Corso di Geometria II, canale A-L, a.a. 2018-19

Informazioni generali sul corso.

- Docente: Ruggero Bandiera
- Orario di ricevimento: Lunedì h:15:00 - 17:00, seconda falegnameria, studio n. 12
- Periodo: secondo semestre (25 febbraio 2019 - 13 giugno 2019)
- Orario delle lezioni:
  - Martedì: 11:00 - 13:00, aula IV
  - Mercoledì: 16:00 - 18:00, aula I
  - Giovedì: 09:00 - 11:00, aula IV

Programma.

Prima parte: Topologia generale (36 ore)

Approcci diversi alle nozioni di spazio topologico e applicazione continua. Costruzioni ed esempi di spazi topologici: sottospazi, prodotti, quozienti. Proprietà topologiche: separazione, numerabilità, compattezza, connessione, connessione per archi. Varietà topologiche e classificazione delle superfici topologiche compatte.

Seconda parte: Introduzione alla topologia algebrica (24 ore)

Omotopia di cammini e di applicazioni continue. Gruppo fondamentale e invarianza omotopica. Teorema di Seifert-Van Kampen e sue applicazioni. Rivestimenti topologici e relazioni con il gruppo fondamentale. Costruzione del rivestimento universale. Teorema del punto fisso di Brouwer.

Terza parte: Introduzione alla geometria differenziale delle curve e delle superfici (24 ore)

Curve differenziabili nello spazio euclideo tridimensionale. Retta tangente, curvatura, torsione e teorema di rigidità. Superfici differenziabili. Piano tangente e prima forma fondamentale. Seconda forma fondamentale e relativi invarianti di curvatura. Curvatura gaussiana e teorema egregium.

Testi consigliati

- E. Sernesi, *Geometria II*, Boringhieri.
- M. Manetti, *Topologia*, Springer.
- M. Abate e F. Tovena, *Curve e Superfici*, Springer.

Prerequisiti.

Il corso richiede familiarità con argomenti dei corsi di Algebra Lineare, Geometria I, Analisi I, Algebra I. Non ci sono propedeuticità.

Modalità di svolgimento.

Lezioni frontali (60%), svolgimento di esercizi (40%).

Modalità di valutazione.

L'esame mira a valutare l'apprendimento tramite una prova scritta (consistente nella risoluzione di problemi dello stesso tipo di quelli svolti nelle esercitazioni) e una prova orale (consistente nella discussione dei temi più rilevanti illustrati nel corso). La prova scritta avrà una durata di circa tre ore e può essere sostituita da due prove intermedie, entrambe della durata di due ore, la prima delle quali si svolgerà

a metà corso e la seconda immediatamente a fine corso. La prima prova intermedia sarà incentrata principalmente sugli argomenti di topologia generale, la seconda sugli argomenti di topologia algebrica: entrambe conterranno problemi di geometria differenziale.
Per superare l'esame occorre conseguire un voto non inferiore a 18/30. Lo studente deve dimostrare di aver acquisito una conoscenza sufficiente degli argomenti delle tre parti del programma, e di essere in grado di svolgere almeno i più semplici tra gli esercizi assegnati. Per conseguire un punteggio pari a 30/30 e lode, lo studente deve invece dimostrare di aver acquisito una conoscenza eccellente di tutti gli argomenti trattati durante il corso ed essere in grado di raccordarli in modo logico e coerente.

Diario delle lezioni (al 14/05/2019)

