date da:*

$$p_K(x) = \sup_{y \in K} |\langle x, y \rangle|$$

dove $K \subset Y$ è un insieme $\sigma(Y, X)$-compatto. La topologia di Mackey su X viene indicata con $\tau(X, Y)$.

Evidentemente la famiglia di seminorme $\{p_C\}$ dove $C \subset Y$ è $\sigma(Y, X)$-compatto convesso ed equilibrato è ancora una base di seminorme per la topologia di Mackey, poichè $p_K = p_{K^{\circ\circ}}$ (grazie al teorema del bipolare).
Il seguente risultato, noto come teorema di Mackey-Arens, individua in $\tau(X, Y)$ la più fine delle topologie localmente convesse compatibili.

Teorema 3.3.1 (Teorema di Mackey-Arens)**.** *Sia (X, Y) una coppia duale. Una topologia localmente convessa $\mathcal{T}$ su X è compatibile con la dualità se e solo se $\sigma(X, Y) \leq \mathcal{T} \leq \tau(X, Y)$.*

Per la dimostrazione di questo notevole risultato può essere utile il seguente:

Lemma 3.3.1. *Sia X uno spazio vettoriale topologico localmente convesso. Allora $X^* = \bigcup_{U \in \mathcal{B}} U^\circ$, dove $\mathcal{B}$ è una base di intorni convessi di 0 e i polari sono relativi alla dualità $(X, X^\dagger)$.*

Dimostrazione. Una forma lineare $\varphi : X \to \mathbb{C}$ è continua se e solo se è dominata da una seminorma continua, cioè se esiste $U \in \mathcal{B}$ tale che $|\varphi(x)| \leq p_U(x)$ per ogni $x \in X$, cioè se e solo se $\varphi \in U^\circ$. □

Ora possiamo passare alla prova del teorema 3.3.1.

Dimostrazione. Per definizione la $\sigma(X,Y)$-topologia è la topologia localmente convessa meno fine compatibile con la dualità. Sia $\mathcal{T}$ una topologia compatibile. Occorre mostrare che $\mathcal{T} \leq \tau(X,Y)$. A tal scopo, sia $U \subset X$ un intorno chiuso convesso ed equilibrato di $0 \in X$. Per il teorema del bipolare $U = U^{\circ\circ}$. Per il teorema di Alaoglu $K = U^{\circ}$ è $\sigma(Y,X)$-compatto, quindi $U = \{x \in X : p_K(x) \leq 1\}$ è un intorno di $0 \in X$ per la topologia di Mackey.
Per concludere, basta provare che $\tau(X,Y)$ è compatibile. Per computare il duale di X munito della topologia di Mackey, ci avvaliamo del lemma 3.3.1. Sia $K \subset Y$ un insieme convesso equilibrato, $\sigma(Y,X)$-compatto. Ne segue che K è chiuso nella topologia $\sigma(X^{\dagger},X)$, pertanto $K = K^{\circ\circ}$, grazie al teorema del bipolare applicato alla coppia duale $(X^{\dagger},X)$. Per definizione di topologia di Mackey K° è un intorno (convesso equilbrato) di $0 \in X$. Quindi

$$X^* = \bigcup K^{\circ\circ} = Y$$

al variare di $K \subset Y$ fra i sottoinsiemi convessi, equilibrati e $\sigma(Y,X)$-compatti. □

Un fatto notevole nella teoria della dualità è che la nozione di limitatezza è indipendente dalla topologia, nel senso che le topologie compatibili hanno tutte i medesimi insiemi limitati in conseguenza del risultato seguente:

Proposizione 3.3.1. *Sia E uno spazio localmete convesso e $B \subset E$ un suo sottoinsieme. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *B è un insieme limitato.*
2. *$p(B)$ è limitato in $\mathbb{R}$ per ogni seminorma continua $p : E \to \mathbb{R}$.*
3. *$B^{\circ} \subset E^*$ è un insieme assorbente.*
4. *$\omega(B)$ è limitato in $\mathbb{C}$ per ogni $\omega \in E^*$.*

Dimostrazione. Le prime tre condizioni sono palesemente equivalenti. Mostriamo che la condizione espressa in 4. implica la limitatezza.
Sia $B \subset E$ un sottoinsieme che verifica la condizione $\sup_{x \in B} |\omega(x)| < \infty$ per ogni $\omega \in E^*$. Sia U un intorno (convesso ed equilibrato) di $0 \in E$. Vogliamo mostrare che B è assorbito da U. Indichiamo con p_U il funzionale di Minkowski associato ad U e definiamo il sottospazio $N_U \doteq \{x \in E : p_u(x) = 0\} \subset E$. Sullo spazio quoziente E/N_U resta ben definita la norma $\|\cdot\|$ data da $\|\hat{x}\| = p_U(x)$. Sia $(X_U, \|\cdot\|)$ lo spazio di Banach ottenuto completando il quoziente E/N_U e sia $\pi : E \to X_U$ la mappa lineare ottenuta componendo la proiezione canonica di E sul quoziente E/N_U con l'immersione di E/N_U nel completamento X_U. Osserviamo che B è assorbito da U se e solo se $\pi(B)$ è limitato (in norma) in X_U. Per il teorema di *Banach* − *Steinhaus* basta verificare che $\pi(B)$ è debolmente limitato. A tal scopo, sia $\varphi \in X_U^*$ un funzionale

lineare limitato. Definiamo $\omega : E \to \mathbb{C}$ ponendo $\omega(x) = \varphi(\pi(x))$. Osserviamo che $\omega \in E^*$, perchè π è un'applicazione continua. Per ipotesi deve essere allora $\sup_{x\in B} |\omega(x)| < \infty$ da cui $\varphi(\pi(B))$ è limitato per ogni $\varphi \in X_U^*$, che è la conclusione. □

Come preannunciato, possiamo ora enunciare l'immediato corollario:

Teorema 3.3.2 (Mackey). *Gli insiemi limitati di E sono gli stessi per tutte le topologie localmente convesse compatibili con la dualità fra E ed E^*.*

Concludiamo questa sezione segnalando una definizione ed un semplice risultato.

Definizione 3.3.2 (Spazi relativamente forti). *Uno spazio localmente convesso E si dice relativamente forte se la sua topologia coincide con la topologia di Mackey $\tau(E, E^*)$.*

Esempi tipici di spazi relativamente forti sono dati dagli spazi bornologici:

Proposizione 3.3.2. *Se E è uno spazio bornologico, allora E è relativamente forte.*

Dimostrazione. Indichiamo con E_τ lo spazio vettoriale topologico E munito della topologia di Mackey. L'applicazione identica $i : E \to E_\tau$ è evidentemente limitata grazie al teorema di Mackey, sicchè i è continua in quanto E è uno spazio bornologico per ipotesi. Ciò significa che la topologia di E è più fine della topologia di Mackey e, quindi, deve coincidere con quest'ultima grazie al teorema di Mackey-Arens. □

Corollario 3.3.1. *Se $(X, \|\cdot\|)$ è uno spazio normato, allora $\tau(X, X^*)$ è la topologia della norma, cioè $(X, \|\cdot\|)$ è relativamente forte.*

3.4 Spazi riflessivi

Data una coppia in dualità (E, F) è possibile definire una terza topologia localmente convessa di notevole interesse: la cosiddetta topologia forte.

Definizione 3.4.1 (topologia forte). *Sia (E, F) una coppia in dualità. La topologia forte su F è l topologia localmente convessa generata dalla base di seminorme*

$$p_B(y) = \sup_{x\in B} |\langle x, y\rangle|$$

al variare di $B \subset E$ fra gli insiemi limitati (per le topologie compatibili). Essa viene indicata con $\beta(F, E)$.

Vogliamo considerare il caso particolare della coppia duale (E, E^*), ove E è uno spazio localmente convesso. Munito della $\beta(E^*, E)$-topologia, E^* viene indicato con E_b^* e chiamato duale forte. Osserviamo che, nel caso normato, la topologia forte sul duale si riduce all'usuale topologia della norma (duale), in modo che la seguente definizione appare come un'ovvia generalizzazione:

Definizione 3.4.2 (Biduale)**.** *Il biduale E^{**} di uno spazio localmente convesso E è il duale dello spazio E_b^*.*

Come per gli spazi normati, possiamo considerare l'*iniezione canonica* $j : E \to E^{**}$ data da

$$\langle j(x), \varphi \rangle \doteq \langle \varphi, x \rangle \quad \text{per ogni } x \in E \text{ e per ogni } \varphi \in E^*$$

Adesso siamo in grado di dare due importanti definizioni:

Definizione 3.4.3 (Spazi semiriflessivi)**.** *Uno spazio localmente convesso E si dice* semiriflessivo *se l'iniezione canonica di E nel suo biduale E^{**} è surgettiva.*

Una nozione più forte è quella di *riflessività*:

Definizione 3.4.4 (Spazi riflessivi)**.** *Uno spazio localmente convesso E si dice* riflessivo *se l'iniezione canonica $j : E \to E^{**}$ è un omeomorfismo tra E con la topologia iniziale ed E^{**} con la topologia forte $\beta(E^{**}, E)$.*

Allo scopo di dimostrare una notevole caratterizzazione degli spazi riflessivi, consideriamo i seguenti risultati preliminari, molti dei quali vivono di interesse proprio.
Utile corollario del teorema di Alaoglu, consideriamo dapprima il risultato seguente, che appartiene alla teoria generale degli spazi barreled.

Proposizione 3.4.1. *Sia E uno spazio barreled e $H \subset E^*$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *H è $\sigma(E^*, E)$-limitato.*
2. *H è $\beta(E^*, E)$-limitato.*
3. *H è equicontinuo.*
4. *H è relativamente compatto per la $\sigma(E^*, E)$-topologia.*

Dimostrazione. L'equivalenza delle prime tre affermazioni è conseguenza immediata del principio di uniforme limitatezza. Supponiamo che H sia equicontinuo. Allora è immediato riconoscere che $H^\circ \subset E$ è un intorno di $0 \in E$, cosicchè $H^{\circ\circ} \subset E^*$ è compatto nella topologia debole. Siccome $H \subset H^{\circ\circ}$, si ha che H è relativamente compatto in tale topologia. Se, poi, H è relativamente $\sigma(E^*, E)$-compatto, allora esso è sicuramente limitato in tale topologia. □

Qui di seguito troviamo un risultato generale di un certo interesse:

Teorema 3.4.1. *Il duale forte di uno spazio semiriflessivo è uno spazio barreled.*

Dimostrazione. Sia E uno spazio semiriflessivo e E_b^* il suo duale forte. Sia $C \subset E^*$ un barrel. Occorre provare che C è un intorno di $0 \in E^*$ per la topologia forte $\beta(E^*, E)$. Siccome E è semiriflessivo, la topologia forte su E^* è compatibile con la dualità (E^*, E), pertanto C è un insieme debolmente chiuso (essendo convesso). Per il teorema del bipolare $C = C^{\circ\circ}$. Se mostriamo che $C^\circ \subset E$ è limitato, avremo la conclusione, ma quest'ultima affermazione è conseguenza immediata del fatto che C è un insieme assorbente. □

Conseguenza pressocché immediata del risultato precedente è il teorema che segue:

Teorema 3.4.2. *Sia E uno spazio localmente convesso. Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

1. *E è semiriflessivo.*

2. *Ogni insieme $B \subset E$ chiuso e limitato è compatto per la topologia debole $\sigma(E, E^*)$.*

Dimostrazione. Sia E è semiriflessivo e $B \subset E$ un insieme chiuso e limitato. Il suo polare $B^\circ \subset E^*$ è un insieme convesso, equilibrato, assorbente e chiuso in E_b^*. Siccome E_b^* è uno spazio barreled, ne segue che B° è un intorno di 0 nella topologia forte, che è una topologia compatibile con la dualità (E^*, E). Per il teorema di Alaoglu, $B^{\circ\circ}$ è debolmente compatto; ne segue che $B \subset B^{\circ\circ}$ è tale, quale chiuso in un compatto.
Viceversa, se ogni sottoinsieme $B \subset E$ chiuso e limitato è debolmente compatto, si ha che le topologie $\tau(E^*, E)$ e $\beta(E^*, E)$ coincidono, pertanto il biduale di E è ancora E, grazie al teorema di Mackey-Arens. □

Sussiste la seguente

Proposizione 3.4.2. *Se E è uno spazio barreled semiriflessivo, allora E è riflessivo.*

Dimostrazione. Occorre mostrare soltanto che l'iniezione canonica $j : E \to E^{**} = E$ è bicontinua e cioè che la topologia di E coincide con la topologia forte $\beta(E, E^*)$. Siccome E è barreled, si applica il teorema di *Banach-Steinhaus*, in modo che gli insiemi equicontinui di E^* sono tutti e i soli insiemi fortemente limitati. La conclusione segue osservando che la topologia iniziale di E è la topologia della convergenza uniforme sugli insiemi equicontinui. □

Possiamo enunciare finalmente la caratterizzazione egli spazi riflessivi:

Teorema 3.4.3. *Uno spazio localmente convesso E è riflessivo se e solo se è barreled e ogni insieme chiuso e limitato $B \subset E$ è $\sigma(E, E^*)$-compatto.*

Dimostrazione. Evidente applicazione dei risultati precedenti. □

I seguenti corollari non sono scevri di applicazioni concrete in seno alla teoria delle distribuzioni.

Corollario 3.4.1. *Gli spazi di* Montel *sono riflessivi.*

Dimostrazione. Uno spazio di Montel è barreled per ipotesi; inoltre ogni suo sottoinsieme chiso e limitato è compatto per la topologia iniziale e, dunque, è debolmente compatto. □

Proposizione 3.4.3. *Sia E uno spazio di Montel. Ogni sottoinsieme chiuso e limitato in E^*_b è compatto in E^*_b. Inoltre, sui sottoinsiemi limitati di E^*_b, la topologia forte e la topologia debole coincidono.*

Dimostrazione. Sia H un sottoinsieme limitato in E^*_b. Allora H è equicontinuo, perchè E è uno spazio barreled, pertanto su H la topologia debole coincide con la topologia della convergenza sui compatti, che devono coincidere con la topologia forte; ciò prova l'ultima parte dell'enunciato.
Supponiamo ora che H sia fortemente chiuso e sia $\bar{H}$ la sua chiusura nella topologia debole. Siccome H è equicontinuo, $\bar{H}$ è ancora equicontinuo e, pertanto è debolmente compatto. Per quanto dimostrato all'inizio, topologia forte e debole coincidono su $\bar{H}$, sicchè H è fortemente denso in $\bar{H}$, da cui $\bar{H} = H$, cosicchè H è debolmente compatto, ovvero fortemente compatto. □

Corollario 3.4.2. *Il duale forte di uno spazio di Montel è ancora uno spazio di Montel.*

Dimostrazione. Se E è uno spazio di Montel, allora E è (semi)riflessivo, pertanto è uno spazio barreled. Se $H \subset E^*_b$ è chiuso e limitato per la topologia forte, H è fortemente compatto grazie alla precedente. □

Proposizione 3.4.4. *Se $B \subset E$ è un sottoinsieme limitato di uo spazio di Montel E, allora la topologia iniziale e la $\sigma(E, E^*)$ topologia coincidono su B.*

Dimostrazione. Indichiamo con $\bar{B}$ la chiusura di B in E rispetto alla topologia iniziale. Siccome E è uno spazio di Montel, $\bar{B}$ è un insieme compatto. L'applicazione identica $i : (\bar{B}, \sigma(E^*, E)) \to (\bar{B})$ è continua (siccome la topologia iniziale è più fine della topologia debole). Siccome $\bar{B}$ è (debolmente) compatto, i è un'applicazione aperta, dunque bicontinua. □

Capitolo 4

Caratterizzazioni della riflessività secondo James

Esistono numerose caratterizzazioni della riflessività per uno spazio di Banach; la più profonda è certamente quella data da James in [16], secondo la quale uno spazio di Banach X è riflessivo se e solo se tutti i funzionali lineari continui su X raggiungono la norma sulla palla unità X_1 di X.
Questo risultato, non scevro di applicazioni alla teoria degli spazi di Banach, può riguardarsi come conseguenza di un altro e successivo risultato di James [17], che esprime una caratterizzazione assai efficiente della compattezza debole. Il risultato nella sua massima generalità può essere enunciato come segue:

Teorema 4.0.4 (James)**.** *Sia X uno spazio localmente convesso* completo*. Un sottoinsieme $\sigma(X, X^*)$- chiuso e limitato $C \subset X$ è debolmente compatto, se e solo se, per ogni $\varphi \in X^*$, esiste $c \in C$ tale che $|\varphi(c)| = \sup_{x \in C} |\varphi(x)|$.*

L'ipotesi di completezza, purtroppo, non può essere rimossa, come dimostra un notevole controesempio dovuto allo stesso James, cfr. [18]. Il prossimo paragrafo è dedicato proprio alla presentazione del controesempio di James; i successivi, invece, alla dimostrazione del risultato richiamato, che richiederà tutta una serie di lemmi preliminari.

4.1 Il controesempio di James

Seguendo molto da vicino l'articolo di James [18], presenteremo uno spazio normato (non completo) Y, la cui palla unità Y_1 non è debolmente compatto, pur essendo debolmente chiusa, limitata e con la proprietà che ogni $\varphi \in Y^*$ raggiunge la sua norma. Il completamento di tale spazio è , evidentemente, uno spazio di Banach riflessivo. Alla costruzione vera e propria premettiamo qualche nozione preliminare.

Definizione 4.1.1 (Somma l_2 di spazi normati)**.** *Data $\{(X_i, \|\cdot\|_i) : i \in \mathbb{N}\}$ una collezione (numerabile) di spazi normati, definiamo la loro somma l_2 come lo spazio normato X delle funzioni $x \in \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ tali che $\sum_i \|x_i\|_i^2 \doteq \|x\|^2 < \infty$, munito della norma $\|\cdot\|$. Tale spazio viene indicato con $\oplus_{i\in\mathbb{N}}^{l_2} X_i$.*

Si verifica immediatamente che $(X, \|\cdot\|)$ è uno spazio di Banach se tali sono gli spazi $(X_i, \|\cdot\|_i)$ per ogni i.
Per quanto concerne lo spazio duale di X, sussiste il risultato seguente.

Proposizione 4.1.1. *Se $X = \oplus_{i\in\mathbb{N}}^{l_2} X_i$, allora si ha l'isomorfismo isometrico $X^* \cong \oplus_{i\in\mathbb{N}}^{l_2} {X_i}^*$.*

Dimostrazione. Sia $\Phi : \oplus_{i\in\mathbb{N}}^{l_2} {X_i}^* \to X^*$ l'applicazione lineare data da $\Phi(\{\varphi_i\})(x) \doteq \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x_i)$ per ogni $x = \{x_i\} \in X$, se $\varphi = \{\varphi_i\} \in \oplus_{i\in\mathbb{N}}^{l_2} X_i^*$. Tale mappa è ben definita, poichè si ha

$$|\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x_i)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_i\|\|x_i\| \leq (\sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_i\|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

da cui si ricava anche che Φ è contrattiva. Verifichiamo che trattasi di una mappa suriettiva. Sia $\varphi \in X^*$, definiamo $\varphi_i : X_i \to \mathbb{C}$ ponendo $\varphi_i(y) = \varphi(\delta_y^i)$, dove δ_y^i è la successione da $\delta_y^i(j) = \delta_{i,j} y$. Evidentemente $\varphi_i \in X_i^*$. Vogliamo verificare che riesce $\sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_i\|^2 \leq \|\varphi\|^2$, dalla quale avremo la conclusione piena.
A tal scopo, sia $\varepsilon > 0$ e $x_i \in X_i$ con $\|x_i\| = 1$ e $\|\varphi_i\|^2 \leq |\varphi_i(x_i)|^2 + \frac{\varepsilon}{2^i}$. Allora si ha che $\sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_i\|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(x_i)|^2 + \varepsilon$. Sia ora $\lambda = \{\lambda_i\} \in l_2$ in modo che $\lambda x \doteq \{\lambda_i x_i\}$ appartiene a X e $\|\lambda x\|^2 = \|\lambda\|_2^2$. Si ha:

$$|\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \varphi_i(x_i)| = |\varphi(\lambda x)| \leq \|\varphi\|\|\lambda\|_2$$

La disuguaglianza mostra che la successione $\{\varphi_i(x_i)\}$ appartiene a l_2 e che $\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(x_i)|^2 \leq \|\varphi\|^2$, grazie al teorema di rappresentazione di *Riesz-Frèchet*; se ne conclude che $\sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_i\|^2 \leq \|\varphi\|^2 + \varepsilon$, da cui l'asserto, $\varepsilon > 0$ essendo arbitrario. □

Il corollario che segue è immediato

Corollario 4.1.1. *Se $\{(X_i, \|\cdot\|_i) : i \in \mathbb{N}\}$ è una collezione di spazi di Banach riflessivi, allora $X = \oplus_{i\in\mathbb{N}}^{l_2} X_i$ è uno spazio riflessivo.*

Veniamo ora alla costruzione vera e propria. Per ogni numero naturale n definiamo lo spazio di Banach X_n come $\mathbb{R}^n$, munito della norma data da $\|x\| = \max_{i=1,2...,n} |x_i|$. Sia $X = \oplus_{n\in\mathbb{N}}^{l_2} X_n$. X è uno spazio riflessivo, quale somma di spazi riflessivi (finito-dimensionali). Sia, infine, $Y \subset X$ il sottospazio

generato dalle successioni $\{x_n\} \in X$ tali che ogni $x_n \in \mathbb{R}^n$ è un vettore le cui coordinate hanno tutte lo stesso valore assoluto, cioè $|x_n^j| = |x_n^i|$ per ogni $i, j = 1, 2, \dots, n$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$.
L'inclusione $Y \subset X$ è stretta[1]. Inoltre è facile verificare che trattasi di un sottospazio denso, invocando, ad esempio, il teorema di Krein-Milman, visto che le succesioni generanti Y a norma unitaria sono punti estremali della palla unità X_1 di X. Vogliamo verificare che ogni $\varphi \in X^*$ raggiunge la norma su Y_1, pur non essendo Y_1 riflessivo, quale spazio normato *non completo*. Siccome l'inclusione $Y \subset X$ è densa, vale l'isomorfismo *isometrico* $X^* \cong Y^*$ (dato dalla mappa di restrizione: $X^* \ni \varphi \to \varphi \restriction_Y \in Y^*$). Dato $\varphi \in X^*$, esiste $x_0 \in X_1$ tale che $\|\varphi\| = \varphi(x_0)$, poichè X è riflessivo[2].
Tale $\varphi \in X^*$ può essere identificato ad una successione $\{a_n\} \in \oplus_{n\in\mathbb{N}}^{l_2} \mathbb{R}^n$ con $a_n = \{a_n^i : i = 1, 2 \dots n\}$ in modo che

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} a_n^i x_n^i$$

per ogni $x \in X$.
Sia ora $y_0 \in Y$ la successione $\{y_{0,n}\}$ dove $y_{0,n} \in \mathbb{R}_n$ ha coordinate date da $y_{0,n}^i = \varepsilon_n^i \max_{i=1,2\dots,n} |x_{0,n}^i|$ dove ε_n^i vale 1 se $a_n^i \geq 0$, -1 in caso contrario.
Osserviamo che, per costruzione, riesce $\|y_0\| = \|x_0\| \leq 1$ e $\varphi(y_0) \geq \varphi(x_0) = \|\varphi\|$, da cui si ricava che vale $\varphi(y_0) = \|\varphi\|$.
La palla unità Y_1, quindi, non è un insieme debolmente compatto, pur verificando le ipotesi del teorema di James. Ciò mostra che l'ipotesi di completezza non può essere rimossa.

Nel paragrafo successivo presentiamo un altro controesempio, inquadrato nel contesto più generale degli spazi localmente convessi non normati. Questo controesempio è dovuto all'autore.

4.2 Un controesempio al teorema di James

Vogliamo presentare uno spazio localmente convesso (reale) E non completo, dotato di un sottoinsieme $C \subset E$ che non è debolmente compatto, pur

[1] Per dimostrarlo, occorre osservare che fissato $n \in \mathbb{N}$, i vettori del tipo $(\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1) \in \mathbb{R}^n$ sono i punti estremali della palla unitaria di $\mathbb{R}^n$ con la norma del sup (cubo n-dimensionale). Non è difficile verificare (ad esempio per induzione su n) che esiste un vettore $x_n \in \mathbb{R}^n$ che non può essere espresso come una combinazione lineare di meno di n vettori del tipo descritto. Se indichiamo con $x \in X$ l'elemento $\oplus_n x_n$, è facile mostrare che $x \notin Y$. Il generico elemento di Y è, infatti, un vettore del tipo $\sum_{i=1}^N \alpha_i y_i$ dove ciascun y_i è una successione di vettori $\{y_i^n\}$ tale che $y_i^n \in \mathbb{R}^n$ e $|y_i^n(k)| = |y_i^n(j)|$ per ogni $j, k = 1, 2, \dots, n$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$. Grazie all'osservazione fatta all'inizio x_{N+1} non può esprimersi come $\sum_{i=1}^N \alpha_i y_i^{N+1}$; ciò mostra che $x \notin Y$.

