Capitolo 11

Il teorema di Riemann–Roch

In questo capitolo rivolgeremo la nostra attenzione alla superfici di Riemann compatte. Dimostreremo il teorema di Riemann–Roch, che fornisce una stima, e in molti casi il calcolo esatto, della dimensione dello spazio vettoriale delle funzioni meromorfe, definite su di una fissata superficie di Riemann compatta, aventi un preassegnato comportamento polare. Tramite questo teorema studieremo le applicazioni analitiche di una superficie di Riemann compatta in uno spazio proiettivo. Studieremo cioè le realizzazioni di una superficie di Riemann compatta come curva algebrica proiettiva, trovando i legami esistenti tra la geometria estrinseca di queste curve e quella intrinseca della superficie di Riemann da cui si è partiti. Studieremo in particolare la curva canonica e le curve pluricanoniche che traducono in termini di invarianti proiettivi la geometria bianalitica di una superficie di Riemann compatta. Nel fare ciò introdurremo il linguaggio classico delle serie lineari e quello, più moderno, delle sezioni di un fascio, che può essere visto come un modo intrinseco di introdurre coordinate proiettive su di una superficie di Riemann.
Se X è una superficie di Riemann denoteremo indifferentemente con i simboli $\Omega^1(X)$ e $H^{1,0}(X)$ lo spazio dei differenziali olomorfi su X.

1 Relazioni bilineari di Riemann

Sia X una superficie di Riemann compatta di genere $g \geq 1$. In questa sezione dimostriamo una relazione bilineare tra i periodi di forme differenziali su X. Sia

$$X_0 = X \setminus \{\gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_{2g}\}$$

il poligono ottenuto ottenuto tagliando X lungo i cicli $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}$.

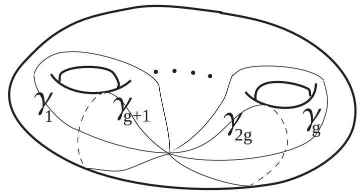

Figura 1

Con queste notazioni X_0 è un poligono con il simbolo

$$\gamma_1\,\gamma_{g+1}\,\gamma_1^{-1}\,\gamma_{g+1}^{-1}\cdots\gamma_g\,\gamma_{2g}\,\gamma_g^{-1}\,\gamma_{2g}^{-1}\ .$$

Se φ è una 1-forma differenziale definita in un intorno di $\gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_{2g}$ diremo che

$$\Pi_\nu = \int_{\gamma_\nu} \varphi\ , \qquad\qquad \nu = 1, \ldots, 2g\,,$$

è il *ν-esimo periodo di φ.* Dato un differenziale olomorfo ω, poniamo

$$\pi_\nu = \int_{\gamma_\nu} \omega\ , \qquad\qquad \nu = 1, \ldots, 2g\,.$$

Essendo X_0 semplicemente connessa, si può scrivere

$$\omega = df$$

con f olomorfa in X_0. Vogliamo dimostrare la seguente relazione

$$\int_{\partial X_0} f\varphi = \sum_{\nu=1}^{g} (\pi_\nu \Pi_{g+\nu} - \pi_{g+\nu}\Pi_\nu) \tag{1.1}$$

Naturalmente la funzione olomorfa f non è definita su X. In altri termini il valore che f assume su un punto p di un lato γ_i di X_0 non è uguale al valore che essa assume nel punto p' corrispondente a p nel lato γ_i^{-1}. Consideriamo la seguente figura

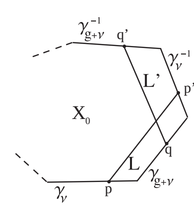

Figura 2

I punti p e p' (risp. q e q') sono punti che vanno nello stesso punto di X quando si identificano γ_ν e γ_ν^{-1} (risp. $\gamma_{g+\nu}$ e $\gamma_{g+\nu}^{-1}$). Il cammino L (risp. L'), quando visto su X, è omologo a $\gamma_{g+\nu}$ (risp. γ_ν^{-1}). Quindi si ha:

$$f(p') - f(p) = \int_p^{p'} \omega = \int_L \omega = \int_{\gamma_{g+\nu}} \omega = \pi_{g+\nu}\,, \qquad p \in \gamma_\nu\,, \tag{1.2}$$

$$f(q') - f(q) = \int_q^{q'} \omega = \int_{L'} \omega = \int_{\gamma_\nu^{-1}} \omega = -\int_{\gamma_\nu} \omega = -\pi_\nu\,, \quad q \in \gamma_{g+\nu}\,. \tag{1.3}$$

D'altro canto

$$\int_{\partial P} f\varphi = \sum_{\nu=1}^{g} \left[\int_{\gamma_\nu} f\varphi + \int_{\gamma_\nu^{-1}} f\varphi + \int_{\gamma_{g+\nu}} f\varphi + \int_{\gamma_{g+\nu}^{-1}} f\varphi \right] .$$

Dalla (1.2) e dalla (1.3) si deduce che

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_\nu} f(p)\varphi + \int_{\gamma_\nu^{-1}} f(p')\varphi &= \int_{\gamma_\nu} f(p)\varphi - \int_{\gamma_\nu} \left(f(p) + \pi_{g+\nu}\right)\varphi = -\pi_{g+\nu}\Pi_\nu\,, \\ \int_{\gamma_{g+\nu}} f(q)\varphi + \int_{\gamma_{g+\nu}^{-1}} f(q')\varphi &= \int_{\gamma_{g+\nu}} f(q)\varphi - \int_{\gamma_{g+\nu}} \left(f(q) - \pi_\nu\right)\varphi = \pi_\nu\Pi_{g+\nu}\,. \end{aligned}$$

Sommando si ottiene la relazione bilineare (1.1). Q.E.D.

2 Differenziali meromorfi e loro periodi

In questa sezione vogliamo mostrare come dal teorema di Hodge e dalla relazione bilineare (1.1) si possono trarre interessanti conseguenze per i periodi dei differenziali meromorfi. Fissiamo una superficie di Riemann compatta di genere g. Il teorema di Hodge ci dice che lo spazio $\mathcal{H}^1(X)$ delle 1-forme differenziali armoniche (complesse) ha dimensione $2g$ e che l'omomorfismo naturale

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1(X) &\longrightarrow H^1_{dk}(X,\mathbb{C}) \\ \varphi &\longmapsto [\varphi] \end{aligned} \tag{2.1}$$

è un isomorfismo. Lo spazio delle forme armoniche ammette una decomposizione in somma diretta

$$\mathcal{H}^1(X) = \Omega^1(X) \oplus \overline{\Omega^1(X)}\,, \tag{2.2}$$

dove $\Omega^1(X)$ indica lo spazio delle 1-forme olomorfe su X. La decomposizione è data da

$$\varphi = \frac{1}{2}\left(\varphi + i * \varphi\right) + \frac{1}{2}\left(\varphi - i * \varphi\right)\ . \tag{2.3}$$

In particolare si ha

$$\dim_{\mathbb{C}} \Omega^1(X) = g\ . \tag{2.4}$$

Gli elementi di $\Omega^1(X)$, e cioè i differenziali olomorfi, prendono anche al nome di *differenziali abeliani*. La prima osservazione che vogliamo fare riguarda i periodi dei differenziali abeliani.

Consideriamo la base simplettica $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}$ di $H_1(X, \mathbb{Z})$, introdotta nella sezione 1 del capitolo 7, e prendiamo un differenziale olomorfo $\omega \in \Omega^1(X)$. Poiché su di una superficie di Riemann compatta non vi sono funzioni olomorfe non-costanti il differenziale ω, se non-nullo, non può essere esatto. Equivalentemente

$$\omega = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\gamma_i} \omega = 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, 2g \ .$$

Ebbene, noi vogliamo mostrare che, ad assicurare che ω sia eguale a zero, basta lo svanimento dei primi g-periodi. In altri termini vogliamo mostrare che

$$\omega = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\gamma_\nu} \omega = 0 \quad , \quad \nu = 1, \ldots, g \ . \tag{2.5}$$

La prima ossservazione è che

$$\omega = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_X \omega \wedge * \overline{\omega} = 0 \ , \tag{2.6}$$

Essendo $\overline{\omega}$ antiolomorfo, si ha che $*\overline{\omega} = i\,\overline{\omega}$. Posto

$$\pi_\nu = \int_{\gamma_\nu} \omega$$

si ha

$$\overline{\pi}_\nu = \int_{\gamma_\nu} \overline{\omega}$$

Se $\omega = df$ in X_0, la relazione bilineare (1.1) ci dice allora che

$$\begin{aligned} \int_X \omega \wedge * \overline{\omega} &= i \int_{X_0} df \wedge \overline{\omega} \\ &= i \int_{\partial X_0} f \overline{\omega} = i \sum_{\nu=1}^{g} (\pi_\nu \overline{\pi}_{g+\nu} - \pi_{g+\nu} \overline{\pi}_\nu) \end{aligned}$$

La (2.5) segue subito da questa relazione e dalla (2.6). Abbiamo dunque dimostrato la seguente proposizione.