- 26/02/2019 – Introduzione ai contenuti del corso: topologia generale.
- 27/02/2019 – Introduzione ai contenuti del corso: topologia algebrica e geometria differenziale.
- 28/02/2019 – Richiami su spazi metrici. Topologia di uno spazio metrico. Funzioni continue tra spazi metrici: caratterizzazione tramite aperti e intorni. Esempi di metriche topologicamente equivalenti.
- 05/03/2019 – Spazi topologici: definizione tramite aperti, chiusi, intorni. Spazi metrizzabili e spazi di Hausdorff. Primi esempi.
- 06/03/2019 – Curve parametrizzate regolari in $\mathbf{R}^n$. Vettore velocità. Lunghezza di un arco di curva. Esistenza di riparametrizzazioni a velocità unitaria. Esempi di calcolo.
- 07/03/2019 – Interno, esterno, frontiera e chiusura di un sottoinsieme di uno spazio topologico; esempi. Definizione di topologia tramite interno e chiusura.
- 12/03/2019 – Insiemi di generatori di una topologia: basi e sottobasi. Caratterizzazione delle basi e delle sottobasi.
- 13/03/2019 – Versore tangente. Vettore di curvatura e versore normale. Piano e cerchio osculatore. Formule per il calcolo della curvatura. Esempi di calcolo.
- 14/03/2019 – Funzioni continue tra spazi topologici: caratterizzazione della continuità in termini di intorni, aperti, chiusi, interno e chiusura. Topologie indotte da una o più applicazioni: topologia indotta su un sottospazio, topologia prodotto.
- 19/03/2019 – Mappe aperte e chiuse; le proiezioni di un prodotto sono aperte. Omeomorfismi; esempi e non-esempi. Convergenza di successioni in uno spazio topologico; esempi. Unicità del limite in spazi di Hausdorff. La convergenza delle successioni non determina la topologia in generale (controesempio: $\mathbf{R}$ con la topologia conumerabile)
- 20/03/2019 – Curvatura orientata e teorema di rigidità per curve regolari piane. Curve biregolari in $\mathbf{R}^3$: triedro di Frenet e torsione.
- 21/03/2019 – Spazi primo e secondo numerabili. Sottospazi e prodotti di spazi primo o secondo numerabili sono ancora primo o secondo numerabili. La convergenza delle successioni determina la topologia di uno spazio primo numerabile: chiusura e interno in termini di successioni. Spazi separabili: uno spazio metrico separabile è secondo numerabile. La retta di Sorgenfrey è separabile ma non secondo numerabile, dunque non è metrizzabile.
- 26/03/2019 – Proprietà di separazione: spazi T1, di Hausdorff, regolari, normali. Prodotti e sottospazi di spazi di Hausdorrf sono di Hausdorff. Uno spazio è di Hasudorff se e solo se la diagonale ΔX è chiusa nel prodotto $X \times X$: alcune conseguenze. Uno spazio metrico è normale.
- 27/03/2019 – Formule per il calcolo della torsione. Teorema di rigidità per curve in $\mathbf{R}^3$.
- 28/03/2019 – Spazi compatti. Teorema di Heine-Borel ($[0,1]$ è compatto). Sottospazi chiusi di compatti sono compatti. Sottospazi compatti di spazi di Hausdorff sono chiusi. I sottospazi compatti di $\mathbf{R}^n$ sono i chiusi e limitati. Immagini continue di compatti sono compatte. Applicazioni continue da compatti in Hausdorff sono chiuse. Teorema di Wallace. Teorema di Tychonoff (prodotti di compatti sono compatti).
- 02/04/2019 – Spazi di Hausdorff compatti sono normali. Spazi sequenzialmente compatti. Uno spazio secondo numerabile è compatto se e solo se è sequenzialmente compatto. Compattificazione a un punto: la compattificazione a un punto di $\mathbf{R}^n$ è omeomorfa a S^n. Spazi connessi. $[0,1]$ è connesso. Connessione per archi. Spazi connessi per archi sono connessi.
- 03/04/2019 – Definizione di varietà topologica: carte locali e atlanti. Il sostegno di curve parametrizzate può non essere una varietà topologica. Definizione di superfici regolari immerse in $\mathbf{R}^3$: esempi (sfera, grafici di funzioni C^∞). Applicazioni del teorema della funzione inversa: una superficie di livello $f^{-1}(a) \subset \mathbf{R}^3$ di una funzione C^∞ $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ è una superficie regolare immersa se $a \in \mathbf{R}$ è un valore regolare di f; ogni superficie regolare immersa in $\mathbf{R}^3$ è localmente il grafico di una funzione C^∞ $g : U \to \mathbf{R}$ (U un aperto di $\mathbf{R}^2$). Esempi di superfici di rotazione (il toro).