[2] Per il teorema di Hanh-Banach, esiste $F \in X_1^{**}$ tale che $F(\varphi) = \|\varphi\|$, ma $F = j(x_0)$ per qualche $x_0 \in X_1$, j essendo l'iniezione canonica di X nel suo biduale.

essendo limitato, debolmente chiuso e con la proprietà che per ogni $\varphi \in E^*$ si abbia $\sup_{x\in C} \varphi(x) = \varphi(c)$ per qualche $c \in C$.
Sia X lo spazio di Banach delle funzioni $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tali che

$$\|f\|_1 \doteq \sum_{x\in[0,1]} |f(x)| < \infty$$

munito della norma $\|\cdot\|_1$. Osserviamo che le funzioni di X hanno supporto al più numerabile. Sia $f_x \in X$ la funzione che vale 1 in x e 0 altrove, dove $x \in [0, 1]$. Siccome riesce $\|f_x - f_y\|_1 = \delta_{x,y}$ si ha che $(X, \|\cdot\|_1)$ è uno spazio non è separabile.
Indichiamo con $B[0, 1]$ lo spazio delle funzioni $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, che sono ivi *limitate*, munito della norma uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.
Sussiste il seguente fatto prevedibile:

Lemma 4.2.1. *Con le notazioni precedenti, la mappa* $\Phi : B[0, 1] \to X^*$ *data da* $\langle\Phi(g), f\rangle \doteq \sum_{x\in[0,1]} g(x)f(x)$ *per ogni* $f \in X$, $g \in B[0, 1]$, *è un isomorfismo isometrico.*

Dimostrazione. Siccome $|\sum_{x\in[0,1]} g(x)f(x)| \leq \|g\|_\infty\|f\|_1$, Φ è ben definita e $\|\Phi(g)\| \leq \|g\|_\infty$. La verifica che Φ è suriettiva non presenta difficoltà. Se $\varphi \in X^*$, definiamo g ponendo $g(x) = \varphi(f_x)$. Evidentemente si ha $\|g\|_\infty \leq \|\varphi\|$. Per costruzione riesce $\varphi(f_x) = \sum_{y\in[0,1]} g(y)f_x(y)$ per ogni $x \in [0, 1]$, sicchè $\varphi = \Phi(g)$ (e $\|\varphi\| = \|g\|_\infty$), poichè lo spazio vettoriale generato da $\{f_x : x \in [0, 1]\}$ è denso in X. □

Sia ora $C[0, 1] \subset B[0, 1]$ il sottospazio chiuso delle funzioni continue. Osserviamo che X e $C[0, 1]$ sono in dualità in modo naturale, perchè i funzionali di $C[0, 1]$ separano X; più precisamente:

Lemma 4.2.2. $C[0, 1] \subset X^*$ *è un sottospazio che norma* X, *ossia vale l'uguaglianza*

$$\|f\|_1 = sup_{g\in C[0,1]_1}|\langle\Phi(g), f\rangle|$$

per ogni $f \in X$.

Dimostrazione. Sia $f \in X$. Siccome $supp\, f \subset [0, 1]$ è un insieme al più numerabile, possiamo scrivere $supp\, f = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$, in modo che $\|f\|_1 = \sum_{i=1}^\infty |f(x_i)|$. Sia ora $\varepsilon > 0$ e sia N un intero tale che $\sum_{i=N+1}^\infty |f(x_i)| \leq \varepsilon$. Sia $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ un prolungamento continuo (alla Tietze) della funzione h definita sul chiuso $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ che vale 1 nei punti x_i tali che $f(x_i) \geq 0$ e -1 altrove. Riesce

$$\langle\Phi(g), f\rangle = \sum_{i=1}^{N} |f(x_i)| + \sum_{i=N+1}^{\infty} g(x_i)f(x_i) \leq \|f\|_1 - 2\varepsilon$$

da cui si ricava la conclusione, perchè $\|g\|_\infty = 1$ e ε è arbitrario. □

Pensiamo ora lo spazio vettoriale X munito della topologia di Mackey $\tau(X, C[0,1])$ e indichiamo con E tale spazio localmente convesso. In [6] viene dimostrato che E non è completo.
Sia ora $C \subset E$ il sottoinsieme dato dalla palla unità X_1. Evidentemente C è limitato per la topologia di Mackey, essendo addirittura limitato in norma; inoltre esso è un chiuso di tale topologia, essendo perfino $\sigma(E, E^*)$-chiuso, poichè $E^* = C[0,1]$ (grazie al teorema di Mackey-Arens) e vale la scrittura: $C = \{f \in E : |\langle \Phi(g), f \rangle| \leq 1 \text{ per ogni } g \in C[0,1]_1\}$, che esprime C quale intersezioni di insiemi $\sigma(E, E^*)$-chiusi.
Osserviamo pure che i funzionali di E^* raggiungono il sup su C. Infatti, data $g \in C[0,1]$, si ha $\sup_{f \in C} |\langle \Phi(g), f \rangle| = \|g\|_\infty$. Siccome g è una funzione continua, esiste $x_0 \in [0,1]$ tale che $\|g\|_\infty = |g(x_0)|$. Sia $f_0 = \varepsilon f_{x_0}$, dove $\varepsilon = 1$ se $f(x_0) > 0$, $\varepsilon = -1$ in caso contrario, allora si ha $\langle \Phi(g), f_0 \rangle = \|g\|_\infty$, che è quanto volevamo provare, essendo $\|f_0\|_1 = 1$. Ciononostante, vale il seguente risultato:

Proposizione 4.2.1. *Con le notazioni sopra introdtte, C non è un insieme $\sigma(E, E^*)$ compatto.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che lo sia. Consideriamo la mappa $\Psi : X \to C[0,1]^*$ data da $\langle \Psi(f), g \rangle = \sum_{x \in [0,1]} f(x) g(x)$ per ogni $g \in C[0,1]$, $f \in X$. Una facile verifica mostra che Ψ è un'applicazione isometrica, cioè che $\|\Psi(f)\| = \|f\|_1$ per ogni $f \in X$. Tale applicazione, inoltre, è continua quando X è munito della $\sigma(X, C[0,1])$-topologia e $C[0,1]^*$ della topologia *-debole.
Simmome X_1 è un insieme $\sigma(X, C[0,1])$-compatto, ne segue che $\Psi(X)_1$ è *debolmente compatto e, quindi, *debolmente chiuso. Per il teorema di *Krein-Smulian*, allora, $\Psi(X)$ è *debolmente chiuso, perciò Ψ è suriettiva, avendo immagine *debolmente densa. Ne segue che $C[0,1]^* \cong X$, che è assurdo, giacchè $C[0,1]^* \cong \mathcal{M}([0,1])$, $\mathcal{M}([0,1])$ essendo lo spazio delle misure boreliane finite su $[0,1]$. □

4.3 Il teorema di James

Questo paragrafo è interamente dedicato alla dimostrazione del teorema menzionato all'inizio del capitolo presente. Presentiamo la prova contenuta nel lavoro di James [17] del 1971, che rappresenta l'approccio più veloce al problema. Senza entrare nei dettagli della storia di questo profondissimo risultato, è comunque inevitabile accennare brevemente a quei passi preliminari, che hanno portato alla formulazione ottimale del teorema.
Il primo risultato è del 1950 ed è dovuto allo stesso James [19], dove fu dimostrato che uno spazio di Banach X con base di *Schauder* è riflessivo se ogni funzionale lineare e continuo raggiunge la sua norma sulla palla unità di X. L'ipotesi di esistenza di base di Schauder fu rimossa lo stesso anno da

Klee in [25].
Veniamo adesso alla trattazione vera e propria, per la quale è richiesto l'utilizzo di un classico lemma dovuto a *Helly*:

Lemma 4.3.1 (Helly)**.** *Sia X uno spazio di Banach. Dati $f_1, f_2, \dots, f_n \in X^*$ e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *Per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $x_\varepsilon \in X$ tale che $\|x_\varepsilon\| \leq 1$ e $|f_i(x_\varepsilon) - \alpha_i| < \varepsilon$ per ogni $i = 1, 2, \dots, n$.*

2. *$|\sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i| \leq \|\sum_{i=1}^n \beta_i f_i\|$ per ogni $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. 1. $\Rightarrow$ 2. Siano $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n \in \mathbb{R}$ fissati. Poniamo $S = \sum_{i=1}^n |\beta_i|$. Dalla condizione espressa in *1.* si ha che $\alpha_i < f_i(x_\varepsilon) + \varepsilon$ (e $\alpha_i > f_i(x_\varepsilon) - \varepsilon$) per ogni $i = 1, 2, \dots, n$ da cui ricaviamo che

$$|\sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i| < |\sum_{i=1}^n \beta_i f_i(x_\varepsilon)| + \varepsilon S \leq \|\sum_{i=1}^n \beta_i f_i\| + \varepsilon S$$

che è proprio la *2.* grazie all'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$.
2. $\Rightarrow$ *1.* Sia $\Psi : X \to \mathbb{R}^n$ la mappa lineare e continua data da $\Psi(x) \doteq (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ e sia $\alpha \doteq (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. Occorre provare che $\alpha \in K$, dove K è la chiusura di $\Psi(X_1)$, X_1 essendo la palla unitaria di X. Se così non fosse, α e K potrebbero essere strettamente separati da un iperpiano di $\mathbb{R}^n$, poichè K è un sottoinsieme compatto e convesso. Ciò significa che esisterebbe $\varphi \in \mathbb{R}^{n*}$ tale che $\varphi(y) < \gamma < \varphi(\alpha)$ per ogni $y \in K$, dove γ è un opportuno numero reale. Per il teorema di rappresentazione di Riesz abbiamo $\varphi(y) = \sum_{i=1}^n \beta_i y_i$ per ogni $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ con $(b_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$, da cui si ricava che $|\sum_{i=1}^n \beta_i f_i(x)| < \gamma \sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i$ per ogni $x \in X_1$ ossia $\|\sum_{i=1}^n \beta_i f_i\| < \gamma < \sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i$ che è in contraddizione con la *2.* □

Il lemma di Helly ammette anche la seguente formulazione, in tutto equivalente a quella appena dimostrata:

Lemma 4.3.2 (Helly)**.** *Sia X uno spazio di Banach. Dati $f_1, f_2, \dots, f_n \in X^*$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ e $M > 0$, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste x_ε tale che $\|x_\varepsilon\| \leq M + \varepsilon$ e $f_i(x_i) = \alpha_i$ per ogni $i = 1, 2, \dots, n$.*

2. *$|\sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i| \leq M\|\sum_{i=1}^n \beta_i f_i\|$ per ogni $(\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n) \in \mathbb{R}^n$.*

La dimostrazione per gli spazi separabili è notevolmente meno complessa ed è l'argomento della sezione che segue.

Il caso degli spazi di Banach separabili

Il caso separabile può essere trattato con l'ausilio del seguente lemma tecnico.

Lemma 4.3.3. *Sia X uno spazio di Banach, θ un numero reale appartenente all'intervallo $(0,1)$ e $\{f_n\} \subset X_1^*$ tale che*

$$\|f\| \geq \theta \quad \textit{per ogni } f \in conv\{f_n\}.$$

Se $\{\lambda_n\}$ è una successione di numeri reali positivi con $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1$, allora esiste un numero $\alpha \in [\theta, 1]$ e una successione $\{g_n\}$ con $g_n \in conv\{f_i : i \geq n\}$ per ogni n tali che

$$\|\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i g_i\| = \alpha$$

e, per ogni n

$$\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i\| < \alpha \left(1 - \theta \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i\right)$$

Dimostrazione. Sia $\{\varepsilon_n\}$ una successione di numeri reali positivi tali che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k \varepsilon_k}{\sum_{i=k+1}^{\infty} \lambda_i \sum_{i=k}^{\infty} \lambda_i} < 1 - \theta \tag{4.1}$$

Scegliamo induttivamente $\{g_n\}$ in modo che $g_n \in \operatorname{conv}\{f_i : i \geq n\}$ e

$$\left\| \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i g_i + \left(\sum_{i=n}^{\infty} \lambda_i \right) g_n \right\| < \alpha_n (1 + \varepsilon_n) \tag{4.2}$$

dove

$$\alpha_n = \inf \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i g_i + \left(\sum_{i=n}^{\infty} \lambda_i \right) g \right\| : g \in \operatorname{conv}\{f_i : i \geq n\} \right\}$$

Siccome g e ogni g_i appartengono alla palla unità di X^*, si ha $\theta \leq 1$ per ogni n. Inoltre, si ha pure

$$\alpha_n \leq \inf \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i g_i + \lambda_n g_n + \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i \right) g \right\| : g \in \operatorname{conv}\{f_i : i \geq n+1\} \right\} = \alpha_{n+1}$$

pertanto la successione $\{\alpha_n\}$ è monotona crescente, cosicchè esiste $\alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$ e $\theta \leq \alpha = \|\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i g_i\| \leq 1$. Segue dalla disuguaglianza 4.2 che

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i}^{n} \lambda_i g_i \right\| &\leq \frac{\lambda_n}{\sum_{i=n}^{\infty} \lambda_i} \left\| \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i g_i + \left(\sum_{n}^{\infty} \lambda_i \right) g_n \right\| + \frac{\sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i}{\sum_{i=n}^{\infty} \lambda_i} \left\| \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i g_i \right\| \\ &< \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i \right) \left(\frac{\lambda_n \alpha_n (1 + \varepsilon_n)}{\sum_{n+1}^{\infty} \lambda_i \sum_{i=n}^{\infty} \lambda_i} + \frac{1}{\sum_{i=n}^{\infty} \lambda_i} \left\| \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i g_i \right\| \right) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Applicazioni successive della 5.1 per valori decrescenti di n danno

$$\begin{aligned}
&\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i\| \\
&< \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i\right)\left(\frac{\lambda_n \alpha_n (1+\varepsilon_n)}{\sum_{n+1}^{\infty} \lambda_i \sum_{i=n}^{\infty} \lambda_i} + \frac{\lambda_{n-1}\alpha_{n-1}(1+\varepsilon_{n-1})}{\sum_{i=n}^{\infty} \lambda_i \sum_{i=n-1}^{\infty} \lambda_i} + \frac{1}{\sum_{i=n}^{\infty} \lambda_i}\left\|\sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i g_i\right\|\right) \\
&< \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i\right)\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{\lambda_k \alpha_k (1+\varepsilon_k)}{\sum_{i=k+1}^{\infty} \lambda_i \sum_{i=k}^{\infty} \lambda_i} + \frac{1}{\sum_{i=2}^{\infty} \lambda_i}\|\lambda_1 g_1\|\right) \\
&< \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k \alpha_k (1+\varepsilon_k)}{\sum_{i=k+1}^{\infty} \lambda_i \sum_{i=k}^{\infty} \lambda_i}\right)
\end{aligned}$$

Siccome $\alpha_k \leq \alpha$ e tenendo conto della 4.1, si ha che

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i\right\| &< \alpha\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i\right)\left(+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sum_{i=k+1}^{\infty} \lambda_i} - \frac{1}{\sum_{i=k}^{\infty} \lambda_i}\right)(1-\theta)\right) \\
&= \alpha\left(1-\theta\sum_{i=n+1}^{\theta} \lambda_i\right)
\end{aligned}$$

ciò che conclude la prova. □

Acquisito il lemma precedente, non è difficile dimostrare un primo risultato notevole:

Teorema 4.3.1. *Sia X uno spazio di Banach* separabile*. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *X non è riflessivo.*
2. *Dato $\theta \in (0,1)$, esiste una successione $\{f_n\} \in X_1^*$ tale che*

   $$\|f\| \geq \theta \quad se\ f \in conv\{f_n\}$$

   e $f_n \xrightarrow{*} 0$.
3. *Dato $\theta \in (0,1)$ e $\{\lambda_n\}$ una successione di numeri reali positivi con $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1$, esiste un numero $\alpha \in [\theta, 1]$ ed una succesione $\{g_n\} \in X_1^*$ tale che $g_n \xrightarrow{*} 0$ e*

   $$\|\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i g_i\| = \alpha$$

   e, per ogni n, vale

   $$\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i\| < \alpha\left(1-\theta\sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i\right)$$

   .

4. *Esiste un funzionale lineare continuo, che non raggiunge la sua norma su* X_1.

Dimostrazione. *1.* $\Rightarrow$ *2.* Se X non è riflessivo, l'iniezione canonica $j : X \to X^{**}$ non è suriettiva, perciò esiste $F \in X^{**}$ con $\|F\| = 1$ e tale che $d(F, j(X)) > \theta$ grazie al lemma di Riesz (cfr. [7]), $j(X) \subset X^{**}$ essendo un sottospazio chiuso, poichè j è isometrica e X è *completo*.
Sia ora $\{x_i\} \subset X$ una successione densa. Verifichiamo che, fissato n, i funzionali $F, j(x_1), j(x_2), \dots, j(x_n)$ soddisfano la seconda condizione del lemma di Helly. La disuguaglianza

$$\theta < d(F, j(X)) \leq M\|F + \sum_{j=1}^{n} \alpha_i j(x_i)\|$$

è valida per ogni $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ e con $M = \frac{\theta}{d(F,j(X))} < 1$, pertanto esiste $f_n \in X^*$ tale che $f_n(x_i) = 0$ per ogni $i = 1, 2, \dots, n$, $F(f_n) = \theta$ e $\|f_n\| < 1$. La successione $\{f_n\}$ soddisfa le propietà volute. Se $f \in \mathrm{conv} f_n$, si ha $F(f) = \theta$, cosicchè $\|f\| \geq \theta$. Infine $\{f_n\}$ converge *-debolmente a zero, perchè è una successione equilimitata che converge puntalmente a zero su un insieme denso.
L'implicazione *2.* $\Rightarrow$ *3.* è un'immediata applicazione del lemma tecnico, dove la convergenza *-debole della successione $\{g_n\}$ a 0 è conseguenza del fatto che $g_n \in \mathrm{conv} f_i : i \geq n$.
3. $\Rightarrow$ *4.* Mostriamo che il funzionale $\sum_{i=1}^{\infty}$ non raggiunge la sua norma sulla palla unità di X. Sia, dunque, $x \in X$ con $\|x\| \leq 1$.Siccome $\{g_i\}$ converge *debolmente a 0, esiste n tale che $g_i(x) < \alpha\theta$ per ogni $i > 0$. Allora si ha

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i g_i(x) < \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i(x) + \alpha\theta \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i < \|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i\| + \alpha\theta \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i = \alpha$$

Siccome x è arbitrario, la diseguaglianza mostra quanto volevamo, essendo verificata l'uguaglianza $\alpha = \| \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i g_i \|$.
L'implicazione *4.* $\Rightarrow$ *1.* è stata già dimostrata. □

Il caso degli spazi di Banach

Il teorema della sezione precedente può essere generalizzato al caso non separabile grazie ad un secondo risultato di natura tecnica, che ora andiamo ad enunciare, dopo averne chiarito la notazione contenuta in esso. Se $\{\Phi_n\} \subset X^*$ è una successione di funzionali lineari, indichiamo con $L\{\Phi_n\}$ l'insieme di tutti i funzionali lineari $\omega \in X^*$ tali che

$$\liminf_{n\to\infty} \Phi_n(x) \leq \omega(x) \leq \limsup_{n\to\infty} \Phi_n(x)$$

per ogni $x \in X$.
Effettivamente $L\{\Phi_n\}$ è un insieme non vuoto. Ad esempio, se l è un limite di Banach[3] su l_∞, $\omega(x) \doteq l(\{\Phi_n(x)\})$, per ogni $x \in X$, è un funzionale lineare appartenente a $L\{\Phi_n\}$.

Lemma 4.3.4. *Sia X uno spazio di Banach, θ un numero appartenente all'intervallo $(0,1)$ e $\{f_n\} \subset X_1^*$ tale che*

$$\|f - \omega\| \geq \theta \quad \textit{se } f \in conv f_n \textit{ e } \omega \in L\{f_i\}.$$

Se $\{\lambda_i\}$ è una successione di numeri positivi con $\sum_i^\infty \lambda_i = 1$, allora esiste $\alpha \in [\theta, 2]$ e una successione $\{g_i\} \in X_1^*$ tali che

$$\|\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(g_i - \omega)\| = \alpha$$

e, per ogni n e per ogni $\omega \in L\{g_i\}$, vale la disuguaglianza

$$\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(g_i - \omega)\| < \alpha \left(1 - \theta \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i\right).$$

Dimostrazione. La dimostrazione di questo risultato ricalca quella già vista nel caso separabile, salvo qualche ulteriore complicazione tecnica. Per i dettagli rimandiamo al lavoro di James [17]. □

Il lemma precedente porta alla caratterizzazione seguente:

Teorema 4.3.2. *Sia X uno spazio di Banach. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *X non è riflessivo.*
2. *Dato $\theta \in (0,1)$, esistono un sottospazio (separabile) $Y \subset X$ e una successione $\{f_n\} \in X_1^*$ tali che*

$$\|f - \omega\| \geq \theta \quad \textit{se } f \in conv\{f_n\} \textit{ e } \omega \in Y^\perp$$

   e $\lim_{n\to\infty} f_n(y) = 0$ per ogni $y \in Y$.

3. *Dati $\theta \in (0,1)$ e $\{\lambda_i\}$ una successione di numeri reali positivi con $\sum_{i=1}^\infty \lambda_i = 1$, esistono $\alpha \in [\theta, 2]$ e una successione $\{g_i\} \subset X_1^*$ tali che*

$$\|\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(g_i - \omega)\| = \alpha \quad \textit{e } \|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(g_i - \omega)\| \leq \alpha \left(1 - \theta \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i\right)$$

   per ogni n e per ogni $\omega \in L\{g_i\}$.

[3]Consultare, ad esempio, l'appendice corrispondente.

4. *Esiste un funzionale lineare continuo che non raggiunge la sua norma sulla palla unità di X.*

Dimostrazione. *1.* $\Rightarrow$ *2.* Poichè X non è riflessivo, esiste un sottospazio separabile[4] $Y \subset X$ non riflessivo. Grazie al teorema dimostrato nel paragrafo precedente, dato $\theta \in (0,1)$ esiste una successione $\{f_n\} \subset Y^*$ tale che $\|f\| \geq \theta$ per ogni $f \in \text{conv}\{f_n\}$ con $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} 0$. Continuiamo ad indicare, con un piccolo abuso di notazione, con f_n un prolungamento alla Hanh-Banach dei funzionali sopradefiniti, in modo che $f_n(y) \to 0$ per ogni $y \in Y$. Se $\omega \in Y^{\perp}$, abbiamo $\|f - \omega\| \geq \|(f - \omega) \restriction_Y \| = \|f\| \geq \theta$ per ogni $f \in \text{conv}\{f_n\}$, ciò che dimostra la *2.*
L'implicazione *2.* $\Rightarrow$ *3.* è il contenuto del lemma precedente, osservando che $\omega \in L\{f_n\}$ implica immediatamente che $\omega \in Y^{\perp}$.
3 $\Rightarrow$ *4.* Supponiamo che la proprietà espressa in *3.* sia verificata. Sia Δ un numero tale che $0 < \Delta < \frac{1}{2}\theta^2$ e $\{\lambda_n\}$ tale che $\lambda_{n+1} < \Delta\lambda_n$ per ogni n. Mostreremo che il funzionale $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(g_i - \omega)$ non raggiunge la suna norma su X_1, se $\omega \in L\{g_i\}$. A tal scopo, sia $x \in X_1$. Siccome $\liminf_{n\to\infty} g_n(x) \leq \omega(x)$ e $\alpha \geq \theta$, esiste n tale che $(g_{n+1} - \omega)(x) < \theta^2 - 2\Delta \leq \alpha\theta - 2\Delta$. Ne segue che

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(g_i - \omega)(x) < \sum_{i=1}^{n}(g_i - \omega)(x) + (\alpha\theta - 2\Delta)\lambda_n + \sum_{i=n+2}^{\infty} \lambda_i(g_i - \omega)(x)$$

da cui ricaviamo che

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(g_i - \omega)(x) < \|\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(g_i - \omega)\| + (\alpha\theta - 2\Delta)\lambda_n + 2\sum_{i=n+2}^{\infty} \lambda_i$$

Ora $\sum_{i=n+2}^{\infty} \lambda_i < \Delta \sum_{n+1}^{\infty} \lambda_i$, da cui ricaviamo che

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(g_i - \omega)(x) < \alpha\left(1 - \theta\sum_{n+1}^{\infty} \lambda_i\right) + (\alpha\theta - 2\Delta)\lambda_{n+1} + 2\Delta\sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i =$$

$$\alpha - (\alpha\theta - 2\Delta)\sum_{n+2}^{\infty} \lambda_i < \alpha.$$

Siccome $\|\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(g_i - \omega)\| = \alpha$, abbiamo la conclusione.
Di nuovo, l'implicazione *4.* $\Rightarrow$ *1.* è di carattere generale ed è stata già provata. □

Il caso localmente convesso

Il teorema nella sua massima generalità, così come è stato enunciato nell'introduzione al presente capitolo, può essere ricavato senza difficoltà eccessive, riconducendosi all'analogo risultato per gli spazi di Banach.

[4]Uno spazio di Banach X, i cui sottospazi separabili sono riflessivi, è riflessivo grazie al teorema di *Eberlein-Smulian*; consultare, ad esempio l'appendice corrispondente.

Sia E uno spazio localmente convesso e $C \subset E$ un insieme *limitato*. Poniamo $S_C(f) \doteq \sup\{f(x) : x \in C\}$, dove $f \in E^*$.
Il primo passo consiste nel dimostrare il teorema per gli insiemi separabili; in tal caso si ottiene il risultato seguente.

Teorema 4.3.3. *Sia E uno spazio localmente convesso* completo *e $C \subset E$ un sottoinsieme limitato, $\sigma(E, E^*)$-chiuso e* separabile. *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *C non è $\sigma(E, E^*)$-compatto.*

2. *Esite $\theta \in (0, 1)$ ed una successione $\{f_n\} \subset E^*$ equicontinua tale che*

$$S_C(|f|) \geq \theta \quad \textit{per ogni } f \in \textit{conv}\{f_n\}$$

e $lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ per ogni $x \in C$.