Proposizione 2.1 *Sia X una superficie di Riemann compatta di genere g. Sia $\omega \in \Omega^1(X)$ un differenziale olomorfo su X. Sia $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}$ una base simplettica per $H_1(X, \mathbb{Z})$. Allora*

$$\omega = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\gamma_1} \omega = \cdots = \int_{\gamma_g} \omega = 0 \ .$$

Questa proposizione ci dice, in particolare, che l'applicazione lineare

$$\begin{array}{ccc} \Omega^1(X) & \longrightarrow & \mathbb{C}^g \\ \omega & \longmapsto & \left(\int_{\gamma_1} \omega, \dots, \int_{\gamma_g} \omega\right) \end{array}$$

è iniettiva, ed è quindi un *isomorfismo* per ragioni dimensionali. Dunque esiste una base $\omega_1, \dots, \omega_g$ di $\Omega^1(X)$ tale che

$$\int_{\gamma_j} \omega_i = \delta_{ij} \ . \tag{2.7}$$

Si dice che una tale base è *normalizzata rispetto alla base simplettica* $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$ di $H_1(X, \mathbb{Z})$. Fissiamo dunque una tale base normalizzata e studiamo i periodi di $\omega_1, \dots, \omega_g$ rispetto ai rimanenti cicli $\gamma_{g+1}, \dots, \gamma_{2g}$. Studiamo cioè la matrice

$$\tau = (\tau_{ij}) = \left(\int_{\gamma_{g+j}} \omega_i\right) \ . \tag{2.8}$$

Dimostriamo innanzi tutto che la τ è una matrice *simmetrica.* Osserviamo preliminarmente che essendo ω_i e ω_j olomorfe e quindi di tipo (1,0) si ha $\omega_i \wedge \omega_j = 0$. A questo punto calcoliamo l'integrale di $\omega_i \wedge \omega_j$ esteso ad X usando ancora la relazione bilineare (1.1). Se $\omega_i = df_i$ in X_0, si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= \int_X \omega_i \wedge \omega_j = \int_{X_0} df_i \wedge \omega_j = \int_{\partial X_0} f_i \omega_j \\ &= \sum_{h=1}^{g} \delta_{ih}\tau_{jh} - \tau_{ih}\delta_{jh} \\ &= \tau_{ji} - \tau_{ij} \ . \end{aligned}$$

Mostriamo ora che la matrice simmetrica $Im\,\tau$ è *definita positiva.* Vogliamo dimostrare che se $x = {}^t(x_1, \dots, x_g) \in \mathbb{R}^g$ è un vettore non-nullo allora ${}^t x\,(Im\,\tau)\,x > 0$. Sia $\omega = \sum_{i=1}^{g} x_i\,\omega_i$, si ha

$$\pi_\nu = \sum_{i=1}^{g} x_i \delta_{i\nu} \qquad \nu = 1, \dots, g\,,$$

$$\pi_{g+\nu} = \sum_{j=1}^{g} x_j \tau_{j\nu} \qquad \nu = 1, \dots, g\,.$$

Tenenedo conto del fatto che le x_i sono reali e che $\tau_{j\nu} = \tau_{\nu j}$

$$\begin{aligned} 0 < \int_X \omega \wedge *\overline{\omega} &= \sqrt{-1} \sum_{\nu=1}^{g} (\pi_\nu \overline{\pi}_{g+\nu} - \pi_{g+\nu}\overline{\pi}_\nu) \\ &= \sqrt{-1} \sum_{\nu=1}^{g} (x_i x_j (\overline{\tau}_{j\nu} - \tau_{j\nu})) \\ &= 2 \sum_{\nu=1}^{g} x_i x_j (Im\ \tau_{j\nu}) \end{aligned}$$

Le relazioni che abbiamo appena dimostrato prendono il nome di *relazioni bilineari di Riemann*. Riassumendo possiamo enunciare il seguente

Relazioni Bilineari di Riemann 2.2 *Sia X una superficie di Riemann compatta di genere $g \geq 1$. Sia $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}$ una base simplettica per $H_1(X, \mathbb{Z})$ e $\omega_1, \ldots, \omega_g$ una base di $\Omega^1(X)$ tale che*

$$\left(\int_{\gamma_j} \omega_i \right)_{\substack{i=1,\ldots,g \\ j=1,\ldots,g}} = I\ .$$

Allora la matrice

$$\left(\int_{\gamma_{g+j}} \omega_i \right)_{\substack{i=1,\ldots,g \\ j=1,\ldots,g}} = \tau$$

è simmetrica con parte immaginaria definita positiva.

Una conseguenza immediata del precedente teorema è che l'applicazione

$$\begin{aligned} \chi : \quad H_1(X,\mathbb{Z}) &\longrightarrow \Omega^1(X)^* \\ \gamma &\longmapsto \left(\omega \to \int_\gamma \omega \right) \end{aligned} \tag{2.9}$$

è iniettiva. Infatti sia

$$\gamma = \sum_{i=1}^{2g} n_i \gamma_i \quad \in \quad Ker(\chi)\,.$$

Allora

$$0 = \int_\gamma \omega_j = n_j + \sum_{k=1}^{g} n_{g+k} \tau_{jk}.$$

Separando la parte immaginaria da quella reale otteniamo $2g$ equazioni che, usando un'ovvia notazione matriciale, possiamo scrivere come

$$Ym = 0\,, \qquad n + Xm = 0,$$

dove $\tau = X + iY$, $n = {}^t(n_1, \ldots, n_g)$ e $m = {}^t(n_{g+1}, \ldots, n_{2g})$. Poiché Y è invertibile, si ha $m = 0$ e dunque anche $n = 0$. Q.E.D.

Terminiamo questa sezione applicando la relazione bilineare (1.1) ai periodi delle 1-forme meromorfe. Sia dunque φ una 1-forma meromorfa su X i cui poli non cadono sul bordo del poligono X_0. In particolare φ è C^∞ in un intorno di $\gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_{2g}$. Sia ω un differenziale olomorfo e scriviamo come al solito $\omega = df$ in X_0. Il differenziale $f\varphi$ è meromorfo in X_0. Per il teorema dei residui si ha

$$\int_{\partial P} f\varphi = 2\pi\, i \sum_{p \in P} \mathrm{Res}_p\, f\varphi\ .$$

e quindi

$$2\pi\, i \sum_{p \in P} \mathrm{Res}_p\, f\varphi = \sum_{\nu=1}^{g} \left(\pi_\nu \Pi_{g+\nu} - \pi_{g+\nu} \Pi_\nu\right)\ . \tag{2.10}$$

Esercizi

1. Dimostrare che in una superficie di Riemann compatta l'unico differenziale olomorfo con tutti i periodi reali è il differenziale nullo.
2. In un toro complesso $X = \mathbb{C}/\Lambda$, sia $\{\gamma_1, \gamma_2\}$, una base simplettica di $H^1(X, \mathbb{Z})$ Calcolare

$$\int_{\gamma_1} dz \int_{\gamma_2} \mathcal{P}(z) dz - \int_{\gamma_2} dz \int_{\gamma_1} \mathcal{P}(z) dz$$

3 Divisori e equivalenza lineare

Sia X una superficie di Riemann compatta di genere g. Ricordiamo, dalla prima sezione del Capitolo 8, il linguaggio dei divisori e indichiamo con $Div(X)$ il gruppo dei divisori su X:

$$Div(X) = \left\{ D = \sum_{i=1}^{k} n_i\, p_i \,|\, n_i \in \mathbb{Z}, p_i \in X \right\}\ . \tag{3.1}$$

Come si è già notato, ogni divisore si può scrivere, in modo unico, come differenza di due divisori positivi con supporto disgiunto

$$D = D^+ - D^- \quad , \quad \mathrm{supp}(D^+) \cap \mathrm{supp}(D^-) = \emptyset\ . \tag{3.2}$$

Dato un divisore D, scriviamo

$$D^+ = \sum_{i=1}^{k} n_i \, p_i \quad , \quad D^- = \sum_{j=1}^{h} m_j \, q_j \ , \tag{3.3}$$

e denotiamo con $\mathcal{L}(D)$ lo spazio vettoriale complesso i cui elementi sono le funzioni meromorfe su X che sono olomorfe in $X \setminus \{p_1, \ldots, p_k\}$, che hanno in p_i un polo di molteplicità minore o uguale a n_i e che hanno nei punti q_j degli zeri di ordine almeno uguale a m_j. In simboli

$$\mathcal{L}(D) = \{f \in \mathcal{M}(X) \,|\, (f) + D \geq 0\} \ . \tag{3.4}$$

Scrivendo, come d'uso, $(f) = (f)_0 - (f)_\infty$ la condizione $(f) + D \geq 0$ si traduce nella condizione

$$(f)_0 + D^+ \geq (f)_\infty + D^- \ ,$$

e dunque, essendo i supporti di $(f)_0$ e $(f)_\infty$ disgiunti, essa è equivalente alle due condizioni

$$(f)_\infty \leq D^+ \quad , \quad (f)_0 \geq D^- \ . \tag{3.5}$$

Dunque le funzioni di $\mathcal{L}(D)$ hanno poli "non peggiori" di quelli prescritti da D^+ e zeri "più forti" o eguali a quelli prescritti da D^-. Che $\mathcal{L}(D)$ sia uno spazio vettoriale è evidente perché facendo combinazioni lineari di funzioni in $\mathcal{L}(D)$ non possono crearsi poli al di fuori dei punti p_i, e in quei punti i poli di tali combinazioni lineari avranno molteplicità minori o uguali di quelle prescritte da D^+.
Simile argomentazione, ma di segno opposto, vale per gli zeri. Per combinazione lineare gli zeri non possono distruggersi. Tutt'al più se ne creano di nuovi, o di più forti dove già ve ne erano. In modo analogo si considerano spazi di differenziali meromorfi con preassegnati zeri e preassegnati comportamenti polari. Precisamente, dato un divisore D, si pone

$$\mathcal{I}(D) = \{\omega \in \Omega^1_{mero}(X) \ \big| \ (\omega) - D \geq 0\} \ . \tag{3.6}$$

La condizione appena scritta si traduce nelle due relazioni

$$(\omega)_\infty \leq D^- \quad , \quad (\omega)_0 \geq D^+ \ . \tag{3.7}$$

Introduciamo ora la fondamentale relazione di equivalenza lineare tra divisori. Due divisori D e D' si dicono *linearmente equivalenti* se esiste una funzione meromorfa $f \in \mathcal{M}(X)$ tale che

$$(f) = D - D' \ . \tag{3.8}$$

In questo caso si scrive

$$D \sim D' \ ,$$

ad indicare che D e D' sono linearmente equivalenti. Dalla definizione segue subito che divisori linearmente equivalenti hanno lo stesso grado

$$D \sim D' \Longrightarrow \deg\, D = \deg\, D' \ .$$

Un'altra conseguenza è che se D e D' sono linearmente equivalenti allora $\mathcal{L}(D)$ e $\mathcal{L}(D')$ sono canonicamente isomorfi. In effetti se vale la (3.8) si ha che

$$h + D \geq 0 \Leftrightarrow (h) + (f) + D' \geq 0 \ ,$$

e dunque vi è un isomorfismo canonico

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(D) &\xrightarrow{\cong} \mathcal{L}(D') \\ h &\longmapsto hf \ . \end{aligned} \tag{3.9}$$