- 04/04/2019 – Immagini continue di connessi sono connesse. Teorema del valore medio e applicazioni: Teorema di Borsuk-Ulam per la circonferenza e Teorema delle frittelle. L'unione di una famiglia di sottospazi connessi con intersezione non vuota è connessa.

- 09/04/2019 – Componenti connesse di uno spazio topologico. Seno del topologo (questo è un sottospazio di $\mathbf{R}^2$ definito come l'unione dell'origine e $\{ (x, \sin(\frac{1}{x})) \mid x > 0 \}$: è un esempio di spazio topologico connesso ma non connesso per archi, e non localmente connesso). Topologia di Zariski $\mathcal{Z}ar$ sullo spazio affine $\mathbf{K}^n$, con $\mathbf{K}$ un campo. $(\mathbf{K}^n, \mathcal{Z}ar)$ è uno spazio topologico Noetheriano: in particolare, ogni suo sottospazio è compatto.

- 10/04/2019 – Cenni su atlanti differenziabili (gli omeomorfismi di transizione sono diffeomorfisimi) e varietà differenziabili. Le superfici regolari immerse in $\mathbf{R}^3$ sono varietà differenziabili. Funzioni differenziabili da una superficie regolare immersa $S \subset \mathbf{R}^3$ in uno spazio euclideo. Funzioni differenziabili tra superfici regolari immerse in $\mathbf{R}^3$.

- 11/04/2019 – Topologia quoziente e identificazioni. Proprietà universale dei quozienti (se $f : X \to Y$ è un'identificazione, allora $g : Y \to Z$ è continua se e soltanto se tale è $g \circ f : X \to Z$). Un quoziente di uno spazio topologico compatto (risp.: connesso) è anch'esso compatto (risp.: connesso). Un quoziente di uno spazio di Hausdorff può non essere di Hausdorff. Lo spazio proiettivo reale $\mathbf{RP}^n$: dimostrazione che è una varietà topologica di dimensione n. Primi esempi di superfici topologiche e poligoni d'identificazione: sfera, piano proiettivo, toro, nastro di Moebius, bottiglia di Klein.

- 16/04/2019 – Primo esonero.

- 17/04/2019 – Correzione in classe del primo esonero.

- 24/04/2019 – Piano tangente T_pS ad una superficie regolare immersa $S \subset \mathbf{R}^3$ in un punto $p \in S$. Differenziale $Df_p : T_pS \to T_{f(p)}S'$ di un'applicazione differenziabile $f : S \to S'$ tra superfici regolari in un punto $p \in S$.

- 30/04/2019 – Ulteriori esempi di spazi quozienti e applicazioni. Coprodotto $Y \coprod_X Z$ di un diagramma $Y \leftarrow X \to Z$. Caso particolare: se $Z = *$ è un punto e $X \to Y$ è l'inclusione di un sottospazio, il coprodotto $Y \coprod_X *$ si denota con Y/X (esempio: $D^n/S^{n-1} \cong S^n$, dove D^n è il disco chiuso n-dimensionale e S^k la sfera k-dimensionale). Somma connessa di varietà topologiche. Enunciato del teorema di classificazione per superfici topologiche compatte e connesse.

- 02/05/2019 – Dimostrazione del teorema di classificazione per superfici topologiche compatte e connesse con il metodo del taglia e cuci.

- 07/05/2019 – Omotopia (e omotopia relativa) tra applicazioni continue. L'omotopia è una relazione di equivalenza, ed è compatibile con la composizione. Se $S \subset \mathbf{R}^n$ è un sottospazio stellato, ogni applicazione continua $f : X \to S$ è omotopa a una costante. Equivalenza omotopica tra spazi topologici. Esempi.

- 08/05/2019 – Prima forma fondamentale. Regole di calcolo a partire da una parametrizzazione locale ed esempi. Applicazioni al calcolo di lunghezze e aree.