3. *Esiste $\theta \in (0, 1)$ tale che, se $\{\lambda_i\}$ è una successione di numeri reali positivi con $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1$, allora esiste $\alpha \geq \theta$ ed una successione $\{g_i\} \subset E^*$ equicontinua tale che $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$ per ogni $x \in C$ e*

$$S_C\left(|\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i g_i|\right) = \alpha$$

ed è soddisfatta per ogni n la disuguaglianza

$$S_C\left(|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i|\right) < \alpha\left(1 - \theta \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i\right)$$

4. *Esiste un funzionale lineare continuo, che non raggiunge il suo sup su C.*

Dimostrazione. Se E è uno spazio localmente convesso, esiste una famiglia di spazi di Banach $\{X_\alpha\}$ tale che E è isomorfo ad un sottospazio *chiuso* del prodotto di Tychonoff $\prod_\alpha X_\alpha$. Per vedere ciò, basta considerare una base $\{p_\alpha\}$ di seminorme e definire $Y_\alpha \doteq E/N_\alpha$, dove $N_\alpha = \{x \in E : p_\alpha(x) = 0\}$, munito della norma $\|\cdot\|_\alpha$ data da $\|[x]_\alpha\|_\alpha = p_\alpha(x)$ per ogni $x \in E$; X_α è dunque il completamento di Y_α rispetto alla norma $\|\cdot\|_\alpha$.
Sia $i : E \to \prod_\alpha X_\alpha$ la mappa lineare data da $i(x)(\alpha) = [x]_\alpha$ per ogni α e per ogni $x \in E$. La mappa i è iniettiva, poichè $i(x) = 0$ implica $p_\alpha(x) = 0$ per ogni α, sicchè $x = 0$. Inoltre, come è immediato riconoscere, trattasi di un omeomorfismo. Questo significa che $i(E)$ è completo e, perciò, è un sottospazio chiuso del prodotto $\prod_\alpha X_\alpha$; quale convesso, infine, è un chiuso della topologia debole nel prodotto degli X_α.
Sia ora $C \subset E$ un sottoinsieme limitato e sia $C_\alpha \in X_\alpha$ la sua immagine mediante la proiezione canonica di E sul quoziente X_α. Indichiamo con $\mathrm{wcl}(C_\alpha) \subset X_\alpha$ la chiusura debole di C_α.

Se $\mathrm{wcl}(C_\alpha)$ e debolmente compatto per ogni α, allora $\prod_\alpha \mathrm{wcl}(C_\alpha)$ è compatto nella topologia prodotto (X_α è pensato munito della topologia debole), grazie al teorema di Tychonoff. Ciò implica che C è debolmente compatto, poichè C è debolmente chiuso in E e $i(E)$ è debolmente chiuso in $\prod_\alpha X_\alpha$. Avendo assunto per ipotesi che C non è debolmente compatto, deve esitere un indice α tale che $\mathrm{wcl}(C_\alpha)$ *non* è debolmente compatta in X_α. Osserviamo pure che, siccome $\mathrm{wcl}(C_\alpha) \subset \mathrm{cl}(\mathrm{conv}(C_\alpha))$, $\mathrm{wcl}(C_\alpha)$ è separabile nella topologia della norma.
Grazie all'argomento appena presentato siamo ricondotti al caso di un sottoinsieme *separabile* $C \subset X$, limitato in norma e debolmente chiuso, dove X è uno spazio di Banach. Sia $Y \subset X$ il sottospazio chiuso (separabile) generato da C. Definiamo Z come lo spazio normato costituito dai funzionali lineari e continui f su Y con norma data da $S_C(|f|)$. Se $M \doteq \sup\{\|x\| : x \in C\}$, si ha $S_C(|f|) \leq M\|f\|$ per ogni $f \in Y^*$, in modo che l'inclusione $Z \subset Y^*$ è continua, da cui ricaviamo che si ha un'iniezione continua $Z^* \subset Y^{**}$.
Consideriamo ora $j(C) \subset Y^{*}{*}$. In realtà si ha l'inclusione $j(C) \subset Z^*$, infatti:

$$|\langle j(x), f\rangle| = |f(x)| \leq S_C(f)$$

per ogni $f \in Z = Y^*$ e per ogni $x \in C$, che mostra che si ha $j(C) \subset Z^*_1$. Ora osserviamo che la $\sigma(X, X^*)$-topologia e la $\sigma(Y, Y^*)$ topologia coincidono su C (grazie al teorema di Hanh-Banach), mentre su $j(C)$ coincidono la $\sigma(Y{*}{*}, Y{*})$ topologia e la $\sigma(Z^*, Z)$-topologia. Siccome C non è $\sigma(Y, Y^*)$- compatto, l'inclusione $j(C) \subset Z^*_1$ deve essere stretta, visto che Z^*_1 è *-debolmente compatto (grazie al teorema di Banach-Alaoglu) e C e $j(C)$ sono omeomorfi. Se ne ricava che esiste $F \in Z^*_1$ tale che $F \notin j(C)$. Siccome Y è completo, $j(Y) \subset Y{*}{*}$ è chiuso, cosicchè esiste $\Delta > 0$ tale che $d(F, j(Y)) > \Delta$.
Sia ora $\{x_n\} \subset C$ una successione densa. Applicando il lemma di Helly, ricaviamo che esiste una successione $\{f_n\} \subset X^*$ tale che $\|f_n\| \leq 1$, $F(f_n) = \Delta$ e $f_n(x_i) = 0$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$, chè è proprio la condizione *2.*.
2 $\Rightarrow$ *3.* si dimostra come nei precedenti, sostituendo $\|\cdot\|$ con $S_C(|\cdot|)$ e sfruttando l'equicontinuità degli $\{f_n\}$ e la limitatezza di C.
3. $\Rightarrow$ *4.* si ottiene alla stessa maniera dei risutati precedenti.
4. $\Rightarrow$ *1.* è un'ovvia conseguenza del teorema di Weierstrass. □

Rimuovendo l'ipotesi di separabilità, il teorema prende la forma seguente:

Teorema 4.3.4. *Sia E uno spazio localmente convesso* completo. *Se $C \subset E$ è un sottoinsieme limitato debolmente chiuso, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *C non è debolmente compatto.*
2. *Esiste $\theta \in (0, 1)$, un sottoinsieme $C_0 \subset C$ e una successione $\{f_n\} \subset E^*$ equicontinua tali che*

$$S_C(|f - \omega|) \geq \theta \quad \textit{se } f \in \mathit{conv}\{f_n\} \textit{ e } \omega \in C_0^\perp$$

e $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ *se* $x \in C_0$.

3. *Esiste* $\theta \in (0,1)$ *tale che, se* $\{\lambda_i\}$ *è una successione di numeri reali positivi con* $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1$, *esistono* $\alpha > 0$ *e una successione* $\{g_i\}$ *equicontinua tali che*

$$S_C\left(|\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(g_i - \omega)|\right) = \alpha \quad e\, S_C\left(|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(g_i - \omega)|\right) < \alpha\left(1 - \theta \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i\right)$$

per ogni n *e per ogni* $\omega \in L\{g_i\}$.

4. *Esiste un funzionale lineare continuo, che non raggiunge il sup su* C.

Dimostrazione. *1.* $\Rightarrow$ *2.* Grazie alla forma generale del teorema di *Eberlein-Smulian*, un sottoinsieme $C \subset E$ limitato è debolmente compatto se e solo se è numerabimente compatto nella $\sigma(E, E^*)$-topologia.
Pertanto, se C non è debolmente compatto, esiste un suo sottoinsieme $C_0 \subset C$ *separabile* che non è debolmente compatto.Applicando il teorema precedente all'insieme C_0 si ottiene facilmente la condizione 2.
La catena di implicazioni 2. $\Rightarrow$ *3.* $\Rightarrow$ 4 può essere dimostrata esattamente come nel caso degli spazi di Banach, sostituendo $\|\cdot\|$ con $S_C(|\cdot|)$ e X_1 (la palla unità di X) con C, osservando che, se θ, C_0, C e $\{f_n\}$ sono quelli descritti in 2., allora $\omega \in L\{f_n\}$ implica $\omega \in C_0^{\perp}$.
L'implicazione *4.* $\Rightarrow$ *1.* è nuovamente ovvia conseguenza del teorema di Weierstrass. □

4.4 Subriflessività

La caratterizzazione della riflessività data da James, oltre ad essere un risultato praticamente definitivo in merito alla questione, ha avuto il pregio di aprire interessanti temi di ricerca; alcuuni lavori di Bishop e Phelps, in particolare, ispirati dalle idee di James, hanno risolto alcune questioni fondamentali appartenenti alla teoria degli spazi di Banach, aprendone contemporaneamente di nuove.
In questa breve sezione vogliamo proprio presentare, senza entrare nei dettagli delle dimostrazioni, alcuni di quei risultati cui ci riferivamo.
Sia X uno spazio di Banach. Un funzionale $\varphi \in X^*$ si dice *norm-attaining* se esiste $x \in X_1 = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ tale che $\|\varphi\| = \varphi(x)$. Sussiste la seguente definizione dovuta a Phelps [37]:

Definizione 4.4.1 (Subriflessività)**.** *Uno spazio normato X si dice* subriflessivo *se l'insieme dei funzionali norm-attaining di* X^* *è denso (in norma) in* X^*.

La definizione appena data ha senso, perchè è possibile esibire esempi di spazi normati (incompleti) che non ne verificano il contenuto.
Qui sotto riportiamo un notevole controesempio, che gli stessi Bishop e

Phelps in [5] attribuiscono a Katznelson.

Sia $X \subset C[0,1]$ lo spazio dei polinomi, pensati come funzioni continue sull'intervallo chiuso e limitato $[0,1]$, munito della norma uniforme. Siccome X è denso in $C[0,1]$ (grazie al classico teorema di approssimazione di Weierstrass), X^* si identifica naturalmente a $C[0,1]^* = \mathcal{M}[0,1]$ (misure boreliane finite su $[0,1]$).
Sia p un polinomio costante in $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$, in modo che p è identicamente uguale a 1 ovvero -1. Sia $\mu \in X^*$ tale che $|\mu(p)| = \|u\|$. Scrivendo la decomposizione di Hanh di $\mu = \mu_+ - \mu_-$, abbiamo $\|\mu\| = \mu_+([0,1]) + \mu_-([0,1])$. Abbiamo

$$|\mu([0,1])| = |\mu_+([0,1]) - \mu_-([0,1])| = \left| \int_{[0,1]} p \mathrm{d}\mu \right| = \|\mu\| = \mu_+([0,1]) + \mu_-([0,1])$$

da cui $\mu_+ = 0$ 0 $\mu_- = 0$, cioè μ deve essere una misura o positiva o negativa.
Supponiamo, invece, che μ raggiunga la norma su un polinomio non costante $p \in S_X$. Sia $F \subset [0,1]$ il sottoinsieme (chiuso) dove $|p|$ vale 1. Vogliamo mostrare che $|\mu|(F^c) = 0$. Supponiamo che sia $|\mu|(F^c) > 0$, allora

$$\|\mu\| = \left| \int_{[0,1]} p \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_{[0,1]} |p| \mathrm{d}|\mu| = \int_{F^c} |p| \mathrm{d}|\mu| + \int_F |p| \mathrm{d}|\mu| < \int_{F^c} \mathrm{d}|\mu| + \int_F \mathrm{d}|\mu| = \|\mu\|$$

che è assurdo. Siccome F è un insieme finito, p essendo un polinomio, ne segue che μ è una misura finitamente supportata.
Gli elementi *norm-attaining* di X^* sono dunque le misure positive, le misure negative e le misure finitamente supportate.
Sia, ora, λ la misura di Lebesgue su $[0,1]$ e $\mu_0 \in X^*$ dato da

$$\mu_0(A) = \lambda\left(A \cap \left[0, \frac{1}{2}\right]\right) - \lambda\left(A \cap \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$$

per ogni sottoinsieme boreliano $A \subset [0,1]$. Evidentemente si ha $\|\mu_0\| = 1$. Se ora μ è una misura di segno definito, riesce $\|\mu - \mu_0\| = \|\mu\| + \|\mu_0\| \geq 1$. Se, infine, μ è una misura a supporto finito, si ha $\|\mu - \mu_0\| \geq \frac{1}{2}$; ne segue che i funzionali norm-attaining *non* sono densi in X^*.

La patologia mostrata nell'esempio precedente è unicamente imputabile alla non completezza dello spazio in questione, infatti vale il risultato seguente:

Teorema 4.4.1 (Bishop-Phelps [4]). *Gli spazi di Banach sono subriflessivi.*

Per una trattazione esaustiva dei risultati di Bishop e Phelps, tra cui il teorema appena citato, rimandiamo al libro di Megginson [30].

4.5 Alcune considerazioni

In questa sezione conclusiva raccogliamo qualche considerazione attorno agli spazi riflessivi, per enuclearne una nuova possibile caratterizzazione.
Se X è uno spazio riflessivo, la topologia debole* sul duale X^* coincide con la topologia debole su X^* come spazio di Banach, poichè $X^{**} \cong X$ (attraverso l'iniezione canonica). Ciò significa che, se un sottospazio $M \subset X^*$ *-debolmente denso (totale), allora esso è debolmente denso, ossia è denso nella topologia della norma, cosicchè la sua palla unità M_1 è densa in norma in X_1^* e, a fortiori, essa è *-debolmente densa nella palla unità di X^*.
Tale circostanza appare, in certo senso, molto caratteristica di tali spazi, perchè non è troppo difficile esibire esempi di spazi non riflessivi X, muniti di un sottospazio *totale* $M \subset X^*$, la cui palla unità non è *-debolmente densa in X_1^*. Ad un primo esempio di questo tipo, premettiamo un semplice risultato.

Lemma 4.5.1. *Sia X uno spazio normato e $M \subset X^*$ un sottospazio del suo duale. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *M_1 è *-debolmente densa in X_1^*.*
2. *M norma X, cioè, dato $x \in X$, riesce $\|x\| = \sup_{\varphi \in M_1} |\varphi(x)|$.*

Dimostrazione. 1. $\Rightarrow$ 2. Sia $x \in X$. Per il teorema di Hanh-Banach esiste $\eta \in X_1^*$ tale che $\|x\| = \eta(x)$. Sia $\{\varphi_\alpha\} \subset M_1$ una rete *-debolmente convergente a η, in modo che $\varphi_\alpha(x) \xrightarrow{\alpha} \eta(x)$, da cui ricaviamo che

$$\sup_{\varphi \in M_1} |\varphi(x)| \geq \lim_\alpha |\varphi_\alpha(x)| = |\eta(x)| = \|x\|$$

che dimostra l'asserzione, la disuguaglianza $\sup_{\varphi \in M_1} |\varphi(x)| \leq \|x\|$ essendo ovvia.
2. $\Rightarrow$ *1.* Si tratta di un'applicazione del teorema del bipolare applicato alla coppia duale (X^*, X). Se, infatti, M norma X, si ha $M_1^\circ = X_1$, cosicchè $M_1^{\circ\circ} = X_1^*$, ciò che conclude la prova. □

Ora possiamo presentare il semplice controesempio cui accennavamo.

Esempio 4.5.1. Sia X lo spazio delle funzioni continue sull'intervallo chiuso e limitato $[0, 1]$, munito della norma $\|f\| = |f(0)| + \int_{[0,1]} |f(x)| dx$. Sia M lo spazio delle funzioni continue in $[0, 1]$ tali che *suppg* $\subset [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ per qualche $0 < \varepsilon < 1$, munito della norma uniforme. Verifichiamo che M si immerge *isometricamente* in X^*, attraverso la mappa $\Phi : M \to X^*$ data da $\langle \Phi(g), f \rangle = \int_{[0,1]} g(x)f(x) dx$ per ogni $f \in X$. Evidentemente si ha $\|\Phi(g)\| \leq \|g\|_\infty$ per ogni $g \in M$. Verifichiamo che si ha $\|\Phi(g)\| = \|g\|_\infty$. Sia $x_0 \in (0, 1)$ tale che

$\|g\|_\infty = |g(x_0)|$. Non è restrittivo supporre che $|g(x_0)| = g(x_0)$. Sia $\{f_n\} \subset X$ una successione tale che:

(a) $f_n > 0$ per ogni n
(b) $\int_{[0,1]} f_n = 1$ per ogni n
(c) $supp\, f_n \subset \left[x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right]$ per ogni n

Dalla (c) si ha che $f_n(x_0) = 0$ definitivamente, cosicchè $\|f_n\| = 1$ definitivamente. Siccome $\langle \Phi(g), f_n \rangle \to g(x_0)$, abbiamo che $\|\Phi(g)\| \geq \|g\|_\infty$.
Si verifica immediatamente che M è totale, tuttavia non norma X, infatti:

$$\sup_{g \in M_1} |\langle \Phi(g), f \rangle| = \int_{[0,1]} |f(x)| \mathrm{d}x = \|f\| - |f(0)| \quad \text{per ogni } f \in X$$

Se $f \in X$ è una funzione con $f(0) \neq 0$, si ha, dunque, $\sup_{g \in M_1} |\langle \Phi(g), f \rangle| < \|f\|$; ciò mostra che $M \subset X^*$ è un sottospazio che non norma X.

In effetti, l'aspetto patologico dell'esempio precedente è da imputarsi non già al fatto che tale spazio non sia riflessivo, quanto piuttosto al fatto che esso non sia nemmeno *completo*; vale, infatti, la seguente proposizione, dovuta all'autore:

Proposizione 4.5.1. *Se X è uno spazio normato tale che ogni sottospazio $M \subset X^*$ totale norma X, allora X è* completo.

Dimostrazione. Sia $\{x_n\} \subset X$ una successione di Cauchy. Sia $j : X \to X^{**}$ l'iniezione canonica di X nel suo biduale. Siccome j è isometrica, $\{j(x_n)\} \subset X^{**}$ è una successione di Cauchy, pertanto esiste $F \in X^{**}$ tale che

$$\|F - j(x_n)\| \to 0$$

Se F è una forma lineare *-debolmente continua, allora esiste $x \in X$ tale che $F = j(x)$, cosicchè $\|x - x_n\| \to 0$. Supponiamo, invece, che F non sia *-debolmente continua. Allora $M \doteq KerF \subset X^*$ è un sottospazio *-debolmente denso (totale), pertanto M_1 è *-debolmente denso in X_1^*. Dato $\varepsilon > 0$, esiste n_ε tale che

$$\|F - j(x_{n_\varepsilon})\| < \varepsilon$$

cioè

$$|F(\varphi) - \varphi(x_{n_\varepsilon})| < \varepsilon \quad \text{per ogni } \varphi \in X_1^* \tag{4.4}$$

Sia ora $\varphi_0 \in X_1^*$ tale che $\varphi_0(x_{n_\varepsilon}) = \|x_{n_\varepsilon}\|$ Siccome l'inclusione $M_1 \subset X_1^*$ è densa per la topologia *-debole, esite $\eta \in M_1$ tale che $|\eta(x_{n_\varepsilon}) - \varphi_0(x_{n_\varepsilon})| < \varepsilon$. applicando la 4.4, otteniamo che $|\eta(x_{n_\varepsilon})| < \varepsilon$, da cui

$$\|x_{n_\varepsilon}\| = \varphi_0(x_{n_\varepsilon}) < \eta(x_{n_\varepsilon}) + \varepsilon < 2\varepsilon$$

La successione $\{x_n\}$ ammette, dunque, una sottosuccessione convergente a 0, pertanto essa stessa converge a 0, essendo una successione di Cauchy. Ciò conclude la prova. □

Il risultato precedente mostra il suo interesse nel collegare due nozioni apparentemente distanti: la *completezza* di X e la proprietà di passaggio dal globale al locale (sugli insiemi limitati, approssimando con reti parimenti *limitate*) per la densità dei sottospazi del duale X^* di X.
A questo punto è bene segnalare che esistono esempi di spazi di Banach X, muniti di un sottospazio totale $M \subset X^*$, la cui palla unità non è *-debolmente densa in X^*_1. Più precisamente è possibile fornire esempi di spazi di Banach X, muniti di un sottospazio $M \subset X^*$ totale, con *caratteristica* zero, nel senso della seguente definizione dovuta a Dixmier.

Definizione 4.5.1 (caratteristica si un sottospazio)**.** *Sia X uno spazio di Banach e $M \subset X^*$ un sottospazio. La caratteristica di M è il numero reale*

$$\inf_{x \in X : x \neq 0} \left\{ \sup \frac{|\varphi(x)|}{||x||} : \varphi \in M_1 \right\}$$

dove M_1è la palla unità di M.

Esplicitando la definizione appena data, un sottospazio $M \subset X^*$ ha caratteristica nulla se e solo se M_1 non è densa in X^*_r per ogni $0 < r \leq 1$. In [50] viene fornita una procedura generale per costruire sottospazi totali di $L^\infty(\mathbb{R})$ a caratteristica nulla, semplificando la costruzione di un controesempio di un tale sottospazio di l_∞, dovuto a Dixmier , *cfr.* [10].
Tutte queste costruzioni hanno, purtroppo, il difetto di essere involute e poco dirette; per questo motivo vogliamo presentare un esempio diretto di un sottospazio totale caratteristica strettamente minore di uno, seppur non nulla.

Esempio 4.5.2. Consideriamo lo spazio di Banach c_0 delle successioni convergenti a 0, munito della norma del sup. Come è ben noto, vale l'isomorfismo isometrico $c_0^* \cong l_1$, dove l_1 è lo spazio delle successioni assolutamente sommabili, che è espresso dalla corrispondenza $l_1 \ni a \to \varphi_a \in c_0^*$ con $\varphi_a(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ per ogni $x \in c_0$.
Sia ora $M \subset l_1$ il sottospazio delle successioni a tali che $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 0$. Vogliamo provare che M è totale e che ha caratteristica pari a $\frac{1}{2}$.
Sia $x \in c_0$ tale che $\varphi_a(x) = 0$ per ogni $a \in l_1$. Allora deve essere

$$x_{n+1} - x_n = 0 \quad \text{per ogni}\, n \geq 1$$

da cui segue che $x = \{x_n\}$ è una successione costante. Siccome x converge a zero, deve essere $x = 0$; ciò mostra che M è totale, *i.e* *-debolmente denso in l_1.

Consideriamo ora $e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0, 0, \ldots) \in c_0$. Si ha $\varphi_a(e_1) = a_1$ per ogni $a \in l_1$. Se ora $a \in M$, abbiamo

$$a_1 = -\sum_{k=2}^{\infty} a_k$$

da cui $|a_1| \leq \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| = \|a\|_1 - |a_1|$, cosicché $|a_1| \leq \frac{\|a\|_1}{2}$. Se ne ricava, pertanto, che vale l'uguaglianza

$$\sup_{a \in M_1} |\varphi_a(e_1)| = \frac{1}{2}$$

Ciò mostra che la caratteristica di M non supera $\frac{1}{2}$. In effetti essa è proprio pari a $\frac{1}{2}$. Sia, infatti, $x \in c_0$ esia $k \in \mathbb{N}$ tale che $\|x\| = |x_k|$. Dato $\varepsilon > 0$, esiste n_ε tale che $|x_{n_\varepsilon}| < 2\varepsilon$. Sia ora $a \in l_1$ tale che $a_k = \frac{|x_k|}{2x_k}$ e $x_n = -\frac{|x_k|}{2x_k}$, mentre $a_i = 0$ se $i \neq k, n$. Allora $\|a\|_1 = 1$ e $|\varphi_a(x)| \geq \frac{\|x\|}{2} - \varepsilon$; se ne ricava che

$$\sup_{a \in M_1} |\varphi_a(x)| \geq \frac{\|x\|}{2}$$

L'ultima disuguaglianza mostra che la caratteristica di M è $\frac{1}{2}$. Vogliamo anche osservare che l'esempio è particolarmente patologico per il fatto che M è un sottospazio chiuso in norma di codimensione 1.

La possibilità di esibire sottospazi con tali patologie (caratteristica nulla) è conseguenza di un risultato, che, in certo senso, è definitivo. Il teorema cui ci riferiamo è il seguente:

Teorema 4.5.1 (I. M. Ostrovskii [33])**.** *Sia X uno spazio di Banach. Esiste un sottospazio totale $M \subset X^*$ a caratteristica nulla, se e solo se X non è* quasi-riflessivo.

Per un'adeguata comprensione dell'enunciato, ricordiamo che uno spazio di Banach X si dice quasi-riflessivo se lo spazio quoziente $X^{**}/j(X)$ ha dimensione finita, $j(X) \subset X^{**}$ essendo l'immagine di X mediante l'iniezione canonica di X nel suo biduale.
Il risultato precedente sembra incoraggiare la formulazione della seguente congettura:

Congettura 1. *Se X uno spazio normato, in cui ogni sottospazio totale $M \subset X^*$ ha caratteristica pari a* 1*, allora X è riflessivo.*

Sebbene l'enunciato sia intuitivo, non ci sembra facile dimostrare l'asserzione nè smentirla, fornendo un esempio di spazio non riflessivo con la proprietà descritta. Sicuramente è verificata, invece, la seguente proposizione:

Proposizione 4.5.2. *Uno spazio normato X, tale che ogni sottospazio totale $M \subset X^*$ è denso in norma, è riflessivo.*

Dimostrazione. Sia $F \in X^{**}/j(X)$, allora $\mathrm{Ker}F$ è totale, perciò è denso in norma, cosicche $F = 0$, giacchè F è continuo per la topologia della norma. Ciò mostra che $X^{**} = j(X)$. □

Vale il seguente risultato, dove P è la proprietà "$M \subset X^*$ è totale $\Rightarrow M$ ha caratteristica 1".

Lemma 4.5.2. *Sia X uno spazio di Banach che soddisfa P. Se $Y \subset X$ è un sottospazio chiuso munito di* complementare topologico*, allora Y soddisfa ancora la proprietà P.*

Dimostrazione. Sia $M \subset Y^*$ un sottospazio totale. Sia $Z \subset X$ un complementare topologico di X. Definiamo

$$N \doteq \{\varphi \oplus \eta : \varphi \in M, \eta \in Z^*\}$$

dove $(\varphi \oplus \eta)(y+z) = \varphi(y) + \eta(z)$ per ogni $y \in Y$ e per ogni $z \in Z$. Osserviamo che $N \subset X^*$, cioè che $\varphi \oplus \eta$ è limitato, infatti $|(\varphi \oplus \eta)(y+z)| \leq |\varphi(y)| + |\eta(z)| \leq C||y+z||$ con $C = \alpha \max\{||\varphi||, ||\eta||\}$, dove $\alpha > 0$ è un numero reale tale che $||y|| + ||z|| \leq \alpha||y+z||$ per ogni $y \in Y$, per ogni $z \in Z$ (un tale α esiste, perchè Z è un complementare topologico).
Evidentemente N è un sottospazio; inoltre è totale. Sia $x \in X$ tale che $\omega(x) = 0$ per ogni $\omega \in N$. Scriviamo $x = y + z$ per due opportuni (e unici) $y \in Y$ e $z \in Z$, in modo che $\varphi(y) + \eta(z) = 0$ per ogni $\varphi \in M$ e per ogni $\eta \in Z^*$. Sia $\eta_0 \in Z^*$ tale che $\eta_0(z) = 0$, allora $\varphi(y) = 0$ per ogni $\varphi \in M$, sicchè $y = 0$ (M è totale), da cui $z = y = 0$, cioè $x = 0$. Siccome in X vale la proprietà P, ne segue che N norma X; in particolare se $y \in Y$, abbiamo:

$$||y|| = \sup_{\omega \in N_1} |\omega(y)| \leq \sup_{\varphi \in M_1} |\varphi(y)| \leq ||y||$$

ciò che conclude la prova. □

Va segnalato che, invece, si incontrano notevoli difficoltà tecniche, quando si cerca di provare che P è stabile per passaggio a somme dirette (di tipo l_2!) di spazi che posseggono la proprietà P.