Dato un divisore D, la *serie lineare completa individuata da* D è l'insieme di tutti i divisori positivi linearmente equivalenti a D. Questo insieme si denota col simbolo $|D|$:

$$|D| = \{D' \in Div(X)\,|D' \geq 0 \ , \ D' \sim D\} \ . \tag{3.10}$$

Una serie lineare $|D|$ ha una naturale struttura di spazio proiettivo complesso. Infatti vi è un'applicazione biunivoca

$$\mathbb{P}\mathcal{L}(D) \longrightarrow |D| \tag{3.11}$$

definita da

$$[h] \longmapsto D' = (h) + D \ .$$

Scriveremo

$$\dim |D| = \dim \mathcal{L}(D) - 1 \ .$$

Come si vedrà nel seguito, un ruolo importante sarà giocato dalla *serie canonica*. Per definizione un *divisore canonico* K è il divisore degli zeri di un differenziale olomorfo

$$K = (\omega)_0 \quad , \quad \omega \in \Omega^1(X) \ .$$

Osserviamo che

$$|K| = \{(\varphi)_0 \ | \ \varphi \in \Omega^1(X)\} \ . \tag{3.12}$$

In effetti, se $K' \sim K$, allora esiste $f \in \mathcal{M}(X)$ con $(f) = K' - K$ e dunque $\varphi = f\omega$ è un differenziale meromorfo che è però sprovvisto di poli (gli zeri di ω cancellano i poli di f) ed è dunque olomorfo. Per definizione si ha $(\varphi)_0 = K'$, viceversa, dato un differenziale olomorfo $\varphi \in \Omega^1(X)$, posto $K' = (\varphi)$, e detta f la funzione meromorfa definita da $f = \omega/\varphi$, si ha

$$(f) = K - K' \ ,$$

e la (3.12) è dimostrata.
Terminiamo questa sezione dimostrando che, dato un qualsiasi divisore $D \in Div(X)$, e un qualsiasi divisore K nella serie canonica, vi è un isomorfismo

$$\mathcal{I}(D) \xrightarrow{\cong} \mathcal{L}(K - D) \ . \tag{3.13}$$

Se $K = (\omega)_0$, con $\omega \in \Omega^1(X)$ l'isomorfismo (3.13) è dato da

$$\varphi \longmapsto \varphi/\omega \ .$$

In effetti

$$(\varphi) - D \geq 0 \Leftrightarrow (\varphi/\omega) + K - D \geq 0 \ .$$

Esercizi

1. Dimostrare che su una superficie di Riemann compatta S di genere $g \geq 1$, qualunque siano i punti P e Q con $P \neq Q$, i divisori D e $D + P - Q$ non sono linearmente equivalenti.
2. Dimostrare che in $\hat{\mathbb{C}}$ tutti i divisori dello stesso grado sono linearmente equivalenti.
3. Verificare che su un toro complesso ogni divisore canonico è principale.

4 Il teorema di Riemann–Roch

Ferme le notazioni della sezione precedente, il teorema di Riemann- Roch si può enunciare nel modo seguente.

Teorema di Riemann-Roch 4.1 . *Sia X una superficie di Riemann compatta di genere g. Sia D un divisore su X. Allora gli spazi $\mathcal{L}(D)$ e $\mathcal{I}(D)$ sono di dimensione finita, e detta $l(D)$ e $i(D)$ le loro rispettive dimensioni si ha*

$$l(D) - i(D) = \deg\, D - g + 1 \ .$$

Prima di iniziare la dimostrazione osserviamo che, in virtù dell'isomorfismo (3.13), la formula di Riemann–Roch può anche scriversi nella forma

$$l(D) - l(K - D) = \deg\, D - g + 1 \ . \tag{4.1}$$

Iniziamo la dimostrazione del teorema di Riemann–Roch trattando il caso in cui $D \geq 0$. Sia $D = n_1\, p_1 + \cdots + n_k\, p_k$ con $p_i \neq p_j$ per $i \neq j$ e $n_i > 0$, $i = 1, \ldots, k$. Scegliamo una coordinata locale z_i intorno a p_i e tale che $z_i(p_i) = 0$. Definiamo lo spazio vettoriale delle *code di Laurent* (o anche delle *parti principali*) relative a D ponendo

$$P_D = \left\{ (F_1, \ldots, F_k) \,|\, F_i = \frac{a^i_{-n_i}}{z_i^{n_i}} + \cdots + \frac{a^i_{-1}}{z_i} \ , \ a^i_h \in \mathbb{C} \right\} \ . \tag{4.2}$$

Possiamo riguardare P_D come un sottospazio vettoriale di

$$\mathbb{C}((z_1)) \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}((z_k))$$

Chiaramente si ha

$$\dim_{\mathbb{C}} P_D = \sum n_i = deg(D) \ . \tag{4.3}$$

Data una funzione meromorfa $f \in \mathcal{L}(D)$ possiamo ad essa associare la k-pla delle sue code di Laurent nei punti $p_1, \ldots, p_k$ relativamente alle coordinate $z_1, \ldots, z_k$. Se si ottiene la k-pla nulla la funzione f non ha poli nei punti p_i e poiché essa è olomorfa in $X \smallsetminus \{p_1, \ldots, p_k\}$, deve essere necessariamente una costante. Abbiamo quindi definito un'applicazione lineare

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathcal{L}(D) & \longrightarrow & P_D \\ f & \longmapsto & \begin{pmatrix} \text{code di Laurent di } f \text{ nei} \\ \text{punti } p_i \text{ rel. alle coord. } z_i \end{pmatrix} \end{array}$$

il cui nucleo è $\mathbb{C}$. Dunque c'è un'inclusione

$$\phi : \mathcal{L}(D)/\mathbb{C} \hookrightarrow P_D$$

il che mostra, tra l'altro, che $\mathcal{L}(D)$ è finito dimensionale. Consideriamo ora l'applicazione bilineare

$$\begin{array}{ccc} P_D \ \times \ \Omega^1(X) & \xrightarrow{Res} & \mathbb{C} \\ ((F_1, \ldots, F_k)\,,\ \omega) & \mapsto & \sum_{i=1}^k \mathrm{Res}_{p_i} F_i \omega \ . \end{array} \tag{4.4}$$

Vogliamo dimostrare che questa applicazione bilineare induce un'applicazione bilineare non degenere

$$P_D/\left(\mathcal{L}(D)/\mathbb{C}\right) \quad \times \quad \Omega^1(X)/\mathcal{I}(D) \xrightarrow{Res} \mathbb{C} \ . \tag{4.5}$$

Dimostrato questo avremo che

$$deg(D) - l(D) + 1 = g - i(D) \ ,$$

che è la formula di Riemann–Roch, per $D \geq 0$. Dobbiamo quindi verificare due cose. La prima è che dato $\omega \in \Omega^1(X)$

$$\sum_{i=1}^k Res_{p_i} F_i \omega = 0 \quad , \quad \forall \ \ (F_1, \ldots, F_k) \in P_D \Leftrightarrow \omega \in \mathcal{I}(D) \, . \tag{4.6}$$

La seconda è che, dato $(F_1, \ldots, F_k) \in P_D$, si ha

$$\sum_{i=1}^k Res_{p_i} F_i \omega = 0 \quad , \quad \forall\, \omega \in \Omega^1(X) \Leftrightarrow (F_1, \ldots, F_k) = \phi(f) \tag{4.7}$$

con $f \in \mathcal{L}(D)$. Dimostriamo la (4.6). Chiaramente se $(\omega)_0 = D = \sum n_i\, p_i$ si ha $\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}_{p_i} F_i\omega = 0$. Viceversa se vale questa condizione per ogni $(F_1, \ldots, F_k) \in P_D$, allora $\mathrm{Res}_{p_1}(\omega/z_1) = 0$ e dunque ω ha almeno uno zero in p_1, ma deve valere anche $\mathrm{Res}_{p_1}(\omega/z_1^2) = 0$ e quindi $v_{p_1}(\omega) \geq 2$. Così procedendo si vede che deve essere $v_{p_1}(\omega) \geq n_1$ e similarmente $v_{p_i}(\omega) \geq n_i$ e perciò $\omega \in \mathcal{I}(D)$. Per quello che riguarda la (4.7), una delle due implicazioni è immediata. Infatti se $(F_1, \ldots, F_k) = \phi(f)$ si ha, per il teorema dei residui,

$$\sum_{i=1}^{k} Res_{p_i} F_i\omega = \sum_{i=1}^{k} Res_{p_i} f\omega = \sum_{p\in X} Res_p f\omega = 0\,.$$

Dunque il nucleo della dimostrazione del teorema di Riemann-Roch è il seguente teorema di esistenza.

Teorema 4.2 *Sia $D = \sum_{i=1}^{k} n_i p_i$ un divisore positivo su di una superficie di Riemann compatta X. Sia $(F_1, \ldots, F_k) \in P_D$. Se*

$$\sum_{i=1}^{k} Res_{p_i} F_i\omega = 0 \quad , \quad \forall\, \omega \in \Omega^1(X)$$

allora esiste una funzione meromorfa $f \in \mathcal{L}(D)$ che ha in p_i parte principale uguale a F_i.

Ridurremo questo teorema di esistenza per funzioni meromorfe al seguente teorema di esistenza per differenziali meromorfi.