- 09/05/2019 – Gruppo fondamentale $\pi_1(X; x)$ di uno spazio topologico X con punto base $x \in X$.

- 14/05/2019 – Proprietà del gruppo fondamentale: funtorialità e invarianza omotopica. Spazi omotopicamente equivalenti hanno gruppi fondamentali isomorfi (in particolare spazi contraibili, e.g. $\mathbf{R}^n$, hanno gruppo fondamentale banale). Prime applicazioni del gruppo fondamentale: teorema del punto fisso di Brower.

Risultati degli esoneri

Di seguito sono riportati i risultati del primo e del secondo esonero. Sono esonerati dallo scritto gli studenti che hanno ottenuto un minimo di 18 in entrambi gli esoneri.

N matricola	I esonero	II esonero	Esercizi
1344663	insuff		
1484110	insuff		
1572767	20		
1662781	insuff		
1679164	27	26	+2,7
1689421	insuff		
1690232	28	20	+2,8
1694456	18	18	+2
1708181	18	18	+2,8
1709576	insuff		
1709928	insuff		
1719344	18	18	+2,8
1719387	21	24	+2,8
1742795	23	21	+2,6
1746547	20	18	+2,6
1747963	21	23	+2,5
1748577	28	20	+2,8
1753350	23	25	+2,6
1756966	18		
1757172	26	21	+2,6
1763403	18	24	+2,5
1765235	25	25	+2,7
1768903	23	18	+2,8
1773684	25	19	+2,8
1788846	21		
1792343	22	19	+2,5
1792499	insuff		
1793336	insuff		
1793402	22	24	+2,6
1794245	22	20	+2,6
1794496	insuff		
1795054	19	24	+2,7
1795095	insuff		
1795624	32	31	+2,6
1795862	25	28	+2,6
1796172	18		
1796363	18	19	+2,4
1796527	26	23	+2,6
1797060	insuff		
1797104	18	20	+2,5
1800616	18	20	+ 2
1802766	23	18	+ 2
1803694	18		
1804580	23	26	+2,7
1804583	insuff		
1805004	29	30	+2,9
1805741	18	21	+2,9
1807316	insuff		
1807408	31	31	+2,2
1809241	20	19	+2,2
1810814	24	25	+2,6
1811373	29	30	+2,6
1811378	20	25	+2,5
1812973	insuff		
1814581	insuff		
1815249	18		
1815484	18	20	+2,5
1815649	25		
1815793	20	20	+2,7
1815826	24	26	+2,6
1816931	20	18	+2,5
1817434	18		
1818542	22	25	+2,5
1821290	29	30	+2,2
1822745	24	21	+2
1826349	22	18	
1862148	insuff		

Esercizi e tutoraggi

Istruzioni per gli esercizi da svolgere durante il semestre. Gli studenti frequentanti possono formare dei gruppi da circa 4 studenti e consegnare, nelle date indicate, le soluzioni degli esercizi dei Fogli 1,2,...,6, scritti su fogli protocollo, indicanti i nomi di tutti gli afferenti al gruppo, e con asteriscato il nome di chi ha materialmente scritto le soluzioni. I fogli 1,2,..., 6 saranno aggiunti al presente file (nelle ultime pagine) a partire da una settimana prima della consegna prevista. Le scadenze delle 6 consegne saranno in corrisondenza dei 6 tutorati programmati, secondo il seguente calendario. Gli elaborati dei gruppi degli studenti saranno valutati dal tutore assegnato al corso, Dott. Mario Morellini.

In sede di esame orale, agli studenti che avranno partecipato, con almeno un asterisco, alle consegne delle soluzioni dei Fogli 1,2,...,6, sara' assegnato un punteggio aggiuntivo fino a un massimo di 3/30.

Calendario delle ore di tutorato.