Capitolo 5

Caratterizzazioni di spazi di Banach duali

Un problema molto interessante è quello di riconoscere se uno spazio di Banach X sia o meno un duale, cioè se esista o meno uno spazio di Banach Y, tale che valga l'isomorfismo isometrico $Y^* \cong X$. Nel caso in cui un tale spazio esista, si dice anche che Y è un *preduale*. Occorre subito osservare che, in generale, non si ha unicità del preduale, nel senso che non è difficile esibire due spazi di Banach non isomorfi, i cui duali, invece, sono isometricamente isomorfi. Un esempio tipico si ha considerando gli spazi di successioni c_0 e c, i cui duali sono entrambi isometricamente isomorfi allo spazio l_1. Ciononostante, c_0 e c non sono isometricamente isomorfi (pur essendo linearmente isomorfi). Per convincersi di quest'ultima affermazione, basta osservare che la palla unità di c_0 è scevra di punti estremali, non così per la palla unità di c[1].
Caratteristica fondamentale degli spazi di Banach duali è l'esistenza di una topologia localmente convessa (la topologia*-debole), rispetto alla quale la palla unità di tali spazi è compatta (teorema di Banach-Alaoglu). Questa circostanza assicura l'abbondanza di punti estremali per la palla unità degli spazi duali, grazie al teorema di Krein-Milman. Per escludere l'esistenza di un preduale basta verificare, quindi, che la palla unità dello spazio di Banach in questione è povera di punti estremali, quando non ne sia addirittura sprovvista. Un esempio tipico è dato dallo spazio $C(X)$ delle funzioni continue (a valori reali) su uno spazio topologico compatto e connesso X, munito della norma uniforme. Si riconosce molto facilmente che $C(X)_1$ possiede soltanto due punti estremali, dati dalle funzioni costanti $f_1 = 1$ e $f_2 = -1$. Se ne conclude che, sotto l'ipotesi di connessione, $C(X)$ non è uno

[1]Sia $x \in c_0$ e sia N tale che $|x(n)| < \frac{1}{2}$ per ogni $n \geq N$. Definiamo $y_1, y_2 \in c_0$ ponendo $y_1(n) = y_2(n) = x(n)$ per ogni $n \leq N$, mentre $y_1(n) = x(n) + 2^{-n}$ e $y_2(n) = x(n) - 2^{-n}$ per ogni $n > N$. Evidentemente, riesce $x = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ e $\|y_i\| = 1$ per $i = 1, 2$.
Quindi la palla unità di c_0 non ha punti estremali.
L'elemento $e = (1, 1, 1, \dots) \in c$ è, invece, un punto estremale, come è immediato riconoscere.

spazio duale[2].

In questo capitolo presentiamo una nostra caratterizzazione degli spazi di Banach duali, fornendo condizioni necessarie e sufficienti affinchè uno spazio di Banach X ammetta preduale. Daremo anche qualche cenno al problema, ben più difficile, dell'*unicità* del preduale, che nel contesto generale degli spazi di Banach sembra essere di soluzione assai riposta, non essendo noti teoremi generali. Occorre segnalare sin da ora che tale problema trova, invece, una risposta elegante quanto soddisfacente nel quadro delle C*-algebre, dove vige il celebre teorema di Sakai:

Teorema 5.0.2 (Sakai [41])**.** *Una C*-algebra $\mathfrak{A}$ è uno spazio duale se e solo se esiste una rappresentazione fedele $\pi : \mathfrak{A} \to \mathcal{B}(H)$, tale che $\pi(\mathfrak{A}) \subset \mathcal{B}(H)$ è un'algebra di von Neumann. In tal caso, il preduale di $\mathfrak{A}$ è unico a meno di isomorfismi isometrici.*

Per una dimostrazione più moderna del teorema, è possibile consultare [48] oppure [35].

Un secondo risultato notevole sull'unicità dei preduali che merita di essere citato è il seguente:

Teorema 5.0.3 (Ito, [14])**.** *Sia $\mathfrak{R}$ un algebra di von Neumann e $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{R}$ un sottospazio ultradebolmente chiuso. Allora $\mathfrak{R}/\mathfrak{M}$ munito della norma quoziente è uno spazio duale con preduale unico (a meno di isomorfismi isometrici).*

5.1 La caratterizzazione

Molti fra i risultati già noti esprimono condizioni necessarie e sufficienti affinché uno spazio di Banach sia un duale, richiedendo la compattezza della sua palle unità rispetto a topologie localmente convesse opportunamente introdotte. Soddisfacenti da un punto di vista teorico, tali risultati si mostrano, però, poveri di applicazioni più concrete, perchè la verifica della compattezza nei contesti infinito-dimensionali è di norma un compito non banale. Sfruttando la caratterizzazione della compattezza debole data da James, così come è stata esposta nel capitolo precedente, cercheremo di ovviare a tale difficoltà tecnica, rimandando alla *completezza* della topologia di Mackey per opportune coppie duali.
Iniziamo ad esporre la nostra analisi, osservando preliminarmente che, se X è uno spazio di Banach duale, allora X^* contiene copie isometriche di tutti i suoi preduali. Più precisamente, sussiste il seguente risultato:

[2] In effetti è noto molto di più: $C(X)$ è uno spazio duale se e solo se X è uno spazio *iperstoniano*. Consultare [48]

Lemma 5.1.1. *Sia X uno spazio di Banach, che ammette un preduale M. Allora esiste un'immersione isometrica $i : M \to X^*$ tale che $i(M)$ è un sottospazio a caratteristica* 1*, i cui funzionali sono* norm-attaining*.*

Dimostrazione. Sia $\Phi : X \to M^*$ un isomorfismo isometrico. Trasponendo otteniamo un isomorfismo isometrico $\Phi^* : M^{**} \to X^*$. Sia $i : M \to X^*$ la mappa data dalla composizione $i = \Phi^* \circ j$, dove j è l'iniezione canonica di M nel suo biduale M^{**}. Evidentemente i immerge M isometricamente in X^*. Vogliamo provare che $i(M) \subset X^*$ è un sottospazio a caratteristica 1. Sia, infatti, $x \in X$, allora $\|x\| = \|\Phi(x)\| = \sup_{m \in M_1} |\langle \Phi(x), m\rangle| = \sup_{m \in M_1} |\langle x, \Phi^*(m)\rangle| = \sup_{m \in M_1} |\langle j(\Phi^*(m)), x\rangle| = \sup_{m \in M_1} |\langle i(m), x\rangle|$. Inoltre i funzionali di $i(M)$ sono *norm-attaining*. $\|i(m)\| = \|m\| = \langle \varphi, m\rangle$ per qualche $\varphi \in M_1^*$. Siccome Φ è suriettivo, esiste $x \in X_1$ tale che $\varphi = \Phi(x)$, cosicchè $\|i(m)\| = \langle \Phi(x), m\rangle = \langle x, \Phi^*(m)\rangle = \langle i(m), x\rangle$, che è proprio quanto volevamo verificare. □

Purtroppo il lemma precedente esprime soltanto condizioni necessarie , nel senso che un sottospazio chiuso in norma $M \subset X^*$, i cui funzionali siano *norm-attaining*, non è giocoforza un preduale, come si è gia dimostrato nel nostro controesempio contenuto nel capitolo precedente.
Il motivo è che le condizioni esposte non catturano alcuni aspetti fondamentali degli spazi di Banach duali, che riguardano le proprietà di (quasi)-completezza della topologia *-debole. I risultati cui ci riferiamo sono i seguenti:

Proposizione 5.1.1. *Sia X uno spazio di Banach. X^* munito della topologia $\sigma(X^*, X)$ è uno spazio localmente convesso* quasi-completo*.*

Dimostrazione. Se $A \subset X^*$ è un insieme limitato nella topologia*-debole, allora A è limitato in norma grazie al teorema di Banach-Steinhaus, X essendo completo. Sia, ora, $\{\varphi_i\} \subset X^*$ una rete *limitata* in norma, che è di Cauchy per la topologia *-debole. Ciò significa che, per ogni $x \in X$, la rete numerica $\{\varphi_i(x)\}$ è di Cauchy, pertanto esiste $\varphi(x) \in \mathbb{C}$ tale che $\varphi_i(x) \to \varphi(x)$. Resta così definita un'applicazione $\varphi : X \to \mathbb{C}$ che è lineare per costruzione. Inoltre $\varphi \in X^*$, perchè $|\varphi(x)| \le \sup_i \|\varphi_i\|\|x\|$ per ogni $x \in X$. Ciò conclude la prova, essendo $\lim_i \varphi_i = \varphi$ nella topologia *-debole. □

Osservazione 5.1.1. Si può dimostrare che la topologia *-debole non è mai completa, se X è infinito-dimensionale. Vedere, ad esempio, [30].

Il prossimo risultato concerne la completezza della topologia di Mackey $\tau(X^*, X)$; a quanto ci consta non è stata osservata altrove o, comunque, adeguatamente sottolineata.

Proposizione 5.1.2. *Il duale X^* di uno spazio di Banach X, munito della topologia di Mackey $\tau(X^*, X)$ è uno spazio localmente convesso* completo*.*

Dimostrazione. Trattasi di un'applicazione del criterio di completezza di Grothendieck (*Cfr.* [53]). Per il teorema di Mackey-Arens il duale di X^* munito della topologia di Mackey è X stesso. Sia ora $\varphi : X \to \mathbb{C}$ una forma lineare che è continua sui sottoinsiemi equicontinui $A \subset X$, intendendo X^* munito della topologia $\tau(X^*, X)$. Dobbiamo mostrare che $\varphi \in X^*$, cioè che φ è continua in 0 per la topologia della norma. Sia $\{x_n\} \subset X$ una successione convergente in norma a 0, in modo che l'insieme $\{x_n\} \cup \{0\}$ è compatto per la topologia della norma; sia $K \subset X$ la chiusura dell'inviluppo convesso di tale insieme. Grazie a un classico teorema di Mazur (per la dimostrazione consultare [8]), K è un insieme compatto in norma; a fortiori esso è $\sigma(X, X^*)$-compatto. Ne risulta che $p_K : X^* \to \mathbb{C}$, data da $p_K(\eta) = \sup_{x \in K} |\eta(x)|$, è una seminorma di Mackey su X^*, pertanto K è equicontinuo, ma allora $\varphi(x_n) \to 0$, che è quanto volevamo mostrare. □

Prima di procedere è bene osservare che la topologia di Mackey $\tau(X^*, X)$ è strettamente meno fine della topologia della norma, a meno che X non sia uno spazio riflessivo[3]; il risultato di completezza ottenuto, pertanto, è non banale.

Se $\mathfrak{R}$ è un algebra di von Neumann, è possibile dimostrare [1] che la topologia di Mackey $\tau(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}_*)$ ($\mathfrak{R}_*$ essendo il preduale di $\mathfrak{R}$) è addirittura *pienamente completa* . Per una trattazione esaustiva ma coincisa degli spazi pienamente completi (o spazi di *Ptak*), rimandiamo alla classica monografia di Wilansky [53]; i primi studi sulla topologia di Mackey su W*-algebre, [42] e [43], sono dovuti essenzialmente a Sakai , il cui classico trattato [44] fornisce un'introduzione davvero esauriente alla teoria delle C*-algebre e delle algebre di von Neumann, da un punto di vista della dualità fra uno spazio di Banach e il suo duale.

La condizione necessaria espressa dal lemma 5.1.1 permette, comunque, di escludere che uno spazio di Banach ammetta preduale. Qui sotto una nostra applicazione:

Teorema 5.1.1. *Sia K uno spazio topologico compatto di Hausdorff (non connesso) e sia $X \subset C(K)$ un sottospazio separabile chiuso in norma tale che:*

1. *Per ogni insieme finito $E \subset K$ e per ogni funzione $g : E \to \mathbb{R}$, esiste $f \in X$ tale che $f \restriction_E = g$ e $f = 0$ su E^c.*

[3]Se X è uno spazio riflessivo, $\tau(X^*, X)$ è la topologia della norma: infatti X_1 è un convesso $\sigma(X, X^*)$-compatto, cosicchè la norma duale $\|\cdot\|$ è una seminorma di Mackey, perchè $\|\varphi\| = \sup_{x \in X_1} |\varphi(x)|$. Viceversa, se la topologia $\tau(X^*, X)$ coincide con quella della norma, X deve essere riflessivo: X_1^* è un intorno di 0 per la topologia $\tau(X^*, X)$, ne segue che esiste un insieme convesso $K \subset X$ debolmente compatto tale che $X_1^* = \{\varphi \in X^* : \sup_{x \in K} |\varphi(x)| \leq 1\}$, cioè $X_1^* = K^\circ$; se ne ricava che $X_1 = K^{\circ\circ} = K$ è debolmente compatta, dunque X è riflessivo per il teorema di Kakutani [7].

2. *supp$f$ è numerabile per ogni $f \in X$.*

allora X non ammette alcun preduale.

Dimostrazione. Sia $\{f_i : i \in \mathbb{N}\} \subset X$ una successione densa in X e sia $F \subset K$ l'insieme F_σ dato da $F \doteq \cup_i \mathrm{supp} f_i$. F è un insieme numerabile, quale unione numerabile di insiemi numerabili; inoltre, come è immediato verificare, $\mathrm{supp} f \subset F$ per ogni $f \in X$.
Riscriviamo F come $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$. Vogliamo mostrare che X^* è isometricamente isomorfo a l_1. A tal scopo sia $\varphi \in X^*$. Per il teorema di Hanh-Banach φ è la restrizione a X di un funzionale lineare continuo definito su $C(K)$. Per il teorema di Riez-Markov, esiste, dunque, una misura su K boreliana e finita μ, tale che $\varphi(f) = \int_K f \mathrm{d}\mu$ per ogni $f \in X$.
Poniamo $\lambda_i = \mu(\{x_i\})$, in modo che $\varphi(f) = \sum_i \lambda_i f(x_i)$ per ogni $f \in X$. Vogliamo mostrare che la successione $\lambda = \{\lambda_i : i \in \mathbb{N}\}$ è in l_1 e che $\|\varphi\| = \|\lambda\|_1 = \sum_i |\lambda_i|$.
Siccome φ è limitato, esiste $C > 0$ tale che $|\varphi(f)| \leq C\|f\|_\infty$ per ogni $f \in X$. Sia ora N un intero fissato e sia $f_N \in X$ la funzione data da $f(x_i) = \mathrm{sign}(\lambda_i)$ per ogni $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ e $f(x_i) = 0$ per ogni $i > N$. Allora, si ha:

$$\varphi(f_N) = \sum_{i=1}^{N} |\lambda_i| \leq C \tag{5.1}$$

perchè $\|f_N\|_\infty = 1$, prendendo il sup su N in 5.1 otteniamo $\sum_i |\lambda_i| \leq C$, cosicchè $\lambda \in l_1$ e $\|\varphi\| = \|\lambda\|_1$. Ciò permette di concludere che $X^* \cong l_1$, come s'era anticipato.
Per mostrare che X non ammette preduale, mostreremo che non vi sono sottospazi chiusi $M \subset l_1 \cong X^*$ a caratteristica 1, i cui funzionali sono *norm-attaining*.
Con queste intenzioni, cominciamo osservando che i funzionali norm-attaining (sulla palla unità si X) sono tutti funzionali rappresentati da successioni sommabili del tipo:

- $\lambda = \{\lambda_i : i \in \mathbb{N}\}$ con supporto finito.
- $\lambda = \{\lambda_i : i \in \mathbb{N}\}$ a segno definitivamente costante.

Infatti se $\lambda = \{\lambda_i : i \in \mathbb{N}\}$ non è del tipo descritto, esiste una sottosuccessione $\{\lambda_{i_k} : k \in \mathbb{N}\}$ i cui termini sono a termini alternati. Se $f \in X_1$ è tale che $\sum_i \lambda_i f(x_i) = \sum_i |\lambda_i|$ deve essere giocoforza $f(x_{i_k}) = \mathrm{sign}(\lambda_{i_k})$ per $k \in \mathbb{N}$, ma una tale f non può essere continua, perchè K è compatto.
I sottospazi $M \subset l_1$ norm-attaining, quindi, sono necessariamente del tipo:

- $M \subset l_F$, $l_F \subset l_1$ essendo il sottospazio delle successioni a supporto finito.
- $l_f + \mathbb{R}\lambda$, con $\lambda \in l_1$ a segno definitivamente costante.

Il teorema di *Baire*, tuttavia, implica che un sottospazio del primo tipo è finito-dimensionale (perchè contenuto in un sottospazio numerabilmente generato) e, dunque, non può essere nemmeno totale; un sottospazio del secondo tipo, invece, non può essere chiuso. Ciò conclude la prova. □

Osservazione 5.1.2. Il teorema precedente è una generalizzazione dell'analogo risultato per lo spazio c_0 delle successioni convergenti a zero. Infatti $c_0 \subset l_\infty = C_b(\mathbb{N}) \cong C(\beta\mathbb{N})$, ove $\beta\mathbb{N}$ è la compattificazione di Stone-Čech[4] di $\mathbb{N}$, soddisfa le ipotesi del teorema 5.1.1.
La dimostrazione che usualmente viene data per il caso di c_0 passa per il teorema di Krein-Milman, poichè la palla unità di c_0 è scevra di punti estremali. Questo elegante argomento, tuttavia, non si estende con facilità al caso più generale, così come è presentato nel teorema precedente.

Osservazione 5.1.3. Se K è iperstoniano (*cfr.* [48]), $C(K)$ è uno spazio duale; ne segue che X *non* può essere chiuso nella topologia *-debole, altrimenti sarebbe esso stesso uno spazio duale.

Osservazione 5.1.4. Un aspetto fondamentale della dimostrazione del precedente è che esibisce esempi di preduali di l_1, che in generale non sono (isometricamente isomorfi) a c_0.

Passiamo ora a presentare un primo risultato di eistenza dei preduali: si tratta di una generalizzazione di un teorema di Dixmier [10]. Daremo una prova, che sfrutta in maniera decisiva il teorema di Krein-Šmulian.

Proposizione 5.1.3. *Sia X uno spazio di Banach. Se $M \subset X^*$ è un sottospazio chiuso in norma a caratteristica* 1, *tale che la palla unità X_1 è compatta nella topologia $\sigma(X,M)$, allora l'applicazione lineare $\Phi : X \to M^*$ data da $\Phi(x) = j(x) \restriction_M$ è un isomorfismo isometrico. In particolare X è uno spazio di Banach duale e M ne è un preduale.*

Dimostrazione. L'applicazione lineare $\Phi : X \to M^*$ data da $\langle \Phi(x), \varphi \rangle = \langle \varphi, x \rangle$ per ogni $x \in X$ e per ogni $\varphi \in M$ è certamente continua, infatti è isometrica: $\|\Phi(x)\| = \sup_{\varphi \in M_1} |\varphi(x)| = \|x\|$ per ogni $x \in X$, perchè M norma X. Dobbiamo mostrare che Φ è suriettiva. Sia $Y \doteq Ran\Phi \subset M^*$. Y è un sottospazio *-debolmente denso, infatti $Y^\perp = 0$ come è immediato riconoscere. Osserviamo che $Y_1 = \Phi(X_1)$, ne segue che Y_1 è *-debolmente compatta, perchè X_1 è $\sigma(X,M)$-compatta per ipotesi e Φ è continua da X con la topologia $\sigma(X;M)$ a M con la topologia *-debole $\sigma(M^*,M)$. In particolare Y_1 è *-debolmente chiuso, pertanto Y è *-debolmente chiuso grazie al teorema di Krein-Šmulian (M è uno spazio di Banach). Ne segue che $Y = M^*$, ciò che conclude la prova. □

[4]Vedere, ad esempio, l'appendice omonima.

Il risultato precedente continua a sussistere se si assume soltanto che M sia un sottospazio totale (*chiuso* in norma), come è dimostrato in [20], quale immediata applicazione del teorema del bipolare all'insieme convesso X_1 nella dualità (X, M) . Senza invocare il teorema del bipolare, è comunque possibile dimostrare che un tale sottospazio ha caratteristica certamente positiva. La funzione $X_1 \ni x \to g(x) \doteq \sup_{\varphi \in M_1} |\varphi(x)| \in \mathbb{R}$ è infatti semicontinua inferiormente se X_1 è munito della $\sigma(X, M)$-topologia, quale inviluppo superiore di funzioni continue. Siccome X_1 è compatto, g è dotata di minimo, cosicchè esiste $x_0 \in X_1$ tale che $g(x) \geq g(x_0)$, cioè $\sup_{\varphi \in M_1} |\varphi(x)| \geq \delta > 0$, con $\delta = \sup_{\varphi \in M_1} |\varphi(x)| > 0$ (perchè M è totale). Ne segue che $\sup_{\varphi \in M_1} |\varphi(x)| \geq \delta \|x\|$ per ogni $x \in X$.
Va sottolineato che l'ipotesi che $M \subset X^*$ sia chiuso in norma, invece, non può essere rimossa.

Passiamo ad enunciare il risultato principale della sezione. Si tratta di un teorema che si avvale della caratterizzazione di James della compattezza debole.

Teorema 5.1.2. *Sia X uno spazio di Banach. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *X è uno spazio duale, cioè esiste uno spazio di Banach M tale che $M^* \cong X$ (isomorfismo isometrico).*

2. *Esiste un sottospazio chiuso in norma $M \subset X^*$ a caratteristica* 1*, tale che i funzionali di M raggiungono la norma su X_1 e X è completo con la topologia di Mackey $\tau(X, M)$.*

Dimostrazione. L'implicazione *1.* $\Rightarrow$ *2.* è già stata dimostrata. L'implicazione *2.* $\Rightarrow$ *1.* richiede, come preannunciato, l'applicazione del teorema di *James*. Dobbiamo provare che X_1 e $\sigma(X, M)$-compatta. Per ipotesi, lo spazio localmente convesso $(X, \tau(X, M))$ è completo. Per il teorema di Mackey-Arens il suo duale è M. L'insieme X_1 è limitato in norma, perciò è limitato per la topologia di Mackey $\tau(X, M)$; inoltre esso è $\sigma(X, M)$-chiuso,quale intersezioni di chiusi, essendo

$$X_1 = \bigcap_{\varphi \in M_1} \{x \in X : |\varphi(x)| \leq 1\}$$

dal momento che M ha caratteristica 1.
I funzionali lineari di M assumono il sup su X_1 per ipotesi; ne segue che X_1 è un insieme $\sigma(X, M)$-compatto. Ciò conclude la prova. □

Appare naturale aspettarsi le conclusioni del teorema precedente, sotto l'ipotesi di quasi-completezza della topologia $\sigma(X, M)$. Più precisamente, si ha il risultato seguente, nel quale *non* è richiesto il teorema di James.

Proposizione 5.1.4. *Sia $M \subset X^*$ un sottospazio chiuso in norma e totale. Supponiamo che la topologia $\sigma(X, M)$ sia* quasi-completa. *Allora $M^* \cong X$ nell'isomorfismo canonico $\Phi(x) = j(x) \upharpoonright_M$.*

Dimostrazione. Occorre mostrare che X_1 è un insieme $\sigma(X, M)$ compatto. Osseviamo che, siccome X_1 è $\sigma(X, M)$-limitato, basta dimostrare che X_1 è $\sigma(X, M)$-limitato, grazie all'ipotesi di quasi-completezza. Ciò è diretta conseguenza del fatto che X_1 è totalmente limitata rispetto alla topologia debole $\sigma(X, X^*)$, che è più forte della $\sigma(X, M)$-topologia, visto che $M \subset X^*$. Per mostrare che X_1 è totalmente limitata rispetto alla topologia debole, basta considerare l'iniezione canonica $j : X \to X^{**}$, che è un omeomorfismo fra X e la sua immagine in X^{**}, quando X è pensato la topologia debole e X^{**} è pensato con la sua topologia *-debole $\sigma(X^{**}, X^*)$. Ora, per il teorema di Goldstine, $\overline{j(X_1)} = X_1^{**}$, la chiusura essendo quella relativa alla topologia *-debole. Per il teorema di Banach-Alaoglu, X_1^{**} è*-debolmente compatta, cosicche $j(X_1)$ è *-debolmente totalmente limitato, cioè X_1 è debolmente limitato. □

Il teorema 5.1.2 ammette un interessante corollario, quando applicato alle W*-algebre:

Corollario 5.1.1. *Sia $\mathfrak{R}$ una W*-algebra. Se $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{R}^*$ è un sottospazio chiuso (in norma) a caratteristica* 1*, i cui funzionali sono* norm-attaining *e tale che la topologia di Mackey $\tau(\mathfrak{R}, \mathfrak{M})$ è completa, allora $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{R}_*$ (isomorfismo isometrico), $\mathfrak{R}_*$ essendo il preduale di $\mathfrak{R}$ (funzionali ultradebolmente continui).*

Dimostrazione. Si tratta di un'immediata applicazione del teorema di Sakai sull'unicità del preduale per un algebra di von Neumann. □

Per quanto soddisfacente dal punto di vista teorico, il teorema 5.1.2 non è veramente definitivo. Sarebbe opportuno, infatti, affiancarlo a criteri, che permettano di riconoscere la completezza della topologia di Mackey $\tau(X, M)$ sotto ulteriori condizioni sufficienti su M. Questo sembra essere in generale un problema molto riposto, tuttavia il caso *separabile* può essere affronto più agevolmente, come mostrano i risultati della prossima sezione.