Teorema 4.3 *Sia $p \in X$ un punto di una superficie di Riemann compatta e z una coordinata locale intorno a p con $z(p) = 0$. Sia k un intero, $k \geq 1$. Allora esiste un differenziale meromorfo $\varphi \in \Omega^1_{mero}(X)$ tale che*

1. *φ è olomorfo in $X \setminus \{p\}$*
2. *$\varphi - d\left(1/z^k\right)$ è olomorfo intorno a p.*

Dim. La dimostrazione procede in modo identico a quella del Teorema() del Capitolo 11. Sia λ una funzione con supporto in un intorno di p e identicamente eguale a 1 intorno a p si consideri la forma

$$\psi = d\left(\frac{\lambda}{z^k}\right) \in \mathcal{E}^1_{comp}(X)$$

questa forma è C^∞ in $X \setminus \{p\}$ e intorno a p e del tipo $d\left(1/z^k\right)$. La forma $\psi + i * \psi$ è C^∞ in tutta X perché $*d\left(1/z^k\right) = -i\, d\left(1/z^k\right)$. Per il teorema di decomposizione di Hodge si ha

$$\psi - i * \psi = df + *dg + \omega_h\ ,$$

con $f,\, g \in \mathcal{E}^0(X)$ e $\omega_h \in \mathcal{H}^1(X)$. Poniamo $\mu = \psi - df = i * \psi + *dg + \omega_h$. In $X \smallsetminus \{p\}$ si ha $d\psi = 0$ e dunque

$$d\mu = d * \mu = 0 \ .$$

Ne segue che μ è armonica in $X \smallsetminus \{p\}$ e dunque

$$\varphi = \frac{1}{2}\,(\mu + i * \mu)$$

è olomorfa in $X \smallsetminus \{p\}$. Intorno a p si ha

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2}(\mu + i * \mu) = \frac{1}{2}(\psi + i * \psi) - \frac{1}{2}(df + i * df) \\ &= d\left(\frac{1}{z^k}\right) + \gamma \ . \end{aligned}$$

dove γ è una 1-forma olomorfa. Q.E.D.

Corollario 4.4 *Sia* $(F_1, \ldots, F_k) \in P_D$ *allora esiste* $\varphi \in \Omega^1_{mero}(X)$ *tale che* φ *è olomorfa in* $X \smallsetminus \{p_1, \ldots, p_k\}$ *e* $\varphi - dF_i$ *è olomorfa intorno a* p_i.

Dim. Se $F_i = \frac{a^i_{-n_i}}{z_i^{n_i}} + \cdots + \frac{a^i_{-1}}{z_i}$ allora

$$dF_i = a^i_{-n_i}\, d\left(\frac{1}{z_i^{n_i}}\right) + \cdots + a^i_{-1}\, d\left(\frac{1}{z_i}\right) \ .$$

Basta applicare il lemma precedente e fare opportune combinazioni lineari.
Q.E.D.

Possiamo ora dimostrare il Teorema 4.2. Sia dato $(F_1, \ldots, F_k)$ tale che

$$\sum \mathrm{Res}_{p_i} F_i \omega = 0\,, \quad \forall\, \omega \in \Omega^1(X) \ . \tag{4.8}$$

Si scelga φ come nel corollario. A questo punto basta dimostrare che φ è *esatta* in $X \smallsetminus \{p_1, \ldots, p_k\}$. Infatti se $\varphi = df$ allora f è una funzione olomorfa in $X \smallsetminus \{p_1, \ldots, p_k\}$ che ammette una estensione meromorfa a tutta X avente F_i come parte principale nel punto p_i. Per dimostrare che φ è esatta in $X \smallsetminus \{p_1, \ldots, p_k\}$ basta dimostrare che per ogni cammino chiuso γ in $X \smallsetminus \{p_1, \ldots, p_k\}$

$$\int_\gamma \varphi = 0\,.$$

Una base di $H_1(X \smallsetminus \{p_1, \ldots, p_k\}, \mathbb{Z})$ è data da

$$\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}, \partial D_1, \ldots, \partial D_k$$

dove ∂D_i è il bordo di un disco parametrico D_i intorno a p_i non contente alcun p_j con $j \neq i$. Bisogna quindi dimostrare che

$$\int_{\gamma_i} \varphi = \int_{\partial D_j} \varphi = 0\,, \qquad i = 1, \ldots, 2g\,,\;\; j = 1, \ldots, k$$

Sia $\omega_1, \ldots, \omega_g$ un base normalizzata di $\Omega^1(X)$ rispetto alla base simplettica $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}$, cosicché

$$\int_{\gamma_j} \omega_i = \delta_{ij} \quad i, j = 1, \ldots, g\;. \tag{4.9}$$

A meno di sostituire φ con

$$\varphi - \sum_{i=1}^{k} \left(\int_{\gamma_i} \varphi \right) \omega_i\;,$$

che è un'altra forma meromorfa soddisfacente le tesi del corollario, si può assumere che

$$\int_{\gamma_i} \varphi = 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, g\;. \tag{4.10}$$

Si ha inoltre

$$\int_{\partial D_i} \varphi = \int_{\partial D_i} d\,F_i = Res_{p_i} d\,F_i = 0\;.$$

Infatti per $k \geq 1$, $Res_0\, d\left(1/z^k\right) = 0$. Rimane da mostrare che

$$\int_{\gamma_{g+i}} \varphi = 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, g\;. \tag{4.11}$$

Per fare ciò usiamo la formula bilineare (2.10). Si considera il poligono fondamentale X_0 ottenuto tagliando X lungo i cicli γ_i e si scrive $\omega_j = dh_j$ in X_0. Ricordando che $\{\omega_1, \ldots, \omega_g\}$ è una base normalizzata e utilizzando la 4.10 si ottiene

$$\begin{aligned} 2\pi\, i \sum_{p \in X_0} \mathrm{Res}_p\, h_j\, \varphi &= \sum_{j=1}^{g} \left[\left(\int_{\gamma_j} \omega_j \right) \left(\int_{\gamma_{g+j}} \varphi \right) - \left(\int_{\gamma_{g+j}} \omega_j \right) \left(\int_{\gamma_j} \varphi \right) \right] \\ &= \int_{\gamma_{g+j}} \varphi \end{aligned}$$

Poiché $\mathrm{Res}_{p_i}\, d(h_j\, F_i) = 0$, si ha

$$\begin{aligned} \sum_{p \in P} \mathrm{Res}_p\, h_j\, \varphi &= \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}_{p_i} h_j\, \varphi \\ &= -\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}_{p_i}\, \omega\, F_i\;, \end{aligned}$$

e per ipotesi l'ultima somma è nulla. Q.E.D.

Abbiamo quindi dimostrato il teorema di Riemann–Roch per un qualsiasi divisore positivo. In particolare se K è un divisore canonico e cioè se

$$K = (\omega)_0 \quad , \quad \omega \in \Omega^1(X) \ ,$$

si ha che $\mathcal{I}(K)$ è lo spazio unidimesionale generato da ω. Dunque $i(K) = 1$. D'altro canto $l(K) = i(0) = g$ e quindi

$$g - 1 = \deg K - g + 1 \ ,$$

ovvero

$$\deg K = 2g - 2 \ , \tag{4.12}$$

Avevamo già dimostrato questo risultato ammettendo l'esistenza di una funzione meromorfa non-costante su X e usando la formula di Hurwitz. Dimostriamo ora il teorema di Riemann-Roch per un divisore generale. Osserviamo che se $l(D) \neq 0$ allora esiste $f \in \mathcal{L}(D)$, $f \neq 0$ tale che

$$(f) + D = D' \geq 0$$

e dunque esiste un divisore $D' \geq 0$ tale che $D' \sim D$. Si ha dunque per la (3.9) e la (3.13) che $l(D) = l(D')$, $i(D) = i(D')$, $\deg D = \deg D'$ e dunque il teorema di Riemann–Roch è dimostrato non appena $l(D) \neq 0$. Supponiamo ora che $l(K - D) \neq 0$ allora, per quello che si è appena detto, vale il teorema di Riemann–Roch per $K - D$ e usando la (4.12) si ottiene

$$\begin{aligned} l(K-D) - l(D) &= \deg(K-D) - g + 1 \\ &= 2g - 2 - deg(D) - g + 1 \\ &= g - 1 - degD \end{aligned}$$

che è il teorema di Riemann–Roch per D. Dunque il teorema è dimostrato in tutti i casi tranne che nel caso in cui $l(D) = l(K - D) = 0$. In questo caso dobbiamo semplicemente dimostrare che deg $D = g - 1$. Scriviamo $D = D^+ - D^-$ con $D^- > 0$, altrimenti non vi è nulla da dimostrare. Osserviamo che $i(K + D^-) = 0$ perché un differenziale olomorfo non nullo può avere al più $2g - 2$ zeri. Si ha

$$0 = l(D) \geq l(D^+) - \deg D^-$$

perchè imporre degli zeri vuole dire imporre condizioni lineari e dunque si ha

$$\begin{aligned} 0 = l(D) &\geq l(D^+) - \deg D^- \\ &= i(D^+) + \deg D^+ - \deg D^- - g - 1 \ . \end{aligned}$$

Similmente

$$\begin{aligned} 0 = l(K-D) &\geq l(K + D^-) - \deg D^+ \\ &= i(K + D^-) + \deg(K + D^-) - \deg D^+ - g + 1 \\ &= \deg D^- - \deg D^+ + g - 1 \ . \end{aligned}$$

Confrontando si conclude che

$$\deg D = \deg D^+ - \deg D^- = g - 1 \ .$$

Q.E.D.

Diamo subito alcune applicazioni del teorema di Riemann–Roch. Innanzitutto vogliamo dimostrare un lemma che utilizzeremo di continuo. Qui, come in precedenza, X denoterà una superficie di Riemann compatta di genere g.

Lemma 4.5 *Sia D un divisore su X con $\deg D \geq 2g$. Sia $p \in X$. Allora*

$$l(D-p) = l(D) - 1 \ .$$

Dim. Si ha

$$l(D) = \deg D - g + 1 + i(D) > 0 \ ,$$

e dunque si può assumere che D sia positivo. Stesso ragionamento vale per $D-p$. D'altro canto D e $D-p$ sono divisori positivi di grado maggiore di $2g-2$ e dunque $i(D) = i(D-p) = 0$, perché un differenziale olomorfo non-nullo non può avere più di $2g-2$ zeri. Il lemma, a questo punto, segue immediatamente dal teorema di Riemann–Roch. Q.E.D.

