Corsi di Laurea Magistrale in Matematica, A.A. 2019-20
Calcolo stocastico e applicazioni (Docente: Bertini)
Esercizi settimanali

Settimana 2

Esercizio 1. Esercizio 1.23 del libro di Liggett.

Esercizio 2. Per $n \in \mathbb{N}$, siano X_k, $k = 1, \cdots, 2^n$ variabili aleatorie gaussiane standard i.i.d. Per ogni $\alpha > 1/2$, dimostrare che con probabilità uno

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} \max_{1\le k\le 2^n} |X_k| = 0$$

Esercizio 3. Esercizio 1.25 del libro di Liggett. Nota. Nel punto (a) sostituire $\phi_{n,k}$ con $\psi_{n,k}$ ove $\psi_{n,k}$ è la funzione definita nell'esercizio 1.23 (ora la base è indicizzata con due indici e non uno). Nel punto (b) sostituire Esercizio 1.24 con l'esercizio precedente.

Esercizio 4. Dimostrare la completezza della base di Haar (come definita in Ex. 1.25 del libro di Liggett) in $L^2([0,1])$. In alternativa: chiedere tale dimostrazione ad un docente a scelta di un corso di analisi.

Esercizio 5. Sia $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'insieme delle successioni reali con la topologia prodotto.

1) Costruire una metrica che induca la topologia dichiarata.

2) Verificare che se la successione di probabilità $\{P_n\}$ su $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ converge sui cilindri allora è tight.