5.1.1 Il caso separabile

L'assunzione che X sia uno spazio di Banach separabile ci permette di dimostrare un utile teorema di completezza per la topologia di Mackey, che può essere enunciato come segue:

Teorema 5.1.3 (Completezza della topologia di Mackey)**.** *Sia X uno spazio di Banach* separabile *e $M \subset X^*$ sottospazio (chiuso) a caratteristica* 1*. Allora X è completo rispetto alla topologia di Mackey $\tau(X, M)$.*

Alla dimostrazione del teorema premettiamo qualche nozione preliminare. Per prima cosa, avremo bisogno del seguente lemma a carattere generale:

Lemma 5.1.2. *Sia E uno spazio localmente convesso e $\{f_\alpha : \alpha \in I\} \subset E^*$ una rete di funzionali lineari continui. Se $\{f_\alpha : \alpha \in I\}$ converge uniformemente sui compatti di E a f, allora f è* sequenzialmente *continua.*

Dimostrazione. Sia $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$ una successione convergente a $x \in X$. Allora

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - f_\alpha(x)| + |f_\alpha(x) - f_\alpha(x_n)| + |f_\alpha(x_n) - f(x_n)| \qquad (5.2)$$

L'insieme $K \doteq \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ è compatto, perciò, esiste $\alpha_0 \in I$ tale che $\sup_{y \in K} |f_\alpha(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ per ogni $\alpha \geq \alpha_0$. Sia ora $N \in \mathbb{N}$ tale che $|f_{\alpha_0}(x_n) - f_{\alpha_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ per ogni $n \geq N$, allora la 5.2 implica che $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ per ogni $n \geq N$, che è la continuità sequenziale di f. □

Prima di procedere, è opportuno segnalare che il lemma precedente consente di dare una seconda dimostrazione completezza della topologia di Mackey $\tau(X^*, X)$ sul duale di uno spazio di Banach.

Seconda dimostrazione del lemma 5.1.2, sez. 1. Sia $\{\varphi_i : i \in I\} \subset X^*$ una rete di Cauchy per la topologia di Mackey $\tau(X^*, X)$. Sia $K \subset X$ un insieme debolmente compatto. Per il teorema di Krein-Smulian (consultare, ad esempio, l'appendice omonima) $\overline{\mathrm{conv} K}$ è debolmente compatto, ne segue che, dato $\varepsilon > 0$, esiste $i_0 \in I$ tale che

$$\sup_{x \in K} |\varphi_i(x) - \varphi_j(x)| \leq \sup_{x \in \overline{\mathrm{conv} K}} |\varphi_i(x) - \varphi_j(x)| < \varepsilon \quad \text{per ogni } i, j \geq i_0 \qquad (5.3)$$

perchè $p_{\overline{\mathrm{conv} K}}$ è una seminorma di Mackey. In particolare, fissato $x \in X$ la successione numerica $\{\varphi_i(x) : i \in I\}$ è convergente. Se poniamo $\varphi(x) = \lim_i \varphi_i(x)$ per ogni $x \in X$, grazie all'osservazione preliminare abbiamo che φ è limite uniforme sugli insiemi debolmente compatti della rete $\{\varphi_i : i \in I\}$; pertanto $\varphi : X \to \mathbb{C}$ è una forma lineare sequenzialmente continua per la topologia debolo, cosicchè $\varphi \in X^*$. Passando al limite la disuguaglianza 5.3, se ne ricava che $\varphi_i \to \varphi$ per la topologia $\tau(X^*, X)$, ciò che conclude la prova. □

Introduciamo, quindi, una classe notevole di spazi: quelli di *Mazur*, nel senso della seguente

Definizione 5.1.1 (Spazi di Mazur)**.** *Uno spazio localmente convesso E si dice di* Mazur *se ogni forma lineare $F : E \to \mathbb{C}$ sequenzialmente continua è continua.*

Gli spazi bornologici sono tutti esempi di spazi di Mazur. Non tutti gli spazi di Mazur, tuttavia, sono bornologici. Ad esempio, ogni spazio normato X con la topologia debole $\sigma(X, X^*)$ è uno spazio di Mazur, pur non essendo bornologico[5] a meno che $\dim(X) < \infty$. Ancora, se X è uno spazio di Banach separabile, il teorema di Krein-Smulian garantisce che X^* con la topologia *-debole è uno spazio di Mazur, che non è bornologico.
Il lemma seguente esprime proprio la proprietà di Mazur per gli spazi che sono di nostro interesse:

Lemma 5.1.3. *Sia X uno spazio di Banach separabile e $M \subset X^*$ un sottospazio (chiuso) a caratteristica* 1. *Allora M munito della $\sigma(M, X)$-topologia è uno spazio di Mazur.*

Dimostrazione. Sia $f : M \to \mathbb{C}$ una forma lineare sequenzialmente $\sigma(M, X)$-continua. Siccome X è separabile, la restrizione a M_1 della $\sigma(M, X)$-topologia è metrizzabile. Ciò significa che la restrizione $f \restriction_{M_1}$ è una funzione uniformemente $\sigma(X^*, X)$-continua. Siccome M_1 e *-debolmente denso in X_1^*, esiste un prolungamento $\sigma(X^*, X)$-continuo, $g : X_1^* \to \mathbb{C}$. Tale funzione è eminentemente la restrizione di una forma lineare $G : X^* \to \mathbb{C}$, che è $\sigma(X^*, X)$-continua, grazie al teorema di Krein-Smulian. Pertanto, esiste $x \in X$ tale che $f(\varphi) = \varphi(x)$ per ogni $\varphi \in M$, che è quanto volevamo provare. □

Veniamo ora alla dimostrazione del teorema 5.1.3.

Dimostrazione. Sia $\{x_\alpha : \alpha \in I\} \subset X$ una rete di Cauchy per la topologia di Mackey $\tau(X, M)$. Allora, dato $K \subset M$ un sottoinsieme (convesso) $\sigma(M, X)$-compatto e $\varepsilon > 0$, esiste $\alpha_0 \in I$ tale che

$$\sup_{\varphi \in K} |\varphi(x_\alpha - x_\beta)| < \varepsilon \quad \text{per ogni}\, \alpha, \beta \geq \alpha_0 \tag{5.4}$$

In particolare, la successione numerica $\{\varphi(x_\alpha) : \alpha \in I\}$ è di Cauchy per ogni $\varphi \in M$ e, dunque, convergente. Sia $f : M \to \mathbb{C}$ la forma lineare data da $f(\varphi) = \lim_\alpha \varphi(x_\alpha)$ per ogni $\varphi \in M$. Passando al limite la disuguaglianza 5.4, si ha che f è limite uniforme sugli insiemi $\sigma(M, X)$-compatti di forme lineari $\sigma(M, X)$-continue; pertanto f è sequenzialmente continua rispetto a tale topologia.Siccome M ha la proprietà di Mazur rispetto alla $\sigma(M, X)$-topologia, esiste $x \in X$ tale che $f(\varphi) = \varphi(x)$ per ogni $\varphi \in M$. Ma allora $x_\alpha \to x$ per la topologia $\tau(X, M)$, ciò che conclude la prova. □

Con il risultato di completezza, possiamo dimostrare un notevole risultato di esistenza del preduale:

[5] La palla chiusa X_1 è un insieme convesso ed equilibrato che assorbe gli insiemi $\sigma(X, X^*)$-limitati, *i.e.* gli insiemi limitati in norma, ma X_1 non è un intorno di 0 per la topologia debole, a meno che X sia finito-dimensionale.

Teorema 5.1.4. *Sia X uno spazio di Banach separabile. Se $M \subset X^*$ è un sottospazio chiuso in norma tale che:*

1. *M ha caratteristica* 1*.*

2. *I funzionali di M sono norm-attaining.*

Allora M è canonicamente un preduale di X. Ne segue, in particolare, che M è separabile.

Dimostrazione. Si tratta di un'immediata applicazione del teorema principale della sezione precedente. La separabilità di M, poi, è conseguenza diretta della separabilità di X, che ne è il duale. □

L'ipotesi che M sia *chiuso* in norma non può essere difalcata, come mostra il seguente:

Esempio 5.1.1. Consideriamo lo spazio di Banach separabile $C[0,1]$ delle funzioni (reali) continue su $[0,1]$. Indichiamo con $\mathcal{M}([0,1])$ lo spazio delle misure boreliane finite su $[0,1]$, in modo da aversi $C[0,1]^* \cong \mathcal{M}[0,1]$ (teorema di Riesz-Markov). Sia $N \subset \mathcal{M}([0,1])$ il sottospazio generato dlle misure di Dirac δ_x, al variare di $x \in [0,1]$. N è evidentemente un sottospazio a caratteristica 1. I suoi funzionali, inoltre, sono tutti norm-attaining. Sia,infatti, $\varphi \in N$, allora $\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{x_i}$. Allora $\|\varphi\| = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$ è raggiunta su ogni funzione $f \in C[0,1]$ tale che $f(x_i) = \mathrm{sign}\lambda_i$ e, di tali funzioni, ne esistono a norma unitaria, chè $\{x_i : i = 1, 2 \ldots, n\} \subset [0,1]$ è chiuso.

Il teorema precedente ammette un corollario, che esprime interessanti proprietà di *massimalità* per opportuni sottospazi norm-attaining.

Teorema 5.1.5. *Sia X uno spazio di Banach separabile. Se $M \subset X^*$ è un sottospazio chiuso a caratteristica* 1 *di funzionali norm-attaining, allora M è massimale rispetto alla proprietà di essere* norm-attaining*.*

Dimostrazione. M è un preduale, cosicchè X_1 è $\sigma(X,M)$-compatta. Se $N \supseteq M$ è un sottospazio chiuso di funzionali norm-attaining, allora M è ancora un preduale, perciò X_1 è pure $\sigma(X,M)$-compatta.
Siccome le topologie di compatto di Hausdorff non sono comparabili, le restrizioni a X_1 della $\sigma(X,M)$-topologia e della $\sigma(X,N)$-topologia devono coincidere. Ciò implica che $N = M$, grazie al teorema di Krein-Smulian: se $\varphi \in N$, allora $\varphi \restriction_{X_1}$ è $\sigma(X,M)$-continua, perciò φ è $\sigma(X,M)$-continua, ciòè $\varphi \in M$. □

Osservazione 5.1.5. Dalla dimostrazione del teorema precedente è bene estrarre un'informazione generale: *fra due preduali distinti N e M di X, canonicamente realizzati quali sottospazi di X^*, non possono esservi relazioni di inclusione.*

I seguenti corollari sono immediati; purtuttavia non sembra agevole darne una dimostrazione diretta:

Corollario 5.1.2. *Non esiste un sottopazio chiuso $X \subset l_\infty$ di funzionali norm-attaining su l_1 tale che $c_0 \subset X$ con inclusione stretta.*

Corollario 5.1.3. *Non esiste alcun sottospazio (chiuso) $X \subset \mathcal{B}(H)$ di funzionali norm-attaining su $\mathcal{S}_1$[6] tale che $\mathcal{K}(H) \subset L$ con inclusione stretta.*

Più generale è, invece, il seguente corollario:

Corollario 5.1.4. *Se Y è uno spazio di Banach con duale Y^* separabile, allora $j(Y) \subset Y^{**}$ è un sottospazio chiuso massimale di funzionali norm attaining, ove $j : Y \to Y^{**}$ è l'iniezione canonica di Y nel suo biduale Y^{**}.*

Per apprezzare i risultati precedenti, occorre porli a confronto col teorema di Bishop-Phelps sulla *densità* in norma dei funzionali norm-attaining. Concludiamo la sezione citando una caratterizzazione dovuta a Dixmier dei preduali, quali opportuni sottospazi *minimali*:

Teorema 5.1.6 (Dixmier [10])**.** *Sia X uno spazio di Banach e $N \subset X^*$ un sottospazio chiuso a caratteristica* 1. *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *N è (canonicamente) un preduale.*
2. *N è un sottospazio chiuso* minimale *rispetto alla proprietà di essere totale.*

5.1.2 Applicazioni

In questo breve paragrafo diamo due interessanti applicazioni del teorema di esistenza dei preduali per spazi separabili; si tratta di dimostrazioni estremamente sintetiche di due risultati classici: il teorema di rappresentazione di *Riesz-Fréchet* per gli spazi di Hilbert e il teorema di rappresentazione di *Riesz* per gli spazi di Lebesgue L^p per $p > 1$.

Teorema 5.1.7 (Riesz-Fréchet)**.** *Sia H uno spazio di Hilbert (reale) separabile e $\varphi \in H^*$. Allora esiste un unico $x \in H$ tale che $\varphi(y) = (y, x)$ per ogni $y \in H$, dove $(\cdot, \cdot)$ è il prodotto interno di H.*

Dimostrazione. Sia $\Phi : H \to H^*$ l'applicazione lineare data da $\Phi(x) = \varphi_x$, dove φ_x è il funzionale lineare continuo $\varphi_x(y) \doteq (y, x)$ per ogni $y \in H$. Siccome si ha $\|\varphi_x\| = \|x\|$ per ogni $x \in H$, Φ è un'applicazione isometrica, cosicchè $\Phi(H) \subset H^*$ è un sottospazio *chiuso*, che è evidentemente a caratteristica 1. I suoi funzionali, infine, sono tutti *norm-attaining*, pertanto $\Phi(H)$ è un preduale di H, cioè $\Phi(H)^* \cong H$, da cui $H^* \cong H$ ciò che conclude la prova, l'isomorfismo essendo realizzato da Φ. □

[6] $\mathcal{S}_1$ è l'ideale degli operatori tracciabili, *cfr.*[34].

Osservazione 5.1.6. Interessante è notare come la nostra dimostrazione del teorema di Riesz-Frechet, ancorchè valida soltanto nel caso separabile, non dipende dal lemma di Riesz sulla decomposizione in somma diretta

$$H = M \oplus M^{\perp}$$

dove M è un sottospazio chiuso e $M^{\perp}$ il suo complemento ortogonale, *i.e.* $M^{\perp} = \{x \in H : (x, m) = 0 \quad \forall\, m \in M\}$.

Passiamo alla seconda applicazione, che appare ben più interessante, permettendo di semplificare notevolmente la dimostrazione del teorema di rappresentazione di *Riesz* per gli spazi L^p. Gli argomenti più comuni, invece, richiedono di sfruttare le disuguaglianze di *Clarkson*[7] (come, ad esempio, è presentata in [7]), ovvero il teorema di *Radon-Nikodym* (come nel classico trattato di Royden [40]).
Prima di presentare la nostra dimostrazione del teorema preannunciato, fissiamo velocemente la notazione. Indichiamo con $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito *separabile*[8], in modo che gli spazi di Lebesgue corrispondenti $L^p(X, \mu)$ sono spazi di Banach separabili per ogni $p \geq 1$ (finito!). Infine se $p > 1$, indichiamo con q il suo esponente coniugato, cioè quel numero reale $q > 1$ tale che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Con le notazioni introdotte, abbiamo il seguente:

Teorema 5.1.8. *Sia $p > 1$. L'applicazione $\Phi : L^q(X, \mu) \to L^p(X, \mu)^*$ data da*

$$\langle \Phi(f), g \rangle = \int_X f g d\mu \quad \text{per ogni } g \in L^p(X, \mu) \text{ e per ogni } f \in L^q(X, \mu)$$

è un isomorfismo isometrico, dove $q > 1$ è l'esponente coniugato a p.

Dimostrazione. Daremo la prova nel caso separabile[9]. Consideriamo lo spazio di Banach $L^q(X, \mu)$. Sia $\Psi : L^p(X, \mu) \to L^q(X, \mu)^*$ l'applicazione data da

$$\langle \Psi(f), g \rangle = \int_X f g \mathrm{d}\mu \quad \text{per ogni } g \in L^q(X, \mu) \text{ e per ogni } f \in L^p(X, \mu)$$

Si ha $|\langle \Psi(f), g \rangle| \leq \int_X |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_q$ grazie alla disuguaglianza di Hölder. Ciò mostra che Ψ è ben definita, essendo $\|\Psi(f)\| \leq \|f\|_p$ per ogni $f \in L^p(X, \mu)$. Fissata $f \in L^P(X, \mu)$, sia $g_0 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ la funzione misurabile data da

$$g_0(x) = \begin{cases} |f(x)|^{p-2} f(x) \\ 0 \text{ se } f(x) = 0 \end{cases}$$

---

[7] Dalle disuguaglianze di Clarkson segue il caratere uniformemente convesso degli spazi L^p per ogni $p > 1$ e, quindi, il fatto che essi sono spazi *riflessivi* in virtù del teorema di *Milman*.

[8] Questo significa che la σ-algebra $\mathfrak{S}$ è numerabilmente generata. Ad esempio, se X è uno spazio metrico separabile, la σ-algebra dei boreliani di X gode di questa proprietà.

[9] Ciò non è, di fatto, troppo restrittivo: quasi tutti gli spazi classici dell'Analisi godono di tale proprietà.

La funzione g_0 appartiene a $L^q(X,\mu)$, infatti $|g_0(x)|^q = |f(x)|^{(p-1)q} = |f(x)|^p$, cosicchè $\|g_0\|_q^q = \|f\|_p^p$, da cui $\|g_0\|_q = \|f\|_p^{\frac{p}{q}} = \|g_0\|^{p-1}$. Inoltre si ha

$$\langle \Psi(f), g_0 \rangle = \|f\|_p^p = \|f\|_p \|g_0\|_q \tag{5.5}$$

La 5.5 mostra che $\|\Psi(f)\| = \|f\|_p$ e che la norma è raggiunta sulla funzione $\frac{g_0}{\|g_0\|_q} \in L^q(X,\mu)_1$. se ne conclude che $\Psi(L^p(X,\mu)) \subset L^q(X,\mu)^*$ è un sottospazio chiuso di funzionali norm attaining. Inoltre, un argomento simmetrico al precedente mostra che tale sottospazio ha caratteristica 1, pertanto $\Psi(L^p(X,\mu))$ è un preduale di $L^q(X,\mu)$, da cui $L^p(X,\mu)^* \cong L^q(X,\mu)$ nell'isomorfismo descritto. □

Osservazione 5.1.7. E' bene sottolineare che la dimostrazione precedente dipende soltanto dall'elementare disuguaglianza di Hölder, unitamente alla caratterizzazione dei preduali.

5.2 Unicità del preduale

In questa sezione vogliamo pesentare qualche risultato noto in relazione all'unicità dei preduali. Gli spazi riflessivi sono esempi di spazi di Banach duali, quali duali del proprio duale, inoltre il loro preduale è unico a meno di isomorfismi isometrici. Prima di fornire una nostra dimostrazione di tale risultato, richiamiamo una nozione di grande interesse: quella di *unicità forte* del preduale, nel senso della seguente:

Definizione 5.2.1 (unicità forte del preduale)**.** *Sia X uno spazio di Banach con preduale $M \subset X^*$. Diciamo che M è* fortemente *unico se, per ogni preduale $N \subset X^*$ di X, riesce $N = M$.*

Evidentemente si tratta di una nozione che è più forte della semplice unicità (a meno di isomorfismi isometrici) del preduale ed è la nozione corretta per gli spazi riflessivi:

Teorema 5.2.1. *Il preduale di uno spazio di Banach* riflessivo *è fortemente unico.*

Dimostrazione. Diamo una nostra dimostrazione di questo classico risultato. Sia X uno spazio riflessivo e $M \subset X^*$ un suo preduale.
Per il teorema di Banach-Alaoglu X_1 è $\sigma(X,M)$ compatta. Poichè X è riflessivo, X_1 è $\sigma(X,X^*)$-compatta. Ciò significa che le restrizioni delle due topologie su X_1 devono coincidere (perchè le topologie di spazio compatto di Hausdorff non sono comparabili e la $\sigma(X,M)$ topologia è sicuramente meno fine della topologia debole, valendo l'inclusione $M \subset X^*$). Da ciò discende che $M = X^*$. Sia, infatti, $\varphi \in X^*$, allora $\varphi \restriction_{X_1}$ è una funzione $\sigma(X,M)$-continua. Per il teorema di Krein-Smulian, φ è una forma lineare $\sigma(X,M)$-continua, perciò $\varphi \in M$. Ciò conclude la dimostrazione. □

Una semplice analisi della dimostrazione del teorema di Sakai mostra che anche il preduale di un'algebra di von Neumann è fortemente unico. In effetti non sono noti in letterature esempi di spazi di Banach duali con preduale unico, ma non fortemente unico.

Nel suo articolo di rassegna [13] G. Godefroy raccoglie gli esempi noti in letteratura di tali spazi, descrivendo accuratamente le tecniche del settore. Di notevole interesse è, in particolare la nozione di funzionale lineare *universalmente* continuo per le topologie *-deboli, come è precisato nella seguente:

Definizione 5.2.2. *Un funzionale $\varphi \in X^*$ si dice universalmente continuo per le topologie *-deboli se, per ogni preduale $M \subset X^*$, riesce $\varphi \in M$.*

Intendiamo illustrare l'utilità della definizione appena data attraverso due classiche applicazioni: l'unicità (forte) dei preduali di l_∞ e di $\mathcal{B}(H)$. In sostanza si deduce la continuità *- debole universale di certe forme lineari, mostrando che la palla unità del loro nucleo può essere espressa quale intersezione di palle opportune, che sono universalmente compatte per le topologie *-deboli grazie al teorema di Alaoglu.

Esempio 5.2.1 (Unicità del preduale di l_∞)**.** .
Sia $M \subset l_\infty^*$ un preduale di l_∞, lo spazio di Banach delle successioni limitate, munito della norma del sup. Sia $e_n \in l_\infty$ la successione data da $e_n(k) = \delta_{n,k}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e $\varphi_n \in l_\infty^*$ la forma lineare data da $\varphi_n(x) = x_n$ per ogni $x \in l_\infty$. Vogliamo mostrare che φ_n è universalmente continua per le topologie *-deboli. A tal scopo basta osservare che $(Ker\varphi_n)_1 = \overline{B_1(e_n)} \cap \overline{B_1(-e_n)}$, dove $\overline{B_r(x_0)} \doteq \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\}$. Per il teorema di Alaoglu, le palle chiuse $\overline{B_r(x_0)}$ sono compatte nelle *-deboli, ne segue che $(Ker\varphi_n)_1$ è *-debolmente compattin ogni topologie *-debole, sicchè $Ker\varphi_n$ è *-debolmente chiuso in ogni topologia *, grazie al teorema di Krein-Smulian. Ne segue che i funzionali coordinati φ_n sono *universalmente* continui per le topologie deboli*, cosicché $\varphi_n \in M$ per ogni n, da cui $l_1 = \overline{\text{span}\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}} \subset M$. Deve essere, pertanto, $M = l_1$, non potendo esistere relazioni di inclusioni proprie fra i preduali.

Esempio 5.2.2 (Unicità del preduale di $\mathcal{B}(H)$)**.** .
Vogliamo mostrare che il preduale di $\mathcal{B}(H)$, dove H è uno spazio di Hibert è fortemente unico ed è rappresentato da $\mathcal{S}_1$, l'ideale degli operatori tracciabili (o nucleari, vedere [38]). A tal scopo basta provare che se $M \subset \mathcal{B}(H)^*$ è un preduale, allora M contiene tutti gli operatori di rango finito, pensati quali forme lineari attraverso la traccia [10].

[10] $A \in \mathcal{S}_1$ è identificato al funzionale φ_A dato da $\varphi_A(T) = tr(AT)$ per ogni $T \in \mathcal{B}(H)$. La corrispondenza lineare $A \to \varphi_A$ è inoltre isometrica: $\|A\|_1 = \|\varphi_A\|$ per ogni $A \in \mathcal{S}_1$, dove $\|A\|_1 \doteq tr(|A|)$ è la norma che rende $\mathcal{S}_1$ un'algebra di Banach.

Dati $x, y \in H$a norma unitaria sia $x \otimes y$ l'operatore di rango 1 dato da $x \otimes y\,(z) = (z, y)x$ per ogni $z \in H$. Se mostriamo che $x \otimes y \in M$ per ogni $x, y \in H$ avremo la conclusione. Occorre mostrare che $\mathrm{Ker}\, x \otimes y \subset \mathcal{B}(H)$ è un sottospazio universalmente *-debolmente continuo, ossia che è tale la sua palla unità. Ora $(\mathrm{Ker}\, x \otimes y)_1 = \{T \in \mathcal{B}(H)_1 : (Ty, x) = 0\}$. Definiamo l'insieme $C_x^y \doteq \overline{B_1(x \otimes y)} \cap \overline{B_1(-x \otimes y)}$. Costituisce una semplice verifica dimostrare che

$$C_x^y = \{T \in \mathcal{B}(H)_1 : Ty = T^* x = 0\}$$

Se z è un vettore unitario ortogonale a x e y si ha, come è facile verificare, che

$$C_x^y \cap C_z^y \cap C_x^z = (\mathrm{Ker}\, x \otimes y)_1$$

da cui la conclusione grazie al teorema di Alaoglu.

Una classe notevole di spazi di Banach duali è costituita dagli spazi (isometricamente) isomorfi al proprio biduale. In [15] James ha dimostrato che tale classe è strettamente più ampia di quella rappresentata dagli spazi riflessivi, fornendo un brillante esempio di spazio di Banach separabile J, oggi noto come spazio di James, che, pur non essendo riflessivo[11], è isometricamente isomorfo al suo biduale J^{**}.
Sembra interessante affrontare il problema dell'unicità del preduale per tali spazi, visto che questo ha soluzione positiva per gli spazi riflessivi e, più in generale, per gli spazi quasi riflessivi. Qui ci limitiamo ad osservare che vale la seguente caratterizzazione di tali spazi, ritenendo che potrebbe rivelarsi utile alla soluzione del problema proposto.

Proposizione 5.2.1. *Se X è uno spazio Banach, Allora vale l'isomorfismo isometrico $X \cong X^{**}$ se e solo se esite un'isometria $\Phi : X^* \to X^*$ tale che $\Phi(X)$ è un preduale di X. Inoltre X è riflessivo se e solo se Φ è suriettiva.*

Dimostrazione. Si tratta di un'immediata applicazione del lemma 5.1.1. □

[11] Più precisamente $j(J) \subset J^{**}$ ha codimensione 1. Per i dettagli vedere, ad esempio, [2].