Come prima applicazione dimostriamo un teorema che avevamo già dimostrato nella sezione 3 del Capitolo 8.

Teorema 4.6 *Siano f e g due funzioni meromorfe su X. Allora esiste un polinomio irriducibile $P(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ tale che $P(f,g) = 0$.*

Dim. Sia $D = (f)_\infty$, e $\Delta = (g)_\infty$. Sia $V_n \subset \mathbb{C}[x,y]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a n. Si consideri l'applicazione lineare

$$\begin{array}{rcl} \phi : V_n & \longrightarrow & \mathcal{L}\left(n(D+\Delta)\right) \\ Q(x,y) & \longmapsto & Q(f,g), \end{array}$$

per $n \gg 0$ si ha, per il teorema di Riemann–Roch,

$$l\left(n(D+\Delta)\right) = n(\deg D + \deg \Delta) - g + 1 \,.$$

D'altro canto si ha

$$\dim_{\mathbb{C}} V_n = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

ne segue che, per $n \gg 0$

$$\dim_{\mathbb{C}} V_n > \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}\left(n(D+\Delta)\right) \ ,$$

e dunque ϕ ha un nucleo non banale. Se $F(x,y)$ è un elemento non-nullo di Ker ϕ e se $P_1(x,y)P_2(x,y)\cdots P_k(x,y) = F(x,y)$ è una fattorizzazione di F in fattori irriducibili si ha

$$\prod_{i=1}^{k} P_i(f,g) = 0$$

e dunque per continuazione analitica esiste i tale che $P_i(f,g) = 0$.

Q.E.D.

Sempre nella sezione 3 del Capitolo 8 , per dimostrare che ogni superficie di Riemann compatta è la superficie di Riemann di una curva algebrica piana avevamo bisogno di un risultato sull'esistenza di funzioni meromorfe che ora siamo in grado di dimostrare.

Teorema 4.7 *Sia X una superficie di Riemann compatta. Esistono su X due funzioni meromorfe non–costanti f e g che godono della seguente proprietà. Sia n il grado di f allora esiste un punto $p \in X$ tale che*

1. $f^{-1}(p) = \{p_1, \ldots, p_n\}$, $p_i \neq p_j$ *per* $i \neq j$,
2. *nessuno dei* p_i *è un polo di* g,
3. $g(p_i) \neq g(p_j)$, *per* $i \neq j$.

Dim. La prima affermazione è banale. Sia D il divisore definito da $D = p_1 + \cdots, p_n$ e sia $\Delta = q_1 + \cdots + q_N$ un divisore tale che $q_i \neq p_j \ \forall\, i,j$ e tale che $N - n \gg 0$. Per verificare le altre affermazioni basta dimostrare che l'applicazione

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathcal{L}(\Delta) & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ g & \longmapsto & (g(p_1), \ldots, g(p_n)) \end{array}$$

è suriettiva. D'altro canto

$$\text{Ker } \phi = \mathcal{L}(\Delta - D)$$

e l'ipotesi che $N - n \gg 0$ ci consente di usare n volte il lemma (3.16) e ottenere

$$\dim(\text{Ker } \phi) = \dim \mathcal{L}(\Delta) - n \ .$$

Dunque l'immagine di ϕ è n-dimensionale.

Q.E.D.

Un'altra applicazione del teorema di Riemann–Roch è il teorema di esistenza su i differenziali meromorfi che generalizza il Teorema 4.3 e il Corollario 4.4.

Teorema 4.8 *Siano $p_1, \dots, p_n \in X$ e siano $F_1, \dots, F_n$ code di Laurent in $p_1, \dots, p_n$. Sia*

$$F_i = \frac{a^i_{-n_i}}{z_i^{n_i}} + \cdots + \frac{a^i_{-1}}{z_i}, \qquad i = 1, \dots, n,$$

dove z_i è una coordinata locale intorno a p_i con $z_i(p_i) = 0$. Allora esiste su X un differenziale meromorfo φ, olomorfo in $X \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ e tale che $\varphi - F_i\, dz_i$ sia olomorfo intorno a p_i se e solo se

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}\ F_i\ dz_i = 0\ .$$

*Dim.*Facendo uso del Teorema 4.4, ci si riduce, per linerità, al caso in cui $n = 2$, $F_1 = a/z_i$, $F_2 = b/z_2$. Consideriamo l'applicazione

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathcal{I}(-p_1 - p_2) & \longrightarrow & \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \\ \varphi & \longmapsto & (\mathrm{Res}_{p_1}\varphi, \mathrm{Res}_{p_2}\varphi)\ . \end{array}$$

Poiché $Im\,\Phi \subset \{(a, -a) \,|\, a \in \mathbb{C}\}$, dobbiamo semplicemente mostrare che $Im\,\Phi$ ha dimensione 1. D'altro canto, essendo X compatta, non vi sono funzioni olomorfe non costanti e quindi $l(-p_1 - p_2) = 0$. Ne segue che

$$i(-p_1 - p_2) = l(-p_1 - p_2) - \deg(-p_1 - p_2) + g - 1 = g + 1\ ,$$

mentre $Ker\,\Phi = \Omega^1(X)$ è g-dimensionale.

Q.E.D.

Un'altra osservazione che ci sarà utile nel seguito è la seguente.

Lemma 4.9 *Sia D un divisore positivo tale che* $\deg D = 2g - 2$ *e $l(D) \geq g$ allora D è un divisore canonico. In particolare $l(D) = g$.*

Dim. Per il teorema di Riemann–Roch si ha

$$g \leq l(D) = i(D) + 2g - 2 - g + 1$$

e dunque $i(D) \geq 1$. Ne segue che esiste un differenziale olomorfo $\omega \in \Omega^1(X)$ con $(\omega)_0 \geq D$ ma, per ragione di gradi, deve essere $(\omega)_0 = D$.

Come corollario di questo lemma possiamo ritrovare un risultato sulle *curve piane non-singolari* che avevano dimostrato per altra via. Sia

$$C = \{[X_0, X_1, X_2] \in \mathbb{P}^2\mathbb{C} \mid F(X_0, X_1, X_2) = 0\}$$

una curva piana non-singolare. Facendo uso della formula di Hurwitz abbiamo dimostrato che il genere di C è dato da

$$g(C) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} \ . \tag{4.13}$$

Data un' altra curva piana algebrica proiettiva Γ non contenente C,

$$\Gamma = \left\{ [X_0, X_1, X_2] \in \mathbb{P}^2\mathbb{C} \mid G(X_0, X_1, X_2) = 0 \right\} \ ,$$

dove quindi il polinomio omogeneo G non è diviso da F, si può definire *il divisore intersezione tagliato da* Γ *su* C

$$\Gamma \cdot C = \sum_{p \in C} I\left(p, \Gamma \cap C\right) p \tag{4.14}$$

nel modo seguente. Si considera un polinomio omogeneo $H(X_0, X_1, X_2)$ dello stesso grado di G che non si annulli in p e si osserva che posto $x = X_1/X_0$, $y = X_2/X_0$ la funzione

$$\frac{G(X_0, X_1, X_2)}{H(X_0, X_1, X_2)} = \frac{G(1, x, y)}{H(1, x, y)}$$

si restringe, su C, a una funzione meromorfa perché così accade a x e y. Non solo, questa funzioneè regolare in p. Si definisce dunque

$$I(p, \Gamma \cap C) = \nu_p \left(\frac{G}{H} \right) \ . \tag{4.15}$$

Se si fosse partiti da un altro polinomio omogeneo H' dello stesso grado di G e non nullo in p si sarebbe ottenuto

$$\nu_p \left(\frac{G}{H} \right) = \nu_p \left(\frac{G}{H'} \frac{H'}{H} \right) = \nu_p \left(\frac{G}{H} \right) + \nu_p \left(\frac{H'}{H} \right) = \nu_p \left(\frac{G}{H} \right)$$

e dunque la definizione è ben posta. Dalla definizione segue che $I(p, \Gamma \cap C) = 0$ se $p \notin \Gamma \cap C$.
Dimostriamo ora che se m è il grado di Γ allora

$$\deg \Gamma \cdot C = m \cdot n \tag{4.16}$$

e che se Γ' è un'altra curva di grado m non contenente C allora

$$\Gamma \cdot C \sim \Gamma' \cdot C \ . \tag{4.17}$$

A meno di cambiare coordinate possiamo sempre supporre che la retta $L = \{X_1 = 0\}$ incontri la curva C in n-punti distinti e che per ognuno di essi la proiezione sull'asse $X_2 = 0$ sia una coordinata locale. Dunque

$$L \cdot C = P_1 + \cdots + P_n \ .$$

In particolare se $L^m = \{X_1^m = 0\}$ si ha che

$$L^m \cdot C = m\,P_1 + \cdots + m\,P_n \tag{4.18}$$

e quindi

$$\deg(L^m \cdot C) = mn\ . \tag{4.19}$$

Per concludere basta ora osservare che dalle definizioni segue che se

$$\begin{array}{rcl} \Gamma & = & \{G(X_0, X_1, X_2) = 0\} \\ \Gamma' & = & \{G'(X_0, X_1, X_2) = 0\} \end{array}$$

allora

$$\Gamma \cdot C - \Gamma' \cdot C = \left(\frac{G}{G'}\right)\ . \tag{4.20}$$

Vogliamo ora mostrare che *le curve piane proiettive di grado* $d-3$ *tagliano su* C *la serie canonica* e cioè che

$$|K| = \{\Gamma \cdot C \ \mid\ \Gamma \text{ curva di grado } d-3\}\ . \tag{4.21}$$

Fissiamo un divisore $D = \Gamma \cdot C$ con Γ una curva di grado $d-3$ di equazione $G = 0$. Chiaramente

$$\mathcal{L}(D) \supseteq W_{d-3} = \left\{ \left(\frac{H}{G}\right)|_C : H = H(X_0, X_1, X_2) \text{ omg. di grado } d-3 \right\}\ .$$

Si ha

$$\begin{array}{rcl} \dim W_{d-3} & = & \binom{d-3+2}{2} = g \\ \deg D & = & (d-3)d = 2\dfrac{(d-1)(d-2)}{2} - 2 = 2g-2\ . \end{array}$$

Per il lemma (4.9) si può concludere che $D = K$ è un divisore canonico e che

$$\mathcal{L}(D) = W_{d-3} \tag{4.22}$$

e la (4.21) è dimostrata.