- Primo tutorato (con consegna da parte degli studenti delle soluzioni del Foglio 1 di esercizi), martedi 19/03/2019, ore 16-18, aula IV.
- Secondo tutorato (con consegna da parte degli studenti delle soluzioni del Foglio 2 di esercizi), martedi 26/03/2019, ore 16-18, aula IV.
- Terzo tutorato (con consegna da parte degli studenti delle soluzioni del Foglio 3 di esercizi), martedi 09/04/2019, ore 16-18, aula IV.
- Quarto tutorato (con consegna da parte degli studenti delle soluzioni del Foglio 4 di esercizi), martedi 30/04/2019, ore 16-18, aula IV.
- Quinto tutorato (con consegna da parte degli studenti delle soluzioni del Foglio 5 di esercizi), martedi 14/05/2019, ore 16-18, aula IV.
- Sesto tutorato (con consegna da parte degli studenti delle soluzioni del Foglio 6 di esercizi), martedi 28/05/2019, ore 16-18, aula IV.

Corso di Geometria II, a. a. 2018-19

Foglio n. 1

Consegnare le soluzioni all'inizio del primo tutorato,
ore 14 di martedì 19 marzo in aula IV.

Le soluzioni, elaborate in gruppi di quattro studenti,
devono riportare i nomi di tutti gli studenti del gruppo,
con astericato il nome di chi ha materialmente redatto le soluzioni

1. In $\mathbf{R}^2$ con la topologia euclidea si consideri il sottoinsieme $D = (0, +\infty) \times [0, +\infty)$. Determinare la parte interna $D^o = Int(D)$, la chiusura $\overline{D}$, la frontiera $\partial D = Fr(D)$ e la parte esterna $Est(D)$.

2. Sia X un insieme arbitrario su cui siano assegnate due topologie τ_1 e τ_2. Verificare che l'applicazione identica id: $(X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ è continua se e solo se τ_1 è più fine di τ_2. Si può affermare che esiste sempre qualche $f : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ che sia continua independentemente dalle scelte di τ_1 e τ_2?

3. Sia X uno spazio topologico. Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti:
i) ogni punto $x \in X$ è un chiuso;
ii) per ogni $x, y \in X$ esistono intorni U_x di x e U_y di y con $y \notin U_x$, $x \notin U_y$;
iii) per ogni $x \in X$ l'intersezione di tutti gli intorni di x coincide con x.

4. Per ogni intero $n \geq 1$ si considerino gli insiemi:

$$\mathcal{C}_n = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \text{ con } \frac{1}{2n} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2n - 1}\}$$

$$\mathcal{D}_n = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \text{ con } 2n - 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2n\}$$

e siano

$$\mathcal{C} = \cup_{n \geq 1} \mathcal{C}_n, \qquad \mathcal{D} = \cup_{n \geq 1} \mathcal{D}_n.$$

Stabilire se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ sono chiusi nell'$\mathbf{R}^2$ euclideo e, in caso negativo, indicarne la chiusura.

5. Si consideri il sottoinsieme $S = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) \in \mathbf{R}^2; n, m \in \mathbf{N}\}$ dell' $\mathbf{R}^2$ euclideo. Determinare la parte interna S^o, la parte esterna Est S, la frontiera ∂S, la chiusura $\overline{S}$.

6. Si consideri nello spazio eucideo $\mathbf{R}^3$ la curva $\mathcal{C}$ di equazioni parametriche

$$x = e^t cos\, t, \quad y = e^t sin\, t, \quad z = e^t.$$

i) Determinare la lunghezza dell'arco di $\mathcal{C}$ descritto da $t \in [0, 1]$.
ii) Riparametrizzare $\mathcal{C}$ mediante il parametro di ascissa curvilinea.

7. Si consideri nello spazio eucideo $\mathbf{R}^3$ la curva $\mathcal{D}$ di equazioni parametriche

$$x = \frac{1}{2}(s + \sqrt{s^2 + 1}), \quad y = \frac{1}{2}(s + \sqrt{s^2 + 1}), \quad z = \frac{1}{2}\sqrt{2}(\log(s + \sqrt{s^2 + 1})).$$

Stabilire se s è un parametro di ascissa curvilinea su $\mathcal{D}$.