Appendice A

Filtri e convergenza

La nozione di filtro, introdotta da H. Cartan, permette la più generale trattazione delle questioni di convergenza. La definizione è la seguente:

Definizione A.0.3 (Filtro)**.** *Un filtro $\mathcal{F}$ su un insieme non vuoto X è una collezione di sottoinsiemi di X tale che:*

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$
2. *Se $A, B \in \mathcal{F}$, allora $A \cap B \in \mathcal{F}$*
3. *Se $A \in \mathcal{F}$ e $B \supseteq A$ allora $B \in \mathcal{F}$*

Dato un sottoinsieme non vuoto $A \subset X$, la collezione $\mathcal{F}(A)$ dei sottoinsiemi di X che contengono A è un filtro, detto il filtro di base A. Se A consta di un solo elemento $x \in X$, $\mathcal{F}(A)$ è anche indicato con $\mathcal{F}_x$. Un filtro $\mathcal{F}$ si dice *libero* se non esiste alcun sottoinsieme $A \subset X$ tale che $\mathcal{F} = \mathcal{F}(A)$.
L'inclusione induce una relazione d'ordine sui filtri: un filtro $\mathcal{F}$ si dice più fine del filtro $\mathcal{G}$ se $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. In tal caso si scrive anche $\mathcal{G} \leq \mathcal{F}$. Osserviamo che $\mathcal{F}(A) \leq \mathcal{F}(B)$ se e solo se $B \subset A$.
Particolarmente utile nelle questioni di topologia generale è la nozione di *ultrafiltro*:

Definizione A.0.4 (ultrafiltro)**.** *Un filtro massimale rispetto all'ordinamento parziale $\leq$ si dice un ultrafiltro.*

Ad esempio, $\mathcal{F}_x$ è un ultrafiltro per ogni $x \in X$ come è immediato verificare; inoltre

Teorema A.0.2 (Lemma degli ultrafiltri)**.** *Dato un filtro $\mathcal{F}$ su X, esiste un ultrafiltro $\mathcal{F}_0$ tale che $\mathcal{F} \leq \mathcal{F}_0$.*

Dimostrazione. Si tratta di una semplice applicazione del lemma di Zorn. Consideriamo la famiglia (non vuota) $\mathfrak{F}$ dei filtri $\mathcal{G}$ tali che $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$ munita

dell'ordinamento parziale dato da $\preceq$. Sia $\{\mathcal{G}_\alpha : \alpha \in I\}$ una catena in $\mathfrak{F}$. Dobbiamo mostrare che essa ammette un maggiorante. Poniamo $\mathcal{G} = \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{G}_\alpha$ e proviamo che $\mathcal{G}$ è un filtro. L'unica verifica non ovvia è che, dati $A, B \in \mathcal{G}$, si ha che $A \bigcap B$ è non vuota. Siccome $\{\mathcal{G}_\alpha : \alpha \in I\}$ è una catena, esiste $\bar{\alpha} \in I$ tale che $A, B \in \mathcal{G}_{\bar{\alpha}}$, perciò $A \bigcup B$ è non vuota, perchè $\mathcal{G}_{\bar{\alpha}}$ è un filtro.
Per il lemma di Zorn esiste, pertanto, un filtro massimale $\mathcal{F}_0$ in $\mathfrak{F}$, che è proprio quanto volevamo dimostrare. □

Consideriamo ora la nozione di base di un filtro. Questa definizione, in qualche modo, è modellata sulla definizione di base di aperti su uno spazio topologico.

Definizione A.0.5 (Base di un filtro)**.** *Una sottocollezione di insiemi $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ di un filtro $\mathcal{F}$ si dice una base del filtro, se per ogni $A \in \mathcal{F}$ esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $B \subset A$.*

Se X è uno spazio topologico e x un suo punto, è immediato riconoscere che $\mathcal{N}_x$ (collezione degli intorni di x) è un filtro. Sia $\mathcal{O}_x \subset \mathcal{N}_x$ la collezione degli insiemi aperti che contengono x. Dalla definizione di intorno segue subito che $\mathcal{O}_x$ è una base del filtro $\mathcal{N}_x$.
Se $\mathcal{B}$ è base di un filtro $\mathcal{F}$ e $A, B \in \mathcal{B}$, allora esiste $C \in \mathcal{B}$ tale che $C \subset A \bigcap B$, semplicemente perchè $A \bigcap B \in \mathcal{B}$. Viceversa:

Lemma A.0.1. *Sia $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ una collezione di sottoinsiemi tale che:*

1. *$\emptyset \notin \mathcal{B}$.*
2. *Dati $A, B \in \mathcal{B}$ esiste $C \in \mathcal{B}$ tale che $C \subset A \bigcap B$.*

Allora $\mathcal{B}$ è base del filtro $\mathcal{F} \doteq \{A \in \mathcal{P}(X) : \exists B \in \mathcal{B} \text{ con } B \subset A\}$.

La dimostrazione del lemma precedente è un semplicissimo esercizio, quindi preferiamo ometterla; segnaliamo, invece, che due filtri con stessa base devono coincidere, come è facile verificare.

D'ora in poi supporremo che X sia uno spazio topologico. Prima di presentare la teoria della convergenza per i filtri, va detto che è possibile assegnare una topologia su un insieme qualunque, assegnando un filtro $\mathcal{N}_x$ in corrispondenza di ogni elemento $x \in X$, richiedendo che:

1. $x \in A$ per ogni $A \in \mathcal{N}_x$.
2. Dato $U \in \mathcal{N}_x$ esiste $V \in \mathcal{N}_x$ tale che $y \in V$ implica $U \in \mathcal{N}_y$.

Le condizioni richiamate garantiscono che la collezione degli insiemi $A \subset X$ tali che per ogni $x \in A$ esiste $U \in \mathcal{N}_x$ con $U \subset A$ è una topologia e che $\mathcal{N}_x$ non è altro che il filtro degli intorni di x in tale topologia.
Passiamo a consideare la nozione di convergenza di un filtro:

Definizione A.0.6 (Filtri convergenti)**.** *Un filtro $\mathcal{F}$ su uno spazio topologico X si dice convergente al punto $x \in X$ se è più fine del filtro degli intorni di x; in simboli $\mathcal{N}_x \leq \mathcal{F}$.*

Non è difficile dimostrare la seguente:

Proposizione A.0.2. *Uno spazio topologico è di* Hausdorff *se e solo se ogni suo filtro converge al più ad un punto.*

La nozione di punto di accumulazione di un filtro è pure di notevole utilità:

Definizione A.0.7 (Punto di accumulazione di un filtro)**.** *Un punto $x \in X$ si dice di accumulazione per il filtro $\mathcal{F}$ se $x \in \overline{F}$ per ogni $F \in \mathcal{F}$.*

Se $\mathcal{F}$ converge a un punto $x \in X$, allora x è punto di accumulazione per il filtro (Se $F \in \mathcal{F}$ e $U \in \mathcal{N}_x$, allora $F \bigcap U$ è non vuota perchè appartiene al filtro $\mathcal{F}$). Il viceversa in generale non è vero, tuttavia:

Proposizione A.0.3. *Un ultrafiltro converge a tutti i suoi punti di accumulazione.*

Dimostrazione. Sia x un punto di accumulazione dell'ultrafiltro $\mathcal{F}$. Sia $U \in \mathcal{N}_x$, allora $U \bigcap F$ è non vuoto per ogni $F \in \mathcal{F}$, perciò $U \in \mathcal{F}$ per massimalità. $\square$

In uno spazio di Hausdorff, quindi, un ultrafiltro possiede al più un punto di accumulazione. Naturalmente non è detto che debba ammetere un punto di accumulazione, a meno che lo spazio sia *compatto*:

Teorema A.0.3 (Compattezza e filtri)**.** *Uno spazio topologico X è compatto se e solo se ogni filtro in X ha almeno un punto di accumulazione.*

Dimostrazione. Sia C una famiglia di chiusi di X con la proprietà dell'intersezione finita. Allora la collezione $\mathcal{B}$ dei sottoinsiemi di X che sono intersezioni finite di insiemi di C è la base di un filtro $\mathcal{F}$. Sia $x \in X$ un suo punto di accumulazione. Siccome $C \subset \mathcal{F}$, riesce $x \in C$ per ogni $C \in C$, sicché $\bigcap_{C \in C} C$ è non vuota.
Viceversa, sia $\mathcal{F}$ un filtro sullo spazio topologico compatto X. Consideriamo la famiglia di chiusi $C \doteq \{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\}$. Siccome $\mathcal{F}$ è un filtro, C ha la proprietà dell'intersezione finita, dunque esiste $x \in X$ tale che $x \in \overline{F}$ per ogni $F \in \mathcal{F}$ (grazie alla compattezza di X). Ciò conclude la prova. $\square$

Il teorema precedente è la versione generale del ben noto risultato sugli spazi metrici, che esprime la compattezza in termini di compattezza per successioni (ogni successione ammette una sottosuccessione convergente). In termini di ultrafiltri il risultato prende la forma:

Teorema A.0.4. *Uno spazio topologico X è compatto se e solo se ogni ultrafiltro in X è convergente.*

Dimostrazione. Sia X compatto e $\mathcal{F}$ un ultrafiltro. Allora esiste $x \in X$ che è punto di accumulazione per $\mathcal{F}$. La tesi segue dal fatto che un ultrafiltro converge a tutti i suoi punti di accumulazione.
Viceversa, sia $\mathcal{F}$ un filtro. Per il lemma degli ultrafiltri esiste un ultrafiltro $\mathcal{F}_0$ tale che $\mathcal{F} \leq \mathcal{F}_0$. Per ipotesi $\mathcal{F}_0$ è convergente a un certo $x \in X$. Tale x è certamente punto di accumulazione per $\mathcal{F}_0$ e, a fortiori, per $\mathcal{F}$. Ne segue che X è compatto, giacchè $\mathcal{F}$ è arbitrario. □

Il teorema precedente è una caratterizzazione piuttosto potente della compattezza. Ad esempio, consente una dimostrazione molto veloce del teorema di Tychonoff:

Teorema A.0.5 (Tychonoff)**.** *Il prodotto di spazi compatti è compatto.*

Dimostrazione. Sia $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ una collezione di spazi topologici compatti. Poniamo $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ con la topologia prodotto, cioè con la topologia meno fine per la quale le proiezioni sui fattori p_α sono continue. Sia $\mathcal{F}$ un ultrafiltro in X. Per ogni $\alpha \in I$ la collezione $p_\alpha(\mathcal{F}) = \{p_\alpha(F) : F \in \mathcal{F}\}$ è la base di un ultrafiltro in X_α (facile verifica). Siccome X_α è compatto, esiste $x_\alpha \in X_\alpha$ tale che $p_\alpha(\mathcal{F})$ converge a x_α. Sia $x \in X$ dato da $x(\alpha) \doteq x_\alpha$[1]. Si riconosce immediatamente che $\mathcal{F}$ converge a x. Ne segue che X è compatto. □

Naturalmente la dimostrazione precedente non prescinde dall'assioma della scelta, dipendendo dal lemma degli ultrafiltri. Cionondimeno il lemma degli ultrafiltri non sostituisce interamente l'assioma della scelta. Il lemma degli ultrafiltri, in effetti, non è equivalente all'assioma della scelta, differentemente dal teorema di Tychonoff stesso, che Kelley ha dimostrato essere equivalente all'assioma della scelta in [23].

Prima di concludere questa sezione, è bene introdurre la seconda nozione indispensabile a trattare le nozioni di convergenza nella loro generalità; ci riferiamo al concetto di *net* (o successione generalizzata), introdotto da Moore e Smith [31]. Prima di darne la definizione precisa ricordiamo che un insieme parzialmente ordinato $(I, \leq)$ si dice *diretto* se per ogni $i, j \in I$, esiste $k \in I$ tale che $i \leq k$ e $j \leq k$.

Definizione A.0.8 (Net)**.** *Una successione generalizzata (o net) su uno spazio topologico X è un'applicazione $x : I \to X$, dove I è un insieme diretto.*

Si suole identificare l'applicazione con la sua immagine ed indicare un net x come $\{x_i : i \in I\}$. La nozione di convergenza per una successione generalizzata è, senza sorprese, la seguente

Definizione A.0.9 (Reti convergenti)**.** *Una rete $\{x_i : i \in I\} \subset X$ è convergente al punto $x \in X$ se per ogni intorno U di x, x_i è* definitivamente *in U, cioè esiste $i_U \in I$ tale che $x_i \in U$ per ogni $i \geq i_U$.*

[1]Un tale $x \in X$ esiste grazie all'*Assioma* della *scelta*.

Naturalmente è anche possibile dare la nozione di punto di accumulazione per una rete, infatti

Definizione A.0.10 (Punti di accumulazione di una rete)**.** *Un punto $x \in X$ si dice di accumulazione per una rete $\{x_i : i \in I\} \subset X$ se per ogni intorno U di x $\{x_i : i \in I\}$ è* frequentemente *in U, cioè per ogni I esiste $j \in I$ con $j \geq i$ tale che $x_j \in U$.*

Così come per le successioni ordinarie, è possibile dare una nozione di sottorete. A tal scopo ricordiamo che un'applicazione $f : I \to J$ fra insiemi diretti si dice un *morfismo cofinale* se preserva l'ordine e se, comunque dato $j \in J$, esiste $i \in I$ tale che $f(i) \geq j$.

Definizione A.0.11 (Sottorete)**.** *Una rete $\{y_j : j \in I\} \subset X$ si dice una sottorete di $\{x_i : i \in I\} \subset X$ se esiste un morfismo cofinale $f : J \to I$ tale che $y_j = x_{f(j)}$ per ogni $j \in J$.*

Con la nozione di sottorete è facile dare la seguente caratterizzazione dei punti di accumulazione:

Lemma A.0.2. *Un punto $x \in X$ è di accumulazione per la rete $\{x_i : i \in I\} \subset X$ se e solo se esiste una sottorete $\{y_j : j \in J\} \subset X$ che converge a $x \in X$.*

Dimostrazione. Se esiste una sottorete $\{y_j : j \in J\} \subset X$ che converge a $x \in X$, allora x è un punto di accumulazione di $\{x_i : i \in I\} \subset X$, come è immediato riconoscere. Viceversa, sia x un punto di accumulazione di $\{x_i : i \in I\} \subset X$. Definiamo l'insieme

$$J = \{(i, U) : i \in I, U \in \mathcal{N}_x \text{ tali che } x_i \in U\}$$

munito della relazione d'ordine $(i, U) \preceq (j, V)$ se e solo se $i \preceq j$ e $V \subset U$. Siccome x è un punto di accumulazione per la rete $\{x_i : i \in I\}$, l'insieme $(J, \preceq)$ è diretto. Siano, infatti, (i, U) e (j, V) due elementi di J; sia $h \in I$ tale che $i, j \preceq h$ e $k \geq h$ tale che $x_k \in U \cap V$, allora $(k, U \cap V) \in J$.
Sia $f : J \to I$ l'applicazione suriettiva data da $f(i, U) = i$. Evidentemente si tratta di un morfismo cofinale. Non resta da provare che la sottorete $\{x_{f((j,U))} : (j, U) \in J\}$ converge a x. Sia U un intorno di x e sia $i \in I$ tale che $x_i \in U$, allora se $(j, V) \geq (i, U)$ riesce $x_{f(j,U)} = f_j \in U$. □

Reti e filtri in certo senso si corrispondono. Dato un filtro[2] $\mathcal{F}$ possiamo introdurre l'ordinamento parziale $\preceq$ su $\mathcal{F}$ dato dall'inclusione, cioè $F \preceq G$ se $G \subset F$. Si tratta evidentemente di un ordinamento filtrante, cioè $(\mathcal{F}, \preceq)$ è un insieme diretto. Per l'assioma della scelta, esiste una funzione $x : \mathcal{F} \to X$ tale che $x_F \doteq x(F) \in F$ per ogni $F \in \mathcal{F}$. La rete $\{x_F : F \in \mathcal{F}\}$ è convergente a $x \in X$ se lo è il filtro come è immediato riconoscere.

[2] Su uno spazio topologico X.

D'altra parte, data una rete $\{x_i : i \in I\} \subset X$ possiamo considerare la collezione $\mathcal{F}$ dei sottoinsiemi di $F \subset X$ tali che x_i è definitivamente in F. Evidentemente si tratta di un filtro convergente a $x \in X$ se lo è la rete $\{x_i : i \in I\}$.
Al concetto di ultrafiltro corrisponde la nozione di *rete universale* introdotta da Kelley:

Definizione A.0.12 (Rete universale)**.** *Una rete $\{x_i : i \in I\} \subset X$ si dice universale (ultrarete) se per ogni sottoinsieme $F \subset X$, la rete è definitivamente in F o nel suo complementare F^c.*

Evidentemente una rete universale converge a tutti i suoi punti di accumulazione, pertanto se X è uno spazio di Hausdorff, una tale rete possiede al più un punto di accumulazione.
L'esistenza delle ultrareti è garantita dal lemma degli ultrafiltri: una rete corrispondente ad un ultrafiltro è infatti una rete universale, come è immediato riconoscere. Vicendevolmente il filtro corrispondente ad una rete universale è un ultrafiltro, pertanto si ha il seguente:

Teorema A.0.6. *Uno spazio topologico X è compatto se e solo se ogni rete universale di X è convergente.*

Appendice B

Il teorema di Hahn-Banach

Il teorema di Hahn-Banach (forma analitica) è un potente risultato di estensione per forme lineari. Sia E uno spazio vettoriale reale. Una funzione $p : E \to \mathbb{R}$ si dice una *gauge* se è positivamente omogenea e subadditiva, cioè se:

1. $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ per ogni $x \in E$ e per ogni $\lambda > 0$.
2. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ per ogni $x, y \in E$.

Possiamo ora formulare la cosiddetta *forma analitica reale* del teorem di Hanh-Banach:

Teorema B.0.7 (Hahn-Banach)**.** *Sia E uno spazio vettoriale reale e p una funzione di gauge su E. Data una forma lineare $\varphi : F \to \mathbb{R}$, dove $F \subset E$ è un sottospazio, tale che $\varphi(x) \leq p(x)$ per ogni $x \in F$.*
Esiste una forma lineare $\Phi : E \to \mathbb{R}$ tale che $\Phi(x) \leq p(x)$ per ogni $x \in E$.

Dimostrazione. Si tratta di una semplice applicazione del lemma di Zorn. Innanzitutto mostriamo che è possibile prolungare φ su $F + \mathbb{R}x_0$ (dove x_0 è un vettore di E che non appartiene a F) in modo che la forma lineare ottenuta sia ancora dominata da p. Poniamo $\tilde{\varphi}(x + tx_0) \doteq \varphi(x) + t\lambda$ per ogni $x \in F$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$, dove λ è un numero reale. Occorre far vedere che è possibile scegliere $\lambda \in \mathbb{R}$ in modo che $\tilde{\varphi} \leq p$. Grazie alla positiva omogeneità di p è sufficiente verificare che esiste λ tale che $\varphi(x)+\lambda \leq p(x+x_0)$ e $\varphi(x) - \lambda \leq p(x - x_0)$ per ogni $x \in F$.
Siano $x, y \in F$ allora $\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x + y) \leq p(x - x_0) + p(y + x_0)$ da cui $\varphi(x) - p(x - x_0) \leq \varphi(y) + p(y + x_0)$, sicchè

$$\sup_{x\in E} \{\varphi(x) - p(x - x_0)\} \leq \inf_{y\in F} \{p(y + x_0) - \varphi(y)\}$$

Ciò significa che esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\varphi(x) - p(x - x_0) \leq \lambda\ p(x + x_0) - \varphi(x)$ per ogni $x \in E$, che è quanto volevamo.
Sia adesso $\mathfrak{F}$ la famiglia delle coppie (G, η) dove $G \subset E$ è un sottospazio

contenente F è η è una forma lineare definita in G tale che $\eta \upharpoonright_F = \varphi$ e $\eta \leq p$. $\mathfrak{F}$ è munito dell'ordinamento parziale $\preceq$ dato dall'inclusione, cioè $(G, \eta) \preceq (H, \omega)$ se e solo se $G \subset H$ e $\omega \upharpoonright_G = \eta$. $(\mathfrak{F}, \preceq)$ è un insieme *induttivo*, cioè ogni catena ammette un maggiorante in $\mathfrak{F}$. Se $\{(H_\alpha, \eta_\alpha)\}$ è una catena (*i.e* un insieme totalmente ordinato) di $\mathfrak{F}$, l'insieme $\bigcup_\alpha H_\alpha \subset E$ è un sottospazio sul quale è possibile definire la forma lineare η ponendo $\eta(x) = \eta_\alpha(x)$ se $x \in H_\alpha$. Grazie alla proprietà di catena η è ben definita ed è dominata da p, sicché $(H, \eta) \in \mathfrak{F}$ ne è un maggiorante. Per il lemma di Zorn esiste un elemento massimale (H_0, Φ). Per massimalità deve essere $H_0 = E$, grazie a quanto visto all'inizio della dimostrazione. □

Il passaggio dal caso reale al caso complesso non presenta particolari difficoltà. Il teorema resta vero sotto ipotesi leggermente più restrittive, il modulo del funzionale dovendo essere dominato da una *seminorma*:

Teorema B.0.8 (Hahn-Banach: caso complesso)**.** *Sia E uno spazio vettoriale complesso e p una seminorma definita in E. Sia $\varphi : F \to \mathbb{C}$ una forma lineare definita sul sottospazio $F \subset E$ tale che $|\varphi(x)| \leq p(x)$ per ogni $x \in F$.*
Esiste una forma lineare $\Phi : E \to \mathbb{C}$ tale che $|\Phi(x)| \leq p(x)$ per ogni $x \in E$.

Dimostrazione. Ci si riconduce al caso reale definendo la forma $\mathbb{R}$-lineare data da $g(x) = Re\varphi(x)$ per ogni $x \in F$. Evidentemente $g \leq p$. Sia G un'estensione di g a tutto E tale che $G(x) \leq p(x)$ per ogni $x \in E$.
Definiamo $\Phi(x) \doteq G(x) - iG(ix)$ per ogni $x \in E$. Vogliamo verificare che Φ è $\mathbb{C}$-lineare. A tal scopo basta assicurarsi che $\Phi(ix) = i\Phi(x)$ per ogni $x \in E$. Questa è una facile verifica:

$$\Phi(ix) = G(ix) - iG(i^2x) = G(ix) + iG(x) = i(G(x) - iG(ix)) = i\Phi(x) \quad \text{per ogni } x \in E$$

Si verifica facilmente che Φ estende φ. Infine $|\Phi(x)| = \Phi(x)e^{i\theta} = \Phi(e^{i\theta}x) = G(e^{i\theta}x) \leq p(e^{i\theta}x) = p(x)$ per ogni $x \in E$, ciò che conclude la prova. □

Il teorema di Hahn-Banach è ricchissimo di conseguenze ed applicazioni. Ad esempio il duale (topologico) X^* di uno spazio normato X è molto ricco, come è espresso dal seguente:

Corollario B.0.1. *Sia X uno spazio normato e $x_0 \in X$ non nullo. Allora esiste $\varphi \in X^*$ tale che $||\varphi|| \leq 1$ e $\varphi(x_0) = ||x_0||$.*

Dimostrazione. Sia $F = \mathbb{C}x_0$ e $\varphi : F \to \mathbb{C}$ dato da $\varphi(\lambda x_0) = \lambda ||x_0||$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$. Si ha evidentemente $|\varphi(x)| \leq ||x||$ per ogni $x \in F$. Un prolungamento alla Hahn-Banach di φ (rispetto alla seminorma $p(x) = ||x||$) ha tutte le proprietà di cui all'enunciato. □

Un secondo corollario che presenta numerose applicazioni in Analisi Funzionale è il seguente:

Corollario B.0.2. *Sia $M \subset X$ un sottospazio chiuso proprio di uno spazio normato X. Se $x_0 \notin M$, esiste $\varphi \in X^*$ con $\|\varphi\| \leq 1$, tale che $\varphi(y) = 0$ per ogni $y \in M$ e $\varphi(x) = d(x, M)$.*

Dimostrazione. Consideriamo lo spazio quoziente X/M munito della norma quoziente $\|\hat{x}\| \doteq \inf\{\|y\| : y \in \hat{x}\} = d(x, M)$, dove $\hat{x}$ indica classe di equivalenza (*mod* M) di $x \in X$.
Siccome $x_0 \notin M$, si ha $\hat{x_0} \neq 0$, cosicchè, applicando il teorema di Hahn-Banach allo spazio normato quoziente, otteniamo che esiste $\eta \in (X/M)^*$ tale che $\|\eta\| = 1$ e $\eta(\hat{x_0}) = \|\hat{x_0}\| = d(x_0, M)$.
Sia ora $\varphi \in X^*$ dato da $\varphi = \eta \circ \pi$ dove $\pi : X \to X/M$ è la proiezione canonica sul quoziente. Evidentemente $\varphi(M) = 0$, $\varphi(x_0) = d(x_0, M)$ e $\|\varphi\| \leq 1$, dato che $\|\pi\| \leq 1$. □

Concludiamo ricordando che il teorema di Hahn-Banach non è equivalente all'Assioma della scelta, esistendo sue dimostrazioni che prescindono dal lemma di Zorn. Ad esempio Luxemburg in [28] ha dimostrato che è possibile dare una prova del teorema a partire dal lemma degli ultrafiltri.

Appendice C

Limiti di Banach

Un'applicazione molto interessante del teorema di Hanh-Banach si ha quando bisogna dimostrare l'esistenza di opportuni funzionali lineari sullo spazio di Banach l_∞ delle successioni (reali) limitate, munito della norma $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.
Se indichiamo con $c \subset l_\infty$ il sottospazio delle successioni convergenti, allora è ben definito il funzionale lineare limitato $\varphi : c \to \mathbb{R}$ dato da $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$. Il funzionale φ possiede le proprietà seguenti:

- $\|\varphi\| = 1$.
- Se $x \in c$ è tale che $x_n \geq 0$ per ogni n, allora $\varphi(x) \geq 0$.
- Se $x \in c$, allora $\varphi(Sx) = \varphi(x)$, dove $(Sx)_n = x_{n+1}$ per ogni n.