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente teorema.

Teorema 4.10 *Sia* C *una curva piana proiettiva non-singolare. Allora le curve piane di dato grado tagliano su* C *una serie lineare completa.*

Dim. Sia C una curva piana non-singolare di grado d . Fissiamo una retta L e sia Δ il divisore su C tagliato da L. Sia

$$V_n = \{\text{polinomi omogenei di grado } n \text{ in } X_0, X_1, X_2\}\ .$$

Noi vogliamo dimostrare che l'applicazione lineare

$$\begin{array}{rcl} \phi_n : V_n & \longrightarrow & \mathcal{L}(n\Delta) \\ G & \longmapsto & G/L^n \end{array}$$

è suriettiva. Per quello che abbiamo dimostrato sopra e precisamente per la (4.22), ciò è vero se $n = d - 3$ e in questo caso $\mathcal{L}\left((d-3)\Delta\right) = \mathcal{L}(K) \cong \Omega^1(C)$. Se $n \leq d - 3$ si ha

$$\mathcal{L}\left((d-3-n)\Delta\right) = \mathcal{L}(K - n\Delta)$$

e poiché i divisori di $|K|$ sono tagliati da curve di grado $d-3$, i divisori di K che contengono $n\Delta$ sono necessariamente tagliati da curve di grado $d-3-n$ e dunque ϕ_n è suriettiva, anzi è un isomorfismo per $n \leq d-3$. Per $n > d-3$ si ha $l(K - n\Delta) = 0$ e dunque

$$l(n\Delta) = nd - \frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1 \ .$$

D'altro canto

$$dim\, V_n = \binom{n+2}{2},$$

$Ker\phi_n = 0$, se $d < n$ e

$$dim\, Ker\, \phi_n = \binom{n-d+2}{2}$$

se $n \geq d$. A questo punto un semplice conto mostra che ϕ_n è suriettiva per $n > d-3$ (e che in effetti è un isomorfismo per $n \leq d$).

Q.E.D.

Esercizi

1. Sia D un divisore di grado zero su una superficie di Riemann compatta. Dimostrare che $l(D)$ è uguale a 0 o a 1. Descrivere gli elementi di $\mathcal{L}(D)$. Sia $C = \{[X,Y,Z] \in \mathbb{P}^2 \ : \ Y^4Z = X^5 - XZ^4\}$, siano $Q = [0,1,0]$ e $P = [0,0,1]$, calcolare $l(4Q - 4P)$ e $l(3Q - 3P)$.
2. Trovare i divisori di grado $2g - 1$ per i quali risulta falsa l' affermazione del Lemma 4.5
3. Sia S un toro complesso e $p \in S$.

a) Dimostrare che $l(np) = n$ per $n \geq 1$.

b) Siano $\{1, f\}$ e $\{1, f, g\}$ basi per $\mathcal{L}(2p)$ e $\mathcal{L}(3p)$, rispettivamente; dimostrare che esistono costanti c e d non nulle tali che

$$cf^3 - dg^2 \in \mathcal{L}(5p).$$

c) Dimostrare che esiste un polinomio di terzo grado $P(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$, tale che $P(f,g) = 0$.

d) Dimostrare che $P(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ è irriducibile.

4. Sia $C \subset \mathbb{P}^3$ la superficie di Riemann definita dalle equazioni

$$X^2 - YT = 0, \quad Y^2 - ZX = 0, \quad XT - ZT = 0.$$

Calcolare il genere di C. Sia D il divisore associato alla funzione meromorfa T/Z su C. Sia W lo spazio vettoriale complesso dei polinomi omogenei di secondo grado in X, Y, Z, T; studiare l'omomorfismo

$$\phi : W \to \mathcal{L}(D).$$

$$Q \to \frac{Q}{T^2}|_C$$

5. Siano D e E divisori positivi di una superficie di Riemann compatta S. Dimostrare che

$$l(D) + l(E) \leq l(D + E) + 1$$

6. (Teorema di Clifford). Un divisore D si dice *speciale* $\iff$ $l(K - D) > 0$. Sia D un divisore effettivo e speciale, verificare, usando il risultato dell'esercizio precedente, che

$$\frac{1}{2} dim|D| \leq degD$$

.

5 Divisori, serie lineari, morfismi in spazi proiettivi

In questa sezione metteremo in relazione le applicazioni analitiche

$$X \longrightarrow \mathbb{P}^r$$

con gli spazi vettoriali $\mathcal{L}(D)$, o meglio gli spazi proiettivi $\mathbb{P}\mathcal{L}(D) = |D|$. Per inquadrare meglio la questione, è però opportuno fare alcune osservazioni preliminari e introdurre alcune nozioni relative ai divisori e alle serie lineari.

Fissiamo un divisore positivo D su di una superficie di Riemann compatta X di genere g. Denotiamo con $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un ricoprimento di X in carte locali e supponiamo che $h_\alpha = 0$ sia l'equazione di D in U_α. Con ciò intendiamo che h_α è una funzione olomorfa in U_α e che $D_{|U_\alpha} = (h_\alpha)$. Per esempio, se $D = np$ e z è una coordinata locale in un intorno U di p con $z(p) = 0$, allora si può prendere $U_0 = U$, $U_1 = C \setminus \{p\}$, $h_0 = z^n$, $h_1 = 1$. Si osservi che le funzioni $\xi_{\alpha\beta} = h_\alpha/h_\beta$, sono olomorfe e mai nulle in $U_\alpha \cap U_\beta$. Riassumendo abbiamo:

$$h_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)\,, \quad D_{|U_\alpha} = (h_\alpha)\,, \quad \xi_{\alpha\beta} = h_\alpha/h_\beta \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta) \tag{5.1}$$

Introduciamo ora lo spazio vettoriale delle *sezioni del fascio* $\mathcal{O}(D)$. In seguito, quando svolgeremo un pò di teoria dei fasci si capirà il perché di questa denominazione.

Definizione 5.1 *Sia D un divisore positivo. Una sezione s del fascio $\mathcal{O}(D)$, relativa al ricoprimento $\mathcal{U}$, è una collezione*

$$s = \{s_\alpha\}_{\alpha\in A} \qquad s_\alpha \in \mathcal{O}^*(U_\alpha)$$

di funzioni olomorfe tali che

$$s_\alpha = \xi_{\alpha\beta} s_\beta\,, \qquad \text{in} \quad U_\alpha \cap U_\beta$$

Date due sezioni $s = \{s_\alpha\}$ e di $t = \{t_\alpha\}$ di $\mathcal{O}(D)$, si pone

$$as + bt = \{as_\alpha + bt_\alpha\}\,, \qquad a, b \in \mathbb{C}\,.$$

Le sezioni di $\mathcal{O}(D)$, realtive al ricoprimento $\mathcal{U}$ formano dunque uno spazio vettoriale che si denota con il simbolo $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(D)$.

Data una sezione $s \in H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(D)$ e un punto $p \in X$ si dirà che ν è *l'ordine di zero di s in p* e si scriverà $\nu_p(s) = \nu$, se $\nu = \nu_p(s_\alpha)$ non appena $p \in U_\alpha$. La definizione è ben posta, perché se $p \in U_\alpha \cap U_\beta$, allora

$$\nu_p(s_\alpha) = \nu_p(\xi_{\alpha\beta} s_\beta) = \nu_p(s_\beta)\,,$$

essendo $\xi_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$. Il *divisore degli zeri della sezione* s è definito da

$$(s) = (s)_0 = \sum_{p \in X} \nu_p(s) p \,.$$

Si osservi che, per definizione, $\sigma = \{h_\alpha\}$ è un elemento di $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(D)$ e che $(\sigma) = D$. Stabiliamo ora un isomorfismo

$$\Phi : H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(D)) \longrightarrow \mathcal{L}(D) \tag{5.2}$$

nel modo seguente. Data $s = \{s_\alpha\} \in H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(D))$ si definisce $\Phi(s)$ come la funzione meromorfa f tale che $f_{|U_\alpha} = s_\alpha / h_\alpha$. La definizione è ben posta perché

$$f_{|U_\alpha} = \frac{s_\alpha}{h_\alpha} = \frac{\xi_{\alpha\beta} s_\beta}{h_\alpha} = \frac{s_\beta}{h_\beta} = f_{|U_\beta}$$

inoltre

$$[(f) + D]_{|U_\alpha} = \left(\frac{s_\alpha}{h_\alpha}\right) + (h_\alpha) = (s_\alpha) \geq 0 \,,$$

e quindi $f \in \mathcal{L}(D)$. L'inversa di Φ è ovviamente data da

$$\Phi^{-1}(f) = \{f h_\alpha\}_{\alpha \in A} \,.$$

Dalle definizioni segue che

$$\Phi(\sigma) = 1 \in \mathcal{L}(D) \,.$$

(Si ricordi, che essendo D positivo, $\mathcal{L}(D)$ contiene le funzioni costanti.) Dunque, con ovvio significato dei simboli, si può scrivere

$$\Phi(s) = \frac{s}{\sigma} \,, \qquad \Phi^{-1}(f) = f\sigma \,. \tag{5.3}$$

Sempre dalle definizioni, segue che

$$|D| = \{(s)\}_{s \,\in\, H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(D))} \,. \tag{5.4}$$

Infatti, un divisore positivo D' appartiene alla serie lineare $|D|$ se e solo se $D' = (f) + D$ con $f \in \mathcal{L}(D)$. Scrivendo $f = s/\sigma$, si ottiene

$$D' = \left(\frac{s}{\sigma}\right) + D = \left(\frac{s}{\sigma}\right) + (\sigma) = (s) \,,$$

come si voleva. Osserviamo inoltre che due sezioni s e t che abbiano lo stesso divisore degli zeri differiscono per una costante perchè il quoziente s/t è una funzione olomorfa su X. Dunque la 5.4 si può anche scrivere come un isomorfismo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(D)) &\cong |D| \\ [s] &\mapsto (s) \end{aligned} \tag{5.5}$$

e dunque anche come un isomorfismo

$$\mathcal{L}(D) \cong |D| \tag{5.6}$$

$$[f] \mapsto (f) + D$$

Abbiamo bisogno di un'ultima nozione: quella di *luogo base* o *parte fissa* di una serie lineare.