Corso di Geometria II, a. a. 2018-19

Foglio n. 2

Consegnare le soluzioni all'inizio del primo tutorato,
ore 14 di martedì 26 marzo in aula IV.

Le soluzioni, elaborate in gruppi di quattro studenti,
devono riportare i nomi di tutti gli studenti del gruppo,
con astericato il nome di chi ha materialmente redatto le soluzioni

1. Si consideri, nell'insieme $\mathcal{C}([0,1])$ delle funzioni continue nell'intervallo $[0,1]$ e a valori reali, la successione di funzioni $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbf{N}$. Si determini, per ognuna delle due topologie indotte dalle distanze $d_1(f,g) = \sup|f(x) - g(x)|$ e $d_2(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$ in $\mathcal{C}([0,1])$, l'eventuale esistenza di funzioni che siano punti di convergenza per la successione assegnata.

2. Si consideri, in $\mathbf{R}$ dotato della topologia cofinita, la successione $\{x_n\}$ così definita: $x_n = 0$ se n è pari e $x_n = n$ se n è dispari. Stabilire se $\{x_n\}$ ammette punti di convergenza.

3. Si considerino su $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ le seguenti topologie prodotto: $\tau_1 = \mathcal{E} \times \mathcal{Z}$, $\tau_2 = \mathcal{Z} \times \mathcal{Z}$, $\tau_3 = \tau_{\text{ban}} \times \tau_{\text{discr}}$, essendo $\mathcal{E}, \mathcal{Z}, \tau_{\text{ban}}, \tau_{\text{discr}}$ le topologie rispettivamente euclidea, cofinita, banale e discreta su $\mathbf{R}$.

i) Stabire quali relazioni d'ordine "di maggiore finezza" sussistono tra τ_1, τ_2, τ_3.

ii) Per ognuna delle topologie τ_1, τ_2, τ_3 stabilire quali tra i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$ sono aperti:

a) il quadrato $I^2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$,

b) il disco $B^2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ x^2 + y^2 < 1\}$,

c) $\mathbf{R}^2 - (0,0)$.

iii) Si considerino infine le coppie $(\tau_i, \tau_j)(i,j = 1,2,3)$, di topologie che, secondo la risposta data al quesito i) sono non confrontabili. Costruire esempi di sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$ che siano aperti in τ_i ma non in τ_j e viceversa.

4. Si consideri su $\mathbf{R}$ la topologia $\tau = \{\emptyset, \mathbf{Q}, \mathbf{R} - \mathbf{Q}, \mathbf{R}\}$. Determinare quali delle seguenti successioni ammettono punti di convergenza: a) $\{2n\}$; b) $\{(-1)^n\}$; c) $\{n\pi\}$; d) $\{(\sqrt{2})^n\}$.

5. Sia $p : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la prima proiezione canonica: $p(x,y) = x$. Siano $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}^2$ le topologie euclidee di $\mathbf{R}$ e di $\mathbf{R}^2$. Sia $p^{-1}(\mathcal{E})$ la topologia immagine inversa di $\mathcal{E}$ rispetto a p (i cui aperti sono i sottoinsiemi $p^{-1}(A) \subset \mathbf{R}^2$ con A aperto in $\mathcal{E}$).

i) Indicare due topologie su $\mathbf{R}$ di cui $p^{-1}(\mathcal{E})$ è la topologia prodotto.

ii) Verificare che $(\mathbf{R}^2, p^{-1}(\mathcal{E}))$ non è metrizzabile. [Si suggerisce di determinare una successione che ammette più punti di convergenza o in alternativa di verificare che lo spazio non è di Hausdorff].

6. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua tra spazi topologici, sia $\Gamma_f = \{(x, f(x), x \in X\} \subset X \times Y$ il grafico di f, e si consideri su Γ_f la topologia indotta dalla topologia prodotto di $X \times Y$. Dimostrare che Γ_f è omeomorfo a X.