Il teorema che segue mostra che è possibile estendere a l_∞ il funzionale φ in modo che le proprietà di cui sopra continuino ad essere verificate.

Teorema C.0.9. *Esiste un funzionale lineare limitato $L : l_\infty \to \mathbb{R}$ tale che:*
(a) $\|L\| = 1$.
(b) Se $x \in c$, $L(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$.
(c) Se $x \in l_\infty$ e $x_n \geq 0$ per ogni n, riesce $L(x) \geq 0$.
(d) Se $x \in l_\infty$, allora $L(Sx) = L(x)$, dove $(Sx)_n = x_{n+1}$.

Dimostrazione. Sia S l'operatore lineare continuo di l_∞ in sè, dato dallo *shift* destro, cioè $(Sx)_n = x_{n+1}$ per ogni n e per ogni successione $x \in l_\infty$.
Sia $M \subset l_\infty$ la chiusura del sottospazio $Ran(I - S)$, $e \in l_\infty$ la successione identicamente uguale a 1. Vogliamo provare che riesce

$$d(e, M) = d(e, Ran(I - S)) = 1.$$

Siccome $0 \in M$, si ha sicuramente $d(e, M) \leq 1$. Sia ora $x \in l_\infty$. Dobbiamo provare che riesce $\|e + Sx - x\| \geq 1$ cioè che $sup_{n\in\mathbb{N}}|1 + x_{n+1} - x_n| \geq 1$.
Dobbiamo, quindi, verificare che, dato $\varepsilon > 0$, esiste $N \in \mathbb{N}$ (dipendente da

ε), tale che $|1 + x_{N+1} - x_N| \geq 1 - \varepsilon$. Se, per assurdo, esistesse $\varepsilon > 0$ tale che $|1 + x_{n+1} - x_n| < 1 - \varepsilon$ per ogni n, si avrebbe, in particolare, $x_{n+1} < x_n - \varepsilon$, da cui $x_{n+1} < x_1 - n\varepsilon$, contro il fatto che x è una successione limitata.
Per uno dei corollari del teorema di Hanh-Banach esiste $L \in l_\infty^*$ tale che $L(e) = d(e, M) = 1$, $\|L\| = 1$ e $L(M) = 0$, cioè $L(x) = L(Sx)$ per ogni $x \in l_\infty$, che è la (d).
Sia ora $c_0 \in l_\infty$ il sottospazio delle successioni convergenti a 0. Vogliamo verificare che $c_0 \subset KerL$. A tal scopo, basta verificare che $Ran(I - S)$ è denso in c_0. Sia $x = \{x_n\} \in c_0$, allora, dato $\varepsilon > 0$, esiste N tale che $|x_n| < \varepsilon$ per ogni $n \geq N$. Sia $y \in l_\infty$ la successione data da $y_1 = 0$, $y_k = \sum_{j=1}^{k-1} x_i$ per ogni $2 \leq k \leq N$ e $y_k = y_N$ per ogni $k \geq N$, Allora $Sy - y = \{x_1, x_2, \dots, x_N, 0, 0, \dots\}$, cosicchè $\|x - (Sy - y)\| < \varepsilon$.
Se ora $x \in C$, possiamo scrivere $x = (x - le) + le$ dove $l \doteq \lim_{n\to\infty} x_n$, da cui $L(x) = L(x - le) + L(le) = l$, poichè $(x - le) \in c_0$ e $L(e) = 1$; ciò mostra la validità della (b).
Resta da provare la positività di L. Supponiamo, per assurdo, che esiste $x \in l_\infty$ con $z \geq 0$ e $L(x) < 0$. Non è restrittivo supporre che $\|x\| \leq 1$, cioè che riesca $0 \leq x_n \leq 1$. Allora la successione $y = 1 - x$ è tale che $\|y\| \leq 1$ e $L(y) = 1 - L(x) > 1$, contro il fatto che $\|L\| = 1$. □

Talvolta un funzionale $L \in l_\infty^*$ con le proprietà espresse nell'enunciato del teorema precedente viene chiamato un limite di Banach ovvero limite generalizzato.
La proprietà di positività di L è equivalente alla monotonia di L è cioè che $L(x) \geq L(y)$ per ogni $x, y \in l_\infty$ con $x \geq y$ (*i.e.* $x_n \geq y_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$). Dalla proprietà di monotonia è possibile ricavare facilmente che valgono le diseguaglianze

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq L(x) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n \quad \text{per ogni } x \in l_\infty.$$

Se, infatti, poniamo $y_n = \sup_{i\geq n} x_n$ e $z_n = \inf_{i\geq n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, abbiamo $z \leq x \leq y$, cosicchè $L(z) \leq L(x) \leq L(y)$.
Per concludere bisogna osservare che $\{y_n\}$ e $\{z_n\}$ sono successioni convergenti a $\limsup_{n\to\infty} x_n$ e a $\liminf_{n\to\infty} x_n$ rispettivamente, pertanto $L(y) = \limsup_{n\to\infty} x_n$ e $L(z) = \liminf_{n\to\infty} x_n$.
Vogliamo concludere osservando che L non è un funzionale moltiplicativo, cioè esistono $x, y \in l_\infty$ tali che $L(xy) \neq L(x)L(y)$. A tal scopo, sia $x = (1, 0, 1, 0, \dots)$, allora $Sx = (0, 1, 0, 1, \dots)$, cosicchè $x + Sx = (1, 1, 1, 1, \dots)$; se ne ricava che $L(x + Sx) = 1$, da cui $L(x) = \frac{1}{2}$. Ora $x^2 = x$, ma $L(x)^2 = \frac{1}{4}$. Ciò mostra che L non può essere moltiplicativo.

L'esistenza dei limiti generalizzati trova numerose applicazioni in differenti contesti matematici. Molto interessante è la possibilità di esibire una rappresentazione fedele dell'algebra di *Calkin* $\mathcal{B}(H)/K(H)$ attraverso un limite di Banach, quando H è uno spazio di Hilbert separabile. Se $\{e_n\} \subset H$ è una base ortonormale, possiamo definire una forma lineare $\varphi : \mathcal{B}(H) \to \mathbb{C}$ ponendo $\varphi(T) = L(\{(Te_n, e_n)\})$ per ogni $T \in \mathcal{B}(H)$, dove L è un limite di Banach su l_∞. Si riconosce immediatamente che φ è uno *stato*, cioè un funzionale lineare positivo con $\varphi(I) = 1$. Se $(H_\varphi, x_\varphi, \pi_\varphi)$ è la terna di G.N.S. corrispondente, si verifica facilmente che $\pi_\varphi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H_\varphi)$ è una rappresentazione (con vettore ciclico $x_{\varphi \in H_\varphi}$) il cui nucleo coincide con l'ideale $\mathcal{K}(H)$ degli operatori compatti. Ciò significa che π_φ passa al quoziente $\mathcal{B}(H)/\mathcal{K}(H)$ come rappresentazione fedele (isometrica). Per i dettagli sulla terminologia introdotta consultare ad esempio [8], il libro di Dixmier [9] restando comunque una trattazione classica e più completa della teoria elementare delle C*-algebre.

Appendice D

Versioni geometriche del teorema di Hahn-Banach

Il teorema di Hahn-Banach ammette numerose formulazioni geometriche, molte delle quali trovano interessanti applicazioni in Analisi convessa. Queste versioni [1]del teorema concernono la possibilità di separare opportunamente sottoinsiemi convessi e disgiunti. Per semplicità considereremo il caso di uno spazio localmente convesso E sul campo reale $\mathbb{R}$.
Ricordiamo che due insiemi $A, B \subset E$ disgiunti possono essere separati da un iperpiano se esiste $\varphi \in E^*$ tale che $\varphi(x) \leq a$ per ogni $x \in A$ e $\varphi(y) \geq a$ per ogni $y \in B$, dove a è un opportuno numero reale. Se poi esiste $b < a$ tale che $\varphi(x) \leq b$ per ogni $x \in A$, allora diciamo che A e B possono essere separati in sensio stretto.
Qui sotto troviamo le più comuni forme geometriche del teorema di Hahn-Banach.

Teorema D.0.10 (Hahn-Banach: prima forma geometrica)**.** *Siano $A, B \subset E$ sottoinsiemi convessi e disgiunti, di cui uno aperto. Allora tali insiemi possono essere separati da un iperpiano.*

Dimostrazione. Sia $x \in E$ tale che $-x \in A - B \doteq \{y - z : y \in A, z \in B\}$. Definiamo $C \doteq A - B + \{x\}$. C è un insieme aperto e convesso, inoltre per costruzione $x \notin C$, perchè A e B sono disgiunti. Osserviamo anche che $0 \in C$ e che C è un insieme assorbente in quanto aperto. Sia p_C il corrispondente funzionale di Minkowski. Siccome $x \notin C$, si ha $p_C(x) \geq 1$, cosicchè $l(y) \leq p_C(y)$ per ogni $y \in \mathbb{R}x$ se $l(\lambda x) = \lambda$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Sia ora φ un'estensione di l a tutto E tale che $\varphi(y) \leq p_C(y)$ per ogni $y \in E$. Evidentemente $\varphi \in E^*$. Non resta da mostrare che A e B sono separati da tale funzionale lineare. Siano $a \in A$ e $b \in B$, in modo che $a - b + x \in C$, cosicchè $\varphi(a - b + x) \leq p_C(a - b + x) \leq 1$, da cui $\varphi(a) \leq \varphi(b) + 1 - \varphi(x) = \varphi(b)$. Siccome a e b sono arbitrari, concludiamo che $\sup_{a \in A} \varphi(a) \leq \inf_{b \in B} \varphi(b)$, che è proprio quanto volevamo verificare. □

[1]Nel caso normato esse sono dovute essenzialmente a *S. Mazur*, cfr. [29]

Teorema D.0.11 (Hahn-Banach: seconda forma geometrica)**.** *Se $A, B \subset E$ sono sottoinsiemi convessi, disgiunti e aperti, allora possono essere separati strettamente da un iperpiano.*

Dimostrazione. È una conseguenza pressocchè immediata del teorema precedente. Sia $\varphi \in E^*$ tale che l'iperpiano di equazione $\varphi(x) = a$ separa A e B. Siccome φ è non nullo, gli insiemi $\varphi(A), \varphi(B) \subset \mathbb{R}$ sono aperti (come è facile verificare, scivendo la decomposizione in somma diretta $E = Ker\varphi \oplus \mathbb{R}x_0$ con $\varphi(x_0) \neq 0$), inoltre la loro intersezione consta di al più un punto, dunque essa è vuota, da cui la conclusione. □

Teorema D.0.12 (Hahn-Banach: terza forma geometrica)**.** *Siano $A, B \subset E$ sottoinsiemi convessi e disgiunti. Se A è compatto e B è chiuso, allora possono essere separati strettamente da un iperpiano.*

Dimostrazione. Il teorema è una conseguenza non difficile della seconda versione geometrica. Dato $x \in A$ esiste U_x intorno aperto e convesso di O tale che $(x+U_x) \bigcap B = \emptyset$, grazie al fatto che B è chiuso. $\{(x+U_x) : x \in A\}$ costituisce un ricoprimento aperto di A, pertanto esistono $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$ tali che $A \subset \bigcup_{i=1}^{n}(x_i + U_{x_i})$. Definiamo $U \doteq \bigcap_{i=1}^{n} U_{x_i}$. U è evidentemente un intorno apeto e convesso do 0. Gli insiemi $A + \frac{1}{2}U$ e $B - \frac{1}{2}U$ sono aperti, convessi e disgiunti per costruzione, pertanto possono essere separati strttamente da un iperpiano. A fotiori, dunque, sono separabili strettamente anche A e B. □

Occorre segnalare che la forma analitica del teorema di Hahn-Banach e le sue formulazioni geometriche sono equivalenti. Il libro [49] di F. Tréves contiene un'interessante dimostrazione della forma analitica del teorema a partire dalla seguente proposizione di carattere geometrico:

Teorema D.0.13. *Sia E uno spazio localmente convesso, $N \subset E$ un sottospazio e $\Omega \subset E$ un sottoinsieme convesso ed aperto tale che $N \bigcap \Omega = \emptyset$. Esiste un iperpiano* chiuso *$H \subset E$ tale che $N \subset H$ e $H \bigcap \Omega = \emptyset$.*

Appendice E

Teorema di Krein-Milman

In questa appendice presentiamo una semplice dimostrazione del teorema di Krein-Milman dovuta a J. Kelley. Segnaliamo sin da ora che la prova di questo risultato dipende in maniera cruciale dall'assioma della scelta in una delle sue molteplici formulazioni. Il caso finito dimensionale, invece, può essere affrontato senza far ricorso a tale assioma, come è mostrato ad esempio in [26].
Da adesso in poi lavoreremo nel contesto degli spazi localmente convessi, sebbene sia possibile inserire alcune delle considerazioni preliminari in un quadro più generale.

Definizione E.0.13 (Facce di un convesso). *Sia $K \subset E$ un sottoinsieme convesso chiuso in uno spazio localmente convesso E. Un sottoinsieme convesso chiuso $F \subset K$ si dice una* faccia *di K se, dati $x, y \in K$, $tx + (1-t)y \in F$ per qualche $t \in (0,1)$ implica $x, y \in F$.*

Alcuni autori usano indicare le facce di un convesso col nome di *insiemi di supporto*.

Osservazione E.0.1. *Se $F \subset K$ è una faccia di K e $G \subset F$ è una faccia di F, allora G è anche una faccia di K, come è immediato riconoscere.*

La collezione delle facce di un convesso può essere ordinata per inclusione. Risulta evidente che un punto estremale è una faccia minimale; in ipotesi di compattezza vale anche il viceversa:

Lemma E.0.3. *Sia $K \subset E$ un sottoinsieme convesso compatto. Se $F \subset K$ è una faccia minimale, allora F consta di un unico punto estremale.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che F contenga almeno due punti distinti, diciamo x e y. Siccome E è uno spazio localmente convesso, esiste $\varphi \in E^*$ tale che $\varphi(x) > \varphi(y)$. Definiamo l'insieme $G \doteq \{z \in F : \varphi(z) = M\}$, M essendo il massimo di φ su F. Si riconosce facilmente che G è una faccia di

F e, siccome $y \notin F$, si ha l'inclusione propria $G \subset F$, contro la minimalità di F. □

Veniamo ora alla dimostrazione vera e propria del teorema di *Krein-Milman*:

Teorema E.0.14. *Sia $K \subset E$ un sottoinsieme convesso* compatto. *Allora ExtrK è non vuoto e il suo inviluppo convesso è denso in K.*

Dimostrazione. Sia $(\mathcal{F}, \preceq)$ la famiglia di tutte le facce di K con l'ordinamento parziale $\preceq$ dato dall'inclusione. Mostriamo che $(\mathcal{F}, \preceq)$ è un insieme induttivo. Sia, a tal scopo, $\{F_\alpha : \alpha \in I\} \subset \mathcal{F}$ una catena. Definiamo $F = \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$. Evidentemente $F \subset K$ è un sottoinsieme convesso chiuso. Osserviamo che F è l'intersezione di sottoinsiemi chiusi con la proprieta dell'intersezione finita, pertanto F è non vuoto, grazie alla compattezza di K. Applicando il lemma di Zorn, ricaviamo l'esistenza di una faccia minimale $F_0 \subset K$ e, quindi, di un punto estremale grazie al lemma precedente.
Sia ora C la chiusura dell'involucro convesso di *ExtrK*. In base a quanto visto finora, C è un sottoinsieme di K non vuoto. Se proviamo l'inclusione $K \subset C$, il teorema sarà completamente acquisito. Sia $x \notin C$. Grazie alla formulazione geometrica del teorema di Hanh-Banach, esiste $\varphi \in E^*$ tale che $\varphi(x) > \max_{y \in C} \varphi(y)$. Sia ora $M \in \mathbb{R}$ il massimo di φ assunto su K. L'insieme $\{z \in K : \varphi(z) = M\}$ è una faccia. Sia z_0 un suo punto estremale. Allora $z_0 \in C$, cosicche $M = \max_{y \in C} \varphi(y)$, da cui $\varphi(x) > \max_{y \in K} \varphi(y)$, cioè $x \notin K$, ciò che conclude la dimostrazione. □

Va segnalato che il teorema di Krein-Milman non è equivalente all'assioma della scelta, tuttavia lo è la seguente affermazione dove, in certo senso, il contenuto di tale teorema viene opportunamente unito a quello del teorema di *Banach-Alaoglu*:

Teorema E.0.15. *Se X è uno spazio di Banach, allora la palla unità dello spazio duale X_1^* contiene un punto estremale.*

Il lettore interessato può reperire i dettagli della dimostrazione in [3].

Appendice F

Compattificazione di Stone-Čech

Questa breve sezione è dedicata alla dimostrazione dell'esistenza della compattificazione di Stone-Čech per spazi completamente regolari. Seguiremo un approccio che sfrutta alcuni fatti elementari della teoria delle algebre di Banach, della quale una trattazione piuttosto approfondita è presentata nel libro di Larsen [27]; più sintetica è, invece, la presentazione contenuta nel classico libro di Katznelson [21], dove sono mostrate le applicazioni all'Analisi Armonica.
Il risultato preannunciato può essere enunciato alla maniera seguente:

Teorema F.0.16. *Sia X uno spazio completamente regolare. Allora esiste una (unica) coppia $(\beta X, i)$, dove βX è uno spazio compatto di Hausdorff e $i : X \to \beta X$ è un omeomorfismo fra X e $i(X)$, tale che $i(X)$ è denso in X; inoltre è soddisfatta la seguente proprietà universale: data un'applicazione continua*

$$F : X \to K$$

dove K è uno spazio compatto, esiste un'unica applicazione continua

$$\beta F : \beta X \to K$$

tale che $F = \beta F \circ i$.

Dimostrazione. Consideriamo l'algebra di Banach (commutativa) $C_b(X)$ delle funzioni continue e limitate su X con la norma uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.
Definiamo βX come lo spettro di tale algebra. Siccome $C_b(X)$ è unitale, βX è un compatto di Hausdorff.
Sia $i : X \to \beta X$ la mappa data da $i(x) = \omega_x$ per ogni $x \in X$, dove $\omega_x : C_b(X) \to \mathbb{C}$ è il funzionale lineare moltiplicativo dato dalla valutazione in x, cioè $\omega_x(f) = f(x)$ per ogni $f \in C_b(X)$.
La mappa i è iniettiva, infatti $i(x) = i(y)$ implica $f(x) = f(y)$ per ogni

$f \in C_b(X)$, sicchè $x = y$, X essendo completamente regolare. La continuità di i è un ovvia conseguenza del fatto che $\beta X \subset C_b(\mathbb{C})^*$ è munito della topologia *-debole. Inoltre, sempre grazie al fatto che X è $T_{3\frac{1}{2}}$, i ha inversa continua.
Per verificare la densità di $i(X)$ in βX, sia $\omega \in \beta X$ e V un suo intorno. Non è restrittivo supprre che V sia della forma $\{\eta \in \beta X : |\langle \eta - \omega, f\rangle| < \varepsilon\}$, con $f \in C_b(X)$ una funzione fissata. Si ha che $\langle \omega, f\rangle \in \sigma(f)$ ($\sigma(f)$ essendo lo spettro di f) e $\sigma(f)$ è la chiusura dell'immagine $f(X)$. Sia $x \in X$ tale che $|f(x) - \omega(f)| < \varepsilon$; allora, come è immediato riconoscere, $i(x) \in V$, ossia $i(X)$ è denso in βX.
Resta da provare la proprietà universale. Sia $F : X \to K$ un'applicazione continua. Indichiamo con $\Phi : C(K) \to C_b(X)$ l'omomorfismo di algebre indotto da tale applicazione, *i.e.* $\Phi(g) = g \circ F$ per ogni $g \in C(K)$. Per trasposizione, ne risulta indotta una mappa lineare $\Phi^* : C_b(X)^* \to C(K)$ che è continua per le topologie deboli*. Evidentemente, tale mappa applica funzionali moltiplicativi su funzionali moltiplicativi. Definiamo, allora, $\beta F : \beta X \to K$ (lo spettro di $C(K)$ è omeomorfo a K attraverso la corrispondenza $K \ni x \to \omega_x \in \sigma(C(K))$, dove ω_x è la valutazione in x) come la restrizione di Φ^* a βX. Dobbiamo provare che riesce $\beta F \circ i = F$. Sia $x \in X$, allora $\beta F \circ i)(x) = \Phi^*(\omega_x)$; ora $\langle \Phi^*(\omega_x), g\rangle = \langle \omega_x, \Phi(g)\rangle = \langle \omega_x, g \circ F\rangle = g(F(x))$ per ogni $g \in C(K)$, che è quanto volevamo provare. L'unicità dell'estensione βF è immediata conseguenza del fatto che $i(X)$ è denso in βX, che è uno spazio di Hausdorff. □

Fra le altre cose, la proprietà universale esprime la *massimalità* [1] della compattificazione di Stone-Čech. La controparte algebrica di tale costruzione è rappresentata dall'immersione di una C*-algebra (non unitale) nella C*-algebra dei suoi moltiplicatori, cfr. [35].

[1] Più precisamente, se $(\hat{X}, i)$ è una compattificazione di X, allora esiste un'applicazione continua e *surgettiva* $F : \beta X \to \hat{X}$.

Appendice G

Il teorema di Eberlein-Šmulian

La topologia debole su uno spazio di Banach X è metrizzabile quando ristretta ai sottoinsiemi limitati se e solo se X^* è separabile (per la dimostrazione di questo fatto rimandiamo a [11]); ciononostante la compattezza debole di un sottoinsieme $E \subset X$ pùò sempre essere espressa in termini di compattezza *sequenziale*: questo è il contenuto del celebre teorema di Eberlein-Šmulian.
Prima di darne l'enunciato preciso, richiamiamo le diverse nozioni di compattezza condizionale:

Definizione G.0.14. *Un sottoinsieme $A \subset S$ di uno spazio topologico S si dice:*

1. *condizionalmente compatto se la sua chiusura $\overline{A}$ è compatta*
2. *condizionalmente sequenzialmente compatto, se ogni successione $\{x_n\} \subset A$ ha un'estratta convergente*
3. *condizionalmente numerabilmente compatto se ogni successione $\{x_n\} \subset A$ ha un punto di accumulazione*

In uno spazio metrizzabile[1] le nozioni introdotte coincidono. In generale, invece, le nozioni sono distinte e, come è facile riconoscere, la compattezza condizionale implica la compattezza numerabile condizionale.
Con le definizioni date il teorema di Eberlein-Šmulian può essere enunciato come segue:

Teorema G.0.17 (Eberlein-Šmulian)**.** *Sia $E \subset X$ un sottoinsieme di uno spazio di Banach X. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *A è $\sigma(X, X^*)$ condizionalmente compatto.*
2. *A e $\sigma(X, X^*)$ condizionalmente sequenzialmente compatto.*
3. *A è $\sigma(X, X^*)$ condizionalmente numerabilmente compatto.*

[1] O, più in generale, in ogni spazio che soddisfa il primo assioma di numerabilità.

La dimostrazione di questo risultato è piuttosto delicata; seguiremo da vicino l'articolo [51] di R. Withley, che ha il pregio di fornirne una notevole semplificazione. Prima di procedere è opportuno segnalare che esiste una dimostrazione del teorema che sfrutta le proprietà delle basi di *Schauder* e delle successioni basiche; essa è dovuta essenzialmente a A. Pelczyński [36].

Alla dimostrazione del teorema facciamo precedere due risultati preliminari.

Lemma G.0.4. *Sia X uno spazio di Banach tale che X^* possiede una successione totale. Allora la topologia debole è metrizzabile su ogni sottoinsieme $E \subset X$ debolmente compatto.*

Dimostrazione. Sia $\{\varphi_n\} \subset X^*$ una successione totale, *i.e.* $\varphi_n(x) = 0$ per ogni n implica $x = 0$. Non è restrittivo supporre che $\|\varphi_n\| = 1$ per ohni n. Definiamo la funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$, ponendo $d(x, y) = \sum_n \frac{1}{2^n}|\varphi_n(x - y)|$ per ogni $x, y \in X$. Evidentemente trattasi di una distanza. Sia ora $E \subset X$ un sottoinsieme debolmente compatto. Per il teorema di Banach-Steinhaus E è limitato, pertanto la mappa identica $i : E \to (E, d)$ è continua, se E è munito della topologia debole. Siccome E è debolmente compatto, tale mappa è un omeomorfismo, ne segue che la topologia di E è metrizzabile. □

Osservazione G.0.2. Il risultato vale in particolare per gli spazi separabili. Se X è un tale spazio, esiste infatti una successione $\{x_n\} \subset X$ tale che $\|x_n\| = 1$ per ogni n, che è densa sulla sfera unitaria di X. Fissato $n \in \mathbb{N}$, sia $\varphi_n \in X^*$ tale che $\|\varphi_n\| = \varphi(x_n) = 1$. Si riconosce facilmente che la successione $\{\varphi_n\} \subset X^*$ è totale, riuscendo addirittura che $\sup_n |\varphi_n(x)| = \|x\|$ per ogni $x \in X$.

Corollario G.0.3. *Sia $E \subset X$ un sottoinsieme condizionalmente compatto rispetto alla topologia debole. Allora E è condizionalmente sequenzialmente compatto rispetto alla topologia debole.*

Dimostrazione. Sia $\{x_n\} \subset E$, dobbiamo mostrare che esiste una sottosuccessione debolmente convergente. Sia $Y \subset X$ il sottospazio chiuso separabile generato dalla successione $\{x_n\}$. L'insieme $E \cap Y$ è condizionalmente compatto per la topologia debole, perchè E è tale per ipotesi e Y è debolmente chiuso, quale convesso chiuso in norma. Grazie al risultato precedente, esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ $\sigma(Y, Y^*)$-convergente a $x \in X$. Se $\varphi \in X^*$, allora $\varphi \restriction_Y$ è un funzionale lineare continuo su Y, da cui la conclusione. □

Passiamo ora alla dimostrazione del teorema di Eberlein-Šmulian.