Definizione 5.2 *Sia D un divisore positivo. Il luogo base di $|D|$ è il divisore B definito da*

$$B = m.c.d.\,\{D'\}_{D' \in |D|}$$

In particolare, se $D = \Delta + B$ si ha

$$|D| = |\Delta| + B\,,$$

e B è il più grande divisore per cui vale questa relazione. Una serie lineare si dice priva di punti base se $B = 0$.

Dalla definizione, da (5.5) e da (5.6) segue che

$$B = m.c.d.\,\{(s)\}_{s \in H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(D))} \tag{5.7}$$

$$B = m.c.m.\,\{(f)_\infty\}_{f \in \mathcal{L}(D)}\,. \tag{5.8}$$

La (5.8) ci dice, in particolare, che tutte le sezioni di $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(D))$ si annullano nei punti di B e che dunque

$$H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(D)) = H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(D - B))$$

La (5.7) ci dice che in $\mathcal{L}(D)$ non ci sono funzioni con poli peggiori di quelli prescritti da $D - B$ e che quindi

$$\mathcal{L}(D) = \mathcal{L}(D - B)$$

D'ora in poi considereremo serie lineari senza punti fissi. Sia dunque D un divisore positivo tale che $|D|$ non abbia punti fissi. Poniamo

$$r = r(D) = l(D) - 1$$

dove

$$l(D) = dim\,\mathcal{L}(D) = dim\,H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(D))$$

Consideriamo una base $s^0, \ldots, s^r$ di $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(D))$ e sia $f^0, \ldots, f^r$ la base di $\mathcal{L}(D)$ che ad essa corrisponde tramite l'isomorfismo (5.2). Possiamo sempre supporre, e lo faremo, che $s^0 = \sigma$ e quindi che

$$f^0 = 1,\; f^1 = \frac{s^1}{\sigma}\,,\; \ldots,\; f^r = \frac{s^r}{\sigma}\;.$$

Definiamo una applicazione analitica

$$\varphi_D : X \longrightarrow \mathbb{P}^r$$

ponendo

$$\varphi_D(p) = [s^0_\alpha(p), \ldots, s^r_\alpha(p)]\,, \qquad \text{non appena} \qquad p \in U_\alpha\,.$$

Dal momento che $|D|$ è privo di punti fissi, esiste un indice i per cui $s^i_\alpha(p) \neq 0$ e dunque $\varphi_D(p)$ è effettivamente un punto di $\mathbb{P}^r$. Che φ_D sia ben definita dipende dal fatto che, essendo $\xi_{\alpha\beta}(p) \neq 0$, si ha

$$[s^0_\alpha(p), \ldots, s^r_\alpha(p)] = [\xi_{\alpha\beta}(p)s^0_\beta(p), \ldots, \xi_{\alpha\beta}(p)s^r_\beta(p)] = [s^0_\beta(p), \ldots, s^r_\beta(p)] \qquad (5.9)$$

Dalla definizione segue anche che φ_D non è altro che l'applicazione che avevamo definito nella sezione 3 del capitolo 8:

$$\varphi_D(p) = [1, f^1(p), \ldots, f^r(p)]$$

È chiaro che non ha alcun senso calcolare una sezione in un punto, non ha senso cioè scrivere $s(p)$. Si può scrivere $s_\alpha(p)$ ma naturalmente $s_\alpha(p) \neq s_\beta(p)$. In virtù della (5.9), è però lecito scrivere

$$\varphi_D(p) = [s^0(p), \ldots, s^r(p)]$$

Ha anche senso scrivere: $s(p) = 0$. Questo vuole dire semplicemente che $\nu_p(s) > 0$.

Terminiamo questa sezione dando delle condizioni necessarie e sufficienti perché φ_D si una immersione non-singolare.

Teorema 5.3 *Sia X una superficie di Riemann compatta. Sia D un divisore positivo su X. Sia*

$$l(D) = dim\, \mathcal{L}(D) = dim\, H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(D))$$

e $r = l(D) - 1$. Allora, condizione necessaria e sufficiente perché $|D|$ sia privo di punti base e

$$\varphi_D : X \longrightarrow \mathbb{P}^r$$

sia una immersione non-singolare è che, per ogni coppia di punti $p, q \in X$ si abbia

$$l(D - p - q) = l(D) - 2\ . \qquad (5.10)$$

Dim. Supponiamo che la (5.10) sia soddisfatta. Dal momento che per ogni $p \in X$
$$l(D) \geq l(D-p) \geq l(D) - 1$$
le nostre ipotesi ci dicono in particolare che $l(D-p) = l(D) - 1$. Dunque per ogni $p \in X$ esiste un $i \in \{0, \ldots, r\}$ tale che $s^i(p) \neq 0$, e cioè $|D|$ non ha punti base. Sia $s^0, \ldots, s^r$ una base di $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(D))$ e sia

$$\begin{aligned} \varphi_D : X &\longrightarrow \mathbb{P}^r \\ p &\longmapsto \left[s^0(p), \ldots, s^r(p)\right] \ . \end{aligned}$$

Dimostriamo che φ è iniettiva. Se così non fosse esisterebbero due punti distinti di X, siano essi p e q, tali che $\varphi_D(p) = \varphi_D(q)$. A meno di cambiare coordinate, si può assumere che

$$\varphi_D(p) = \varphi_D(q) = [1, 0, \ldots, 0] \in \mathbb{P}^r \ .$$

Ma questo vuol dire che

$$s^i(p) = s^i(q) = 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, r$$

e dunque che
$$l(D-p-q) = r = l(D) - 1 \ ,$$
contro il supposto. Supponiamo ora che in un punto $p \in X$ lo jacobiano di φ non abbia rango massimo, e supponiamo di nuovo, come è lecito, che $\varphi_D(p) = [1, 0, \ldots, 0]$. Se $p \in U_\alpha$ e se ψ_α è una coordinata locale che svanisce in p, si ha che, localmente, φ_D è data da

$$z \longmapsto (h_1(z), \ldots, h_r(z))$$

dove
$$h_i(z) = f^i \cdot \varphi_\alpha^{-1}(z) \qquad i = 1, \ldots, r \ .$$
Per ipotesi abbiamo che

$$(h_1(0), \ldots, h_r(0)) = (h_1'(0), \ldots, h_r'(0)) = (0, \ldots, 0) \ .$$

Ma questo vuol dire che $\nu_p(f^i) \geq 2$ per $i = 1, \ldots, r$ e cioè che

$$f^1, \ldots, f^r \in \mathcal{L}(D - 2p)$$

e dunque che
$$l(D-2p) = r = l(D) - 1$$
contro il supposto. Ciò dimostra che φ è una immersione non-singolare.

Viceversa supponiamo che $|D|$ non abbia punti base e φ_D sia una immersione non-singolare. Siano $Z_0, \ldots, Z_r$ coordinate proiettive in $\mathbb{P}^r$. Identificando X con $C = \varphi_D(X)$, dati due punti distinti p e q su C è possibile trovare un iperpiano H che non li contiene e uno H' che contiene p ma non q. Se H è dato da $H(Z_0, \ldots, Z_r) = 0$ e H' da $H'(Z_0, \ldots, Z_r) = 0$, allora $H(s_0, \ldots, s_r)$ e $H(s_0, \ldots, s_r)$ sono due sezioni linearmente indipendenti di $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(D))$ non contenute in $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(D-p-q))$. Equivalentemente

$$1 \quad \text{e} \quad \frac{H'(s_0, \ldots, s_r)}{H(s_0, \ldots, s_r)}$$

sono due funzioni meromorfe linearmente indipendenti che appartengono a $\mathcal{L}(D)$ ma non a $\mathcal{L}(D)$. In ogni caso ciò implica che

$$l(D-p-q) = l(D) - 2\ .$$

Dato invece un punto p, oltre un iperpiano non passante per p se ne potrà trovare uno che passa per p ma che non contiene la retta tangente a C in p . Di nuovo ciò mostra che

$$l(D-2p) = l(D) - 2\ .$$

Q.E.D.

Definizione 5.4 *Un divisore D che soddisfa le condizioni del precedente teorema si dice molto ampio.*

Dal lemma (4.5) segue immediatamente questo corollario.

Corollario 5.5 *Sia X una superficie di Riemann compatta di genere g, e D un divisore di grado $d \geq 2g+1$. Allora*

$$\varphi_D : X \longrightarrow \mathbb{P}^{d-g} \qquad (d - g = l(D) - 1)$$

è una immersione non-singolare.

Esercizi

1. Dimostrare che in una superficie di Riemann compatta S di genere $g = 2$ un divisore D di grado d è molto ampio se e solo se $d \geq 5$.
2. Dimostrare che una superficie di Riemann compatta S di genere $g \geq 2$ ha un divisore non speciale molto ampio D di grado d se e solo se $d \geq g+3$.
3. Sia $\mathcal{C}$ una curva non singolare in $\mathbb{P}^n$, verificare che

$g = 0$ e $\mathcal{C}$ è l' immersione di grado 4 di $\mathbb{P}^1$ in $\mathbb{P}^4$.

$g = 0$ e $\mathcal{C}$ è l' immersione di grado 4 di $\mathbb{P}^1$ in $\mathbb{P}^3$.