7. Si consideri in $\mathbf{R^2}$ la seguenti curva parametrizzata:

$$\sigma(t) : \ x = t^3 - 4t,\ y = t^2 - 4 \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

i) Stabilire per quali valori di t risulta $\sigma'(t) \neq 0$.

ii) Determinare la funzione $k(t)$ di curvatura.

8. Si considerino in $\mathbf{R^3}$ le seguenti curve parametrizzate:

$$\alpha(t) : \ x = cos\, t,\ y = sin\, t,\ z = e^t \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

$$\beta(t) : \ x = t,\ y = \frac{t^2}{2},\ z = sin\, t \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Determinare per entrambe le curve la funzione $k(t)$ di curvatura.

Corso di Geometria II, a. a. 2018-19

Foglio n. 3

Consegnare le soluzioni all'inizio del terzo tutorato, ore 14 di martedì 9 aprile in aula IV, o al più tardi giovedì 11 aprile a lezione alle ore 9.

1. Si consideri in $\mathbf{R}^2$ il quadrato $X = (0,1) \times [0,1]$.

i) Indicare in X un ricoprimento aperto privo di sottoricoprimenti finiti.

ii) Indicare in X una successione priva di sottosuccessioni convergenti.

2. Si considerino in $\mathbf{R}^3$ i luoghi S_1, S_2, S_3 dei punti rappresentati dalle seguenti equazioni:

i) $S_1 : f_1(x,y,z) = x^4 - y + z - 1 = 0$,

ii) $S_2 : f_2(x,y,z) = x^2 - y^3 + z^4 - 1 = 0$,

iii) $S_3 : f_1(x,y,z) = (x^2 + y^2 - 4)^2 + (z-4)^2 - 1 = 0$.

Stabilire quali tra S_1, S_2, S_3 sono compatti.

3. Si considerino in $\mathbf{R}^2$ i sottoinsiemi

$$X_k = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ kx + ky - 1 = 0\},$$

essendo $k \in \mathbf{N}$, e l'insieme

$$X = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} X_k.$$

i) Stabilire se i sottoinsiemi X_k sono chiusi in $\mathbf{R}^2$ e se sono compatti.

ii) Stabilire se X è chiuso e in caso negativo determinarne la chiusura $\overline{X}$.

iii) Stabilire se X (o $\overline{X}$) è compatto.

4. Si considerino i $\mathbf{R}^2$ le circonferenze:

$$C_n : \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{n^2},$$

il punto $p_n = (\frac{2}{n}, 0) \in C_n$ e la retta r_n tangente a C_n in p_n.

i) Stabilire se gli insiemi

$$C = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} C_n, \qquad r = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} r_n$$

sono chiusi in $\mathbf{R}^2$. In caso negativo determinarne le chiusure $\overline{C}$ e $\overline{r}$.

ii) Posto $X = C \cap r$, determinare la chiusura $\overline{X}$ di X. Stabilire se le topologie euclidee indotte su X e su $\overline{X}$ coincidono con le rispettive topologie discrete.

iii) Quali tra gli insiemi $C, r, X, \overline{X}$ sono compatti?

5. Sia $\mathcal{C}$ la curva dello spazio euclideo $\mathbf{R}^3$, di equazioni parametriche

$$\sigma(t) : (x = t\,sin\,t,\ y = t\,cos\,t,\ z = t^3), \quad t \in \mathbf{R}.$$

i) Verificare che $\mathcal{C}$ è regolare, ovvero che $\sigma'(t) \neq 0$ per ogni $t \in \mathbf{R}$.

ii) Verificare che $\mathcal{C}$ non ha flessi, ovvero che la sua curvatura è strettamente positiva.

iii) Determinare nel punto $O = \sigma(0) \in \mathcal{C}$ i tre versori di Frenet, la curvatura e la torsione. Scrivere nello stesso punto le equazioni della retta tangente.

iv) Sia $\mathcal{D}$ la curva ottenuta proiettando ortogonalmente $\mathcal{C}$ sul piano $z = 0$. Scrivere una parametrizzazione di $\mathcal{D}$ e determinare il punto di $\mathcal{D}$ a curvatura massima.