Dimostrazione. I risultati preliminari mostrano che si deve soltanto provare l'implicazione *3.* ⇒ *1.* A tal scopo, sia $E \subset X$ un sottoinsieme condizionalmente numerabilmente compatto. Se $\varphi \in X^*$, $\varphi(E) \subset \mathbb{C}$ è condizionalmente numerabilmente compatto, cioè ha chiusura compatta; in particolare è limitato. Per il teorema di Banach-Steinhaus E è limitato. Sia $J : X \to X^{**}$

l'iniezione canonica di X nel suo biduale. Sia $w^*(J(E)) \subset X^{**}$ la chiusura di $J(E)$ rispetto alla topologia $\sigma(X^**, X^*)$. Se mostriamo che $w^*(J(E)) \subset J(X)$ avremo la conclusione, grazie al teorema di Alaoglu, poichè J è un omeomorfismo lineare tra X con la topologia debole e l'immagine $J(X)$ con la topologia *-debole $\sigma(X^{**}, X^*)$, $w^*(J(E))$ essendo limitato in norma.
Sia $F \in w^*(J(E)))$, vogliamo dimostrare che esiste $x \in X$ tale che $F = j(x)$. Sia $\varphi_1 \in X^*$ con $\|\varphi_1\|$=1, allora esiste $e_1 \in E$ tale che $|\langle F - j(a_1), \varphi_1\rangle| < 1$, perchè $j(E)$ è +debolmente denso in $w^*(j(E))$. Il sottospazio di X^{**} generato da F e $F - j(a_1)$ è finito dimensionale, pertanto la sua sfera unitaria è un insieme compatto per la topologia della norma in particolare è totalmente limitato, cosicché esistono $F_1, F_2, \dots, F_n \in X^*$ a norma unitaria tali che $\bigcup_{j=1}^n B_{\frac{1}{4}}(F_j)$ contiene tale sfera. Scegliamo $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_{n(2)}$ in modo che $F_m(\varphi_m) > \frac{3}{4}$ per ogni $m = 2, 3, \dots, n(2)$. Segue che

$$\max\{|G(\varphi_m)| : 2 \leq m \leq n(2)\} \geq \frac{1}{2}\|G\|$$

per ogni $G \in \mathrm{span}\{F - j(e_1), F\}$.
Sfruttando ancora la densità di $j(E)$ in $w^*(j(E))$, ricaviamo che esiste $a_2 \in E$ tale che $\max\{|\langle F - j(a_2), \varphi_m\rangle| : 1 \leq m \leq n(2)\} < \frac{1}{2}$. Esattamente come sopra, segue che possiamo trovare $\varphi_{n(2)+1}, \varphi_{n(2)+2}, \dots, \varphi_{n(3)} \in X^*$ di norma unitaria tali che $\max\{|G(\varphi_m)| : n(2) < m \leq n(3)\} \geq \frac{1}{2}\|G\|$, per ogni $G \in \mathrm{span}\{F - j(a_1), F - j(a_2), F\}$. Siccome $F \in w^*(j(E))$, esiste $a_3 \in E$ tale che

$$\max\{|\langle F - j(a_3), \varphi_m| : 1 \leq m \leq n(3)\} < \frac{1}{3}$$

Chiaramente il procedimento continua per induzione per ogni $n \in \mathbb{N}$; in tal modo so ottiene una successione $\{a_n\} \subset E$ con le proprietà sopra descritte. Per ipotesi, esiste $x \in X$ che è un punto di accumulazione per tale successione. Sia $Y \subset X$ la chiusura (in norma) del sottospazio $\mathrm{span}\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Siccome Y è debolmente chiuso, segue che $x \in Y$, pertanto $F - j(X)$ appartiene alla chiusura (nella topologia *-debole) dello spazio $\mathrm{span}\{F, F - j(a_1), F - j(a_2), \dots, F - j(a_n), \dots\}$. Per costruzione, per ogni $G \in \mathrm{span}\{F - j(a_n)\} + \mathrm{span}\{F\}$, abbiamo che $\sup|G(\varphi_m)| \geq \frac{1}{2}\|G\|$ (per ogni $m = 1, 2, \dots, n$); siccome $F - j(x)$ è nella chiusura *-debole dell'unione di tali sottospazi, si ha che

$$|\langle F - j(x), \varphi_m\rangle| \geq \frac{1}{2}\|F - j(x)\| \quad \text{per ogni } m \tag{G.1}$$

Sempre dalla costruzione descritta segue che si ha anche la disuguaglianza $|\langle F - j(a_n), \varphi_m\rangle| < \frac{1}{p}$ per ogni $n > n(p) > m$. Allora

$$|\langle F - j(x), \varphi_m\rangle| \leq |\langle F - j(a_n), \varphi_m\rangle| + |\langle j(a_n - x), \varphi_m\rangle| \leq \frac{1}{p} + |\varphi_m(a_n - x)|$$

per ogni $n > n(p) > m$. Siccome x è un punto di accumulazione della successione $\{a_n\}$, dato φ_m e un intero $N > m$, esiste un elemento a_n tale che $|\varphi_m(a_n - x)| < \frac{1}{N}$ con $n > n(N) > m$; per tale elemento a_n si ha

$$|\langle F - j(a_n), \varphi_m \rangle| + |\varphi_m(a_n - x)| < \frac{2}{N}$$

da cui $\langle F - j(x), \varphi_m \rangle = 0$ per ogni m, da cui $F = j(x)$ grazie alla G.1. $\square$

Dal teorema segue che, in particolare, un sottoinsieme $K \subset X$ è debolmente compatto se e solo se è debolmente compatto per successioni.

Qui sotto alcuni dei corollari più noti del teorema: si tratta di applicazioni immediate.

Teorema G.0.18 (Eberlein-Šmulian)**.** *Uno spazio di Banach X è riflessivo se e solo se ogni successione limitata $\{x_n\} \subset X$ ammette una sottosuccessione debolmente convergente.*

Dimostrazione. Uno spazio di Banach X è *riflessivo* se e solo se la sua palla unità X_1 è debolmente compatta, cioè se e solo se X_1 è debolmente compatta per successioni. $\square$

Il risultato precedente permette anche di concludere che:

Corollario G.0.4. *Uno spazio di Banach X è riflessivo se e solo se ogni sottospazio chiuso e separabile $Y \subset X$ è riflessivo.*

Appendice H

Il teorema di Krein-Šmulian

Insieme al teorema di Banach-Alaoglu, il teorema di Krein-Šmulian è il risultato principale sulle topologie *deboli per i duali di spazi di Banach. L'enunciato del teorema è il seguente:

Teorema H.0.19. *Sia X uno spazio di* Banach. *Un sottoinsieme* convesso $C \subset X^*$ *è *-debolmente chiuso se e solo se $C \cap rX_1^*$ è *-debolmente compatto per ogni $r > 0$, X_1^* essendo la palla unità di X^*.*

Dimostrazione. La necessità della condizione è un'ovvia conseguenza del teorema di Banach-Alaoglu; dimostriamone, pertanto, la sufficienza. Cominciamo osservando che C è sicuramente chiuso in norma. Occorre provare che, se $\varphi \notin C$, allora $\varphi \notin \overline{C}^{\sigma(X^*,X)}$. Siccome $\varphi \notin C$, esiste $r > 0$ tale che $B_r(\varphi) \cap C = \emptyset$, dove $B_r(\varphi) = \{\eta \in X^* : \|\eta - \varphi\| < r\}$. Sostituendo C con $\frac{1}{r}(C - \varphi)$, non è restrittivo supporre che $X_1^* \cap C = \emptyset$.
Ora vogliamo provare che esiste una successione di insiemi finiti $F_n \subset X$ tali che $F_n \subset \frac{1}{n-1}X_1$ e

$$F_1^\circ \cap F_2^\circ \cap \cdots \cap F_n^\circ \cap C \cap nX_1^* = \emptyset \tag{H.1}$$

i polari essendo relativi alla dualità (X^*, X).
La prova è per induzione, il caso di $n = 1$ essendo banalmente verificato per ogni $F_1 \subset X^*$. Supponiamo, quindi, di aver costruito n sottoinsiemi finiti $F_1, F_2, \ldots F_n$ che soddisfano la H.1. Consideriamo l'insieme

$$D \doteq F_1^\circ \cap F_2^\circ \cap \cdots \cap F_n^\circ \cap C \ldots (n+1)X_1^*$$

Grazie alle ipotesi, D è convesso e *-debolmente compatto, inoltre $D \cap nX_1^* = \emptyset$ (ipotesi induttiva). Ciò significa che $D \cap (\frac{1}{n}X_1)^\circ = \emptyset$, ossia $\bigcap_{x \in \frac{1}{n}X_1} D \cap \{x\}^\circ = \emptyset$, da cui ricaviamo che esiste un insieme finito $F_n \subset \frac{1}{n}X_1^*$ tale che $F_n^\circ \cap D = \emptyset$, grazie alla proprietà dell'intersezione finita; ciò conclude il passo induttivo. L'insieme $\bigcup_n F_n$ è numerabile, sia $\{x_n\}$ una sua riscrittura come successione. Evidentemente si ha $\|x_n\| \to 0$, in modo che è ben definita l'applicazione lineare $T : X^* \to c_0$, ponendo $T\varphi = \{\varphi(x_n)\}$. Dato $m > 0$, riesce $mX_1^* \cap C \bigcap_n F_n^\circ = \emptyset$, ciò significa che, dato $\varphi \in C$, esiste n, tale che $|\varphi(x_n)| \geq 1$, cioè che $T(C)$ non interseca la palla (aperta) unità di c_0. Siccome $T(C)$ è convesso, si applica la forma geometrica del teorema di Hanh-Banach e si conclude che esiste $\lambda \in c_0^*$ tale che

$$\lambda(B_0) < t \leq \lambda(T(C)) \quad \text{per qualche } t \in \mathbb{R}$$

B_0 essendo la palla unità aperta di c_0. Se λ è scelto con norma 1, ricaviamo anche che $t \geq 1$. Ora $c_0^* \cong l_1$. Sia $\{\lambda_i\} \subset l_1$ la successione che corrisponde al funzionale λ e sia $x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \in X$ (la serie è assolutamente convergente, quindi è convergente, perchè X è completo). Dato $\varphi \in C$, si ha:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \varphi(x_i) = \lambda(T(\varphi)) \geq 1$$

ciò mostra che $0 \notin \overline{C}^{\sigma(X^*,X)}$.

□

Il teorema di Krein-Šmulian è ricco di conseguenze; fra le più note vi sono le seguenti:

Corollario H.0.5. *Sia X uno spazio di Banach. Un sottospazio $M \subset X^*$ è *-debolmente chiuso se e solo se la sua palla unità M_1 è *-debolmente chiusa.*

Corollario H.0.6. *Sia X uno spazio di Banach. Una forma lineare $F : X^* \to \mathbb{C}$ è *-debolmente continua se e solo se la sua restrizione a X_1^* è una funzione *-debolmente continua.*

Dimostrazione. Un'implicazione è ovvia. Sia $M = KerF$. Se la restrizione $g \doteq F \restriction_{X_1^*}$ è una funzione *debolmente continua, $M_1 = g^{-1}(0)$ è *-debolmente chiuso, cosicchè M è *-debolmente chiuso e, quindi, F è una forma lineare *-debolmente continua. □

Corollario H.0.7. *Sia X uno spazio di Banach* separabile. *Un sottospazio $M \subset X^*$ è *-debolmente chiuso se e solo se è* sequenzialmente *chiuso.*

Dimostrazione. Se M è sequenzialmente chiuso per la topologia *-debole, M_1 è chiuso in tale topologia, perchè la restrizione a X_1^* della topologia *-debole è *metrizzabile*, grazie all'ipotesi di separabilità. □

Corollario H.0.8. *Sia X uno spazio di Banach* separabile. *Una forma lineare $F : X^* \to \mathbb{C}$ è *-debolmente continua se e solo se è* sequenzialmente *continua rispetto a tale topologia.*

Il teorema e i suoi corollari trovano numerose applicazioni in contesti diversi. Ad esempio, in [34] viene data una presentazione dell'integrazione (in senso debole) per le funzioni a valori in spazi di Banach separabili, quale semplice applicazione del corollario H.0.8.
Prima di presentare un'elegante applicazione del teorema, nota essa stessa come teorema di Krein-Šmulian, preferiamo insistere su un aspetto poco discusso del teorema: la completezza di X.
Se X è uno spazio normato *non completo*, la conclusione del teorema non sussiste, come mostra il seguente controesempio.

Esempio H.0.3. Sia l_F lo spazio delle successioni numeriche a supporto finito, munto della norma del sup. Si ha $l_F^* \cong l_1$, perchè l'inclusione $l_F \subset c_0$ è densa e $c_0^* \cong l_1$. Sia $M \subset l_1$ il sottospazio dato da

$$M \doteq \left\{ a \in l_1 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} a_n = 0 \right\}$$

Osserviamo che *non* è $\sigma(l_1, l_F)$-chiuso, quale nucleo di una forma lineare che non è continua rispetto a tale topologia, provenendo dall' elemento $x = \left\{ \frac{1}{n^2} \right\} \in c_0 / l_F$. La palla unità M_1, ciononostante, è $\sigma(l_1, l_F)$-chiusa. Siccome l_F è separabile, basta mostrare che M_1 è *sequenzialmente* chiusa. Sia $\{a_k\}$ una successione in M con $\|a_k\| \leq 1$ per ogni k. Supponiamo che a_k converga ad un elemento $a \in l_1$ nella topologia $\sigma(l_1, l_F)$. Si ha senz'altro $\|a\| \leq 1$, pertanto resta da dimostrare soltanto che $a \in M$. A tal scopo, osserviamo preliminarmente che a_k tende ad a puntualmente, cioè $\lim_{k\to\infty} a_k(n) = a(n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia ora $\varepsilon > 0$. Allora esiste N tale che $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} |a_k(n)| < \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni k, grazie al fatto che $\{\frac{1}{n^2}\} \in l_1$ e $|a_k(n)| \leq 1$ per ogni k e per ogni n. Ora

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} a(n) \right| \leq \left| \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} a(n) \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} a(n) \right| \leq$$
$$\lim_{k\to\infty} \left| \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} a_k(n) \right| + \frac{\varepsilon}{2} = \lim_{k\to\infty} \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} a_k(n) \right| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

siccome ε è arbitrario, se ne conclude che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} a(n) = 0$, cioè che $a \in M$.

Il controesempio precedente non dipende dalla natura particolare di l_F; vale, infatti, la seguente proposizione, che, in certo senso, inverte il corollario H.0.6.

Proposizione H.0.4. *Sia X uno spazio normato. Se ogni sottospazio $M \subset X^*$ di codimensione 1 , tale che M_1 è *-debolmente chiusa, è *-debolmente chiuso, allora X è* completo*.*

Dimostrazione. Sia $\{x_n\} \subset X$ una successione di Cauchy. Sia $j : X \to X^{**}$ l'iniezione canonica di X nel suo biduale. La successione $\{j(x_n)\} \subset X^{**}$ è di Cauchy, pertanto esiste $F \in X^{**}$ tale che $\|F - j(x_n)\| \to 0$. Occorre mostrare che F è $\sigma(X^*, X)$-continuo e cioè che $M \doteq KerF$ è *-debolmente chiuso. In base alle ipotesi, basta verificare che M_1 è $\sigma(X^*, X)$-chiuso. Sia $\{\varphi_\alpha\}$ una rete appartenente a M_1, con $\varphi_\alpha \to \varphi \in X^*$ topologia *-debole. Dobbiamo verificare che $\varphi \in M$, cioè che $F(\varphi) = 0$. Ora

$$\begin{aligned} |F(\varphi)| \leq |(F - j(x_n))(\varphi)| + |j(x_n)(\varphi - \varphi_\alpha)| + |(j(x_n) - F)(\varphi_\alpha)| \leq \\ 2\|F - j(x_n)\| + |\varphi(x_n) - \varphi_\alpha(x_n)| \quad \text{per ogni } n, \alpha \end{aligned}$$

Dato $\varepsilon > 0$, sia n_0 tale che $\|F - j(x_{n_0})\| < \frac{\varepsilon}{3}$ e sia α_0 tale che $|\varphi(x_{n_0}) - \varphi_\alpha(x_{n_0})| < \frac{\varepsilon}{3}$, allora $|F(\varphi)| < \varepsilon$, da cui $F(\varphi) = 0$, ciò che conclude la prova. □

Di seguito l'applicazione già citata: si tratta di un risultato molto riposto, sebbene l'enunciato potrebbe non darlo a intendere, esprimendo un contenuto intuitivo ed aspettato.

Teorema H.0.20 (Krein-Šmulian)**.** *Sia X uno spazio di Banach e $K \subset X$ un insieme debolmente compatto, allora $\overline{\operatorname{conv} K}$ è debolmente compatto.*

Dimostrazione. Cominciamo a dimostrare il teorema nel caso in cui X sia *separabile*. Pensiamo K munito della topologia debole e consideriamo lo spazio di Banach $C(K)$ delle funzioni continue su K, in modo che $C(K)^* = \mathcal{M}(K)$. Se $\mu \in \mathcal{M}(K)$, definiamo $F_\mu : X^* \to \mathbb{C}$, ponendo

$$F_\mu(\varphi) = \int_K \varphi(x) \mathrm{d}\mu(x)$$

Trattasi evidentemente di una forma lineare continua, infatti si ha $\|F_\mu\| \leq \|\mu\| \sup_{x \in K} \|x\|$ Vogliamo mostrare che F_μ è $\sigma(X^*, X)$ continuo. Siccome X è separabile, basta verificare che lo è *sequenzialmente*, ma ciò è conseguenza immediata del teorema di convergenza dominanta di Lebesgue. Pertanto esiste ed è unico $x_\mu \in X$ tale che $F_\mu(\varphi) = \varphi(x_\mu)$ per ogni $\varphi \in X^*$. La corrispondenza $\mathcal{M}(K) \ni \mu \to x_\mu \in X$ è lineare, diciamola T. Si tratta di un'applicazione continua, quando $\mathcal{M}(K)$ è munito della topologia *debole (vaga) e X della topologia debole, infatti $\langle \varphi, T(\mu) \rangle = \int_k \varphi(x) \mathrm{d}\mu \in X^*$ per ogni $\varphi \in X^*$. Sia $C \subset \mathcal{M}(K)$ il sottoinsieme convesso delle misure di probabilità su K. Grazie al teorema di Alaoglu, C è compatto nella topologia vaga, pertanto $T(C)$ è convesso e debolmente compatto. Per concludere non resta da osservare che $K \subset C$. Se $x \in K$, si ha $T(\delta_x) = x$, da cui segue l'inclusione voluta.

Passiamo ora a dimostrare il teorema nel caso generale. Occorre provare che conv$K$ ha chiusura compatta. Per il teorema di *Eberlein-Šmulian*, basta dimostrare che ogni successione $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset K$ ha un'estratta convergente. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste un insieme finiti $F_n \subset K$ tale che $x_n \in F_n$.

Poniamo $F = \cup_n F_n$ e sia $M \subset X$ il sottospazio chiuso generato da F.M è separabile e $K_1 = K \cap M$ è debolmente compatto, pertanto convK_1 è debolmente precompatto, grazie a quanto già dimostrato, ne segue che esiate una sottosuccessione $\{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ debolmente convergente. Ciò conclude la prova. $\square$

La dimostrazione del teorema precedente è dovuta a R. Whitley [52]; una dimostrazione che evita i teoremi di Krein-Šmulian e di Eberlein-Šmulian è data, invece, in [47].

Bibliografia

[1] J. F. Aarnes, *On the Mackey-topology for a von Neumann algebra*, Math. Scand. **22** (1968), 87-107.

[2] F. Albiac, N.J. Kalton, *Topics in Banach Space Theory*, Springer, Graduate Texts in Mathematics **233**, 2005.

[3] J. L. Bell, D. H. Fremlin, *A geometric form of the Axiom of choice*, Fundamenta Mathematicae **77**, 1972.

[4] E. Bishop, R. R. Phelps, *A proof that every Banach space is subreflexive*, Bull. Amer. Math. Soc. **67** (1961), 97-98; MR **23** # A503.

[5] E. Bishop, R. R. Phelps, *The support functionals of a convex set*, Convexity (V. L- Klee, ed.), Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 7, American Mathematical Society, Providence R. I., 1963, 27-35; MR **27** # 4051.

[6] J. Bonet, B. Cascales, *Non complete Mackey topologies on Banach spaces*, Bull. Australian Math. Soc., to appear.

[7] H. Brezis, *Analisi funzionale: Teoria e applicazioni*, Liguori Editore, 1986.

[8] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics **96** 1989.

[9] J. Dixmier, *Les C*-algèbres at leurs représentations*, Gauthier-Villars, 1969.

[10] J. Dixmier, *Sur un théorème de Banach*, Duke Math. J. **15**, 1057-1071, 1948.

[11] N. Dunford, J.T. Schwartz, *Linear operators* (3 volumes), Interscience, 1958.

[12] I.M. Gel'fand, N. Ya. Vilenkin, *Generalized functions*, ***Applications of Harmonic Analysis*** (vol **4**), Academic Press, 1964.

[13] G. Godefroy, *Existence and uniqueness of isometric preduals: a survey*, Banach space theory (Iowa City, IA, 1987) 131-193 Contemp. Math **85**, Amer. Math. Soc., ProveR.I. 1989.

[14] T. Ito, *On Banach spaces with unique isometric preduals*, Michigan Math. J. **24**, 1977.

[15] R. C. James, *A non reflexive Banach space isometric with its second conjugate space*, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **37** (1951), 174-177.

[16] R. C. James, *Charaterizaton of reflexivity*, Studia Math, **23** 1964, 205-216.

[17] R. C. James, *Reflexivity and the sup of linear functionals*, Israel J. Math **13** 1972 , 289-300.

[18] R. C. James, *A counterexample for a sup theorem in normed space*, Israel J. Math. **9** 1971, 511-512.

[19] R. C. James, *Bases and reflexivity of Banach spaces*, Bull. Amer. Math Soc. **56** 1950, 58 (abstract 80).

[20] S. Kaiser, *A note on dual Banach spaces*, Math. Scand. **41**, 325-330, 1977.

[21] Y. Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis*, 3^d edition, Cambridge University Press, 2004.

[22] J. L. Kelley, *General Topology*, D. Van Nostrand Co., Inc, Princeton, N. J., 1955.

[23] J. L. Kelley, *The Tychonoff product theorem implies the Axiom of Choice*, Fundamenta Mathematica **37**, 75-76, 1950.

[24] J. L. Kelley, I. Namioka, *Linear Topological Spaces*, D. Van Nostrand Company, INC. (1963).

[25] V. Klee, *Some characterizations of reflexivity*, Rev. Ci. (Lima) **52** 1950, 15-23.

[26] S. Lang, *Algebra lineare*, Bollati Boringhieri, 1970.

[27] R. Larsen, *Banach algebras: an Introduction*, M. Dekker, New York, 1973.

[28] W. Luxemburg, *Two application of the method of construction by ultrapowes to analysis*, Bull. A.M.S. **68**, 416-419.

[29] S. Mazur, *Über convexe Mengen in linearen normierten Raumen*, Studia Math. **4** (70-84), 1933.

[30] R. E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics **183**, 1998.

[31] E. H. Moore, H. L. Smith, *A general theory of limits*, American Journal of Mathematics **44** (2), 102-121, 1922.

[32] L. Nachbin, *Topological vector spaces of continuous functions*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **40**, 471-474, 1954.

[33] I. M. Ostrovskii, *Weak* sequential closures in Banach space theory and their applications*, General Topology in Banach space, Nova Science, New York 2001, 31-34.

[34] G. K. Pedersen, *Analysis Now*, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics **118**, 1989.

[35] G. K. Pedersen, *C*-algebras and their automorphism groups*, Academic Press, London, 1979.

[36] A. Pelczyński, *A proof of the Eberlein-Šmulian theorem by an application of basic sequences*, Bull. Polon. Sci. Ser. Math. Astr et Phys **12**, 543-548, 1964.

[37] R. R. Phelps, *Subreflexive normed linear spaces*, Arch. Math. (Basel) **8**, 444-450, 1957.

[38] A. Pietsch, *Nuclear Locally Convex Spaces*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **66**, Springer-Verlag, 1972.

[39] M. Reed, B. Simon, *Fourier Analysis, Self-Adjointness (Methods of Modern Mathematical Physics, Vol 2)*, Academic Press, 1975.

[40] H. L. Royden, *Real Analysis*, The Macmillan Company, New York, 1963.

[41] S. Sakai, *A characterization of W*-algebras*, Pacific J. Math. **6** (1956), 763-773.

[42] S. Sakai, *The theory of W*-algebras*, Yale University, 1962. (Mimeographed).

[43] S. Sakai, *On topology of finite W*-algebras, III. J. Math **9** (1965), 236-241.*

[44] S. Sakai, *C*-algebras and W*-algebras*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1971.

[45] H. H. Schaefer, *Topological Vector Spaces*, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics **3**, 1964.

[46] T. Shirota, *On locally convex vector spaces of continuous functions* Proc. Jap. Acad. **30**, 294-298, 1954.

[47] S. Simons, *Krein's theorem without sequential convergence*, Math. Ann. **174**, 157-162, 1967.

[48] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras I*, Encyclopedia of Mathematical Sciences, Operator Algebras and Non-Commutative Geometry, Springer, 2001 (2^{nd} edition).

[49] F. Trèves, *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*, Academic Press, 1967.

[50] R. Warner, *Weak* dense subspace of* $L^\infty(\mathbb{R})$, Math. Ann. **197** (3), 180-181, 1972.

[51] R. Whitley, *An elementary proof of the Eberlein-Šmulian theorem*, Math. Annalen **172**,116-118, 1967.

[52] R. Whitley, *The Krein-Smulian theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **97** (vol 2), 376-377, 1986.

[53] A. Wilansky, *Modern Methods in Topological Vector Spaces*, McGraw-Hill International Book Company, Advanced Book Program, 1978.