$g = 3$ e $\mathcal{C}$ è una quartica piana in $\mathbb{P}^2$

$g = 1$ e $\mathcal{C}$ è l' intersezione di 2 quadriche in $\mathbb{P}^3$.

6 L'applicazione canonica

Fissiamo una superficie di Riemann compatta X di genere $g > 1$. Sia K è un divisore canonico e cioè il divisore degli zeri di un differenziale olomorfo

$$K = (\omega)_0 \qquad \omega \in \Omega^1(X)\,.$$

Vogliamo studiare la cosidetta *applicazione canonica* e cioè l'applicazione

$$\varphi_K : X \longrightarrow \mathbb{P}^{g-1}\,, \qquad g = l(K) \tag{6.1}$$

Possiamo identificare $\mathcal{L}(K)$ con $\Omega^1(X)$ e quindi possiamo scrivere l'applicazione canonica nella forma

$$\varphi_K(p) = [\omega_1(p), \ldots, \omega_g(p)]\ . \tag{6.2}$$

dove $\omega_1, \ldots, \omega_g$ è una base di $\Omega^1(X)$. Con questa scrittura vogliamo dire che, se $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ è un ricoprimento di X con carte locali e se

$$\omega_i = f_{\alpha,i}(z_\alpha) dz_\alpha\,, \qquad \text{in} \quad U_\alpha\,, \qquad i = 1, \ldots, g\,,$$

allora

$$\varphi_K(p) = [f_{\alpha,1}(z_\alpha(p)), \ldots, f_{\alpha,g}(z_\alpha(p))]$$

Per dimostrare che ciò ha senso bisogna dimostrare che $|K|$ è privo di punti base e cioè che dato $p \in X$, esiste $i \in \{1, \ldots, g\}$ tale che $\omega_i(p) \neq 0$. In altri termini bisogna verificare che $l(K - p) = g - 1$. Ora, essendo $g > 1$, per ogni punto $p \in X$ risulta $l(p) = 1$ (altrimenti esisterebbe una funzione meromorfa su X con un solo polo semplice e dunque X risulterebbe isomorfa a $\hat{\mathbb{C}}$). Dal teorema di Riemann–Roch segue che $l(K - p) = g - 1$ come si voleva. La (6.2) in un intorno di un punto intorno a p per cui $\omega_i(p) \neq 0$ può scriversi nella forma

$$\varphi_K(p) = \left[\frac{\omega_1}{\omega_i}(p), \ldots, 1, \ldots, \frac{\omega_j}{\omega_i}(p)\right]$$

e le ω_j/ω_i sono funzioni olomorfe intono a p. Vogliamo mostrare che, a meno di eccezioni completamente controllabili, φ_K è una immersione non-singolare. Per descrivere queste eccezioni è necessario introdurre la seguente definizione.

Definizione 6.1 *Una superficie di Riemann X di genere $g > 1$ si dice iperellittica se esistono due punti p e q in X tali che $l(p+q) = 2$. Ciò equivale a dire che X può rappresentarsi come un rivestimento doppio di $\hat{\mathbb{C}}$*

$$f : X \longrightarrow \hat{\mathbb{C}} \ , \quad f \in \mathcal{L}(p+q) \ .$$

Poiché la condizione $l(p+q) = 1$ è equivalente, per il teorema di Riemann–Roch, alla condizione $l(K - p - q) = 2$, segue immediatamente dal teorema (5.3) che φ_K è *una immersione non-singolare se e solo se X non è iperellittica.*

La superficie di Riemann iperellittiche sono in effetti particolari superfici di Riemann. La superficie di Riemann compatta "generale" non è iperellittica. Non siamo in grado di dimostrare questa asserzione. Siamo però in grado di dare esempi di superfici di Riemann non iperellittiche. Per questo basta prendere una qualsiasi curva piana non-singolare C di grado d. Poiché su C la serie canonica è tagliata dalle curve piane di grado $d-3$ basta dimostrare che dati due punti $p, q \in C$ esiste una curva G di grado $d-3$ tale che

$$G \cdot C > p \quad , \quad G \cdot C \not> p + q \ .$$

Per questo basterà prendere un retta l per p che sia distinto dalla retta $\overline{pq}$ (dalla tangente in p a C nel caso in cui $p = q$) e porre $G = l^{d-3}$ nel primo caso e $G = l \cap G'$, con G' una curva di grado $d-4$ non passante per il punto p nell'altro.

Esaminiamo ora l'applicazione canonica nel caso di una curva iperellittica. Sia dunque

$$f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1 = \hat{\mathbb{C}}$$

il rivestimento doppio. Siano $p_1, \ldots, p_{2g+2}$ i punti di ramificazione di f e siano p e q i due poli semplici di f

$$\{p, q\} = f^{-1}(\infty) \quad , \quad \infty = [0, 1] \in \mathbb{P}^1 \ .$$

Sia

$$\iota : X \longrightarrow X$$

l'automorfismo involutorio consistente nello scambiare i due fogli del rivestimento f. Cosicché per definizione

$$f^{-1}f(p) = \{p, \iota(p)\} \quad , \quad \forall\, p \in X \ .$$

Naturalmente i punti di ramificazione sono fissi per ι e inoltre si ha $\iota^2 = 1$. Consideriamo gli spazi

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_X\left((g+1)(p+q)\right) \subset \mathcal{M}(X) \\ &\mathcal{L}_{\hat{\mathbb{C}}}\left((g+1)\infty\right) \subset \mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}}) \end{aligned}$$

e l'omomorfismo iniettivo

$$f^* : \mathcal{L}_{\hat{\mathbb{C}}}\left((g+1)\infty\right) \longrightarrow \mathcal{L}_X\left((g+1)(p+q)\right) \ .$$

Per il teorema di Riemann–Roch

$$\begin{aligned}&\dim \mathcal{L}_{\hat{\mathbb{C}}}\left((g+1)\infty\right) = g+2\\&\dim \mathcal{L}_X\left((g+1)(p+q)\right) = g+3 \ .\end{aligned}$$

Poiché $q = \iota(p)$, l'involuzione ι agisce su $\mathcal{L}_X\left((g+1)p + (g+1)q\right)$:

$$h \longmapsto \iota^* h$$

e poiché $\iota^{*2} = 1$ gli autovalori di ι sono 1 e -1. D'altro canto la condizione $\iota^* h = h$ è equivalente alla condizione che h sia della forma $f^* k$ con $k \in \mathcal{L}_{\hat{\mathbb{C}}}\left((g+1)\infty\right)$. Infatti dire che $\iota^* h = h$ vuol dire che $h\left(\iota(p)\right) = h(p)$ e dunque si può definire senza ambiguità $k(z) = h\left(f^{-1}(z)\right)$. Per quello che abbiamo appena osservato, $f^*\left(\mathcal{L}_{\hat{\mathbb{C}}}((g+1)\infty)\right)$ ha codimensione 1 in $\mathcal{L}_X\left((g+1)(p+q)\right)$ e dunque esiste una funzione $h \in \mathcal{L}_X\left((g+1)(p+q)\right)$ tale che $\iota^* h = -h$. Ma allora h si annulla nei punti di ramificazione di f e quindi, per una semplice questione di grado, si deve avere

$$(h) = p_1 + \cdots + p_{2g+2} - (g+1)(p+q) \ . \tag{6.3}$$

Poniamo ora $e_i = f(p_i) \in \mathbb{P}^1$, e osserviamo che

$$\left(\prod_{i=1}^{2g+2}(f - e_i)\right) = 2(p_1 + \cdots + p_{2g+2}) - (2g+2)(p-q) \ . \tag{6.4}$$

Ne segue che

$$h^2 = c\prod_{i=1}^{2g+2}(f - e_i) \ , \quad c \neq 0 \, ,$$

il che ci dice che X ha una rappresentazione piana della forma:

$$y^2 = \prod_{i=1}^{2g+2}(x - e_i) \, .$$

Sappiamo inoltre che

$$(df) = p_1 + \cdots + p_{2g+2} - 2p - 2q \ .$$

Da ciò e dalle (6.3), (6.4) segue che i differenziali

$$\omega_{i+1} = \frac{f^i df}{h} \quad , \quad i = 0, \ldots, g-1.$$

sono olomorfi. Le f^i sono linearmente indipendenti e quindi anche gli ω_i lo sono. Dunque $\omega_q, \ldots, \omega_g$ è una base per $\Omega^1(X)$. In definitiva l'applicazione canonica è data da

$$\varphi_K(p) = [\omega_1(p), \ldots, \omega_g(p)] = \left[1, f(p), \ldots, f^{g-1}(p)\right]$$

e dunque si ha un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi_K"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{P}^{g-1} \\ \mathbb{P}' & \end{tikzcd}$$

dove

$$\psi\left([X_0, X_1]\right) = [X_0^{g-1}, X_0^{g-2}X_1, \ldots, X_1^{g-1}]$$

è l'applicazione di Veronese. Ne segue che

$$\varphi_K(X) = C$$

è una curva non-singolare di grado $g-1$ in $\mathbb{P}^{g-1}$ isomorfa (secondo ψ) a $\mathbb{P}^1$, mentre φ_K è un rivestimento doppio, che a meno dell'isomorfismo $\psi : \mathbb{P}^1 \cong C$, può identificarsi con f.

Esercizi

1. Dimostrare che ogni superficie di Riemann compatta S di genere $g = 2$ è iperellittica. Sia $f : S \to \mathbb{P}^1$ il rivestimento doppio, dimostrare che è unicamente determinato a meno di un automorfismo di $\mathbb{P}^1$.
2. Dimostrare che esistono delle superfici di Riemann di genere 3 che non sono iperellittiche. Verificare che una superficie di Riemann di genere 3 è una quartica piana non singolare oppure è una curva iperellittica.
3. Verificare che una superficie di Riemann di genere 4 è una curva iperellittica oppure è intersezione di una quadrica e di una cubica in $\mathbb{P}^3$ (Sugg: Calcolare $l(2K)$ e $l(3K)$).