Corsi di Laurea Magistrale in Matematica, A.A. 2019-20
Calcolo stocastico e applicazioni (Docente: Bertini)
Esercizi settimanali

SETTIMANA 7

Esercizio 1. Esercizio 5.34 del libro di Liggett.

Esercizio 2. Esercizio 5.38 del libro di Liggett.

Esercizio 3. ¹ Per $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sia $\hat{f}$ la sua trasformata di Fourier,

$$\hat{f}(k) := \int dx e^{-ikx} f(x).$$

Per $s \geq 0$ sia H_s lo spazio di Sobolev di ordine s , definito – ad esempio – dalla norma (euclidea)

$$\|f\|_s^2 := \int dk (1+k^2)^s |\hat{f}(k)|^2$$

Sia inoltre H_{-s} il duale di H_s , che si può identificare con lo spazio delle distribuzioni ℓ tali che $\|\ell\|_{-s} < +\infty$, ove

$$\|\ell\|_{-s}^2 := \int dk (1+k^2)^{-s} |\hat{\ell}(k)|^2.$$

Nel seguito $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica la dualità tra H_s e H_{-s} .

Sia B il moto browniano standard e $T > 0$ fissato. Questo esercizio propone la realizzazione dell'integrale stocastico

$$I(f) = \int_0^T f(B_t) dB_t$$

simultaneamente per tutte le $f \in H_s$, ovvero come variabile aleatoria (definita con probabilità 1) a valori H_{-s} .

L'affermazione precisa è la seguente sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ la realizzazione canonica del moto browniano, i.e. $\Omega = C([0, T])$, $\mathbb{P}$ misura di Wiener. Se $s > 1/2$ allora esiste un'applicazione misurabile $\vartheta: \Omega \rightarrow H_{-s}$ tale che con probabilità uno $\langle \vartheta(B), f \rangle = I(f)$ per ogni $f \in H_s$ (c'è un insieme di probabilità uno che funziona per tutte le f).

1) Via qualche lemma di rappresentazione verificare che è sufficiente dimostrare la seguente stima.

Per $s > 1/2$ esiste una costante aleatoria $\mathcal{C}$ finita con probabilità uno tale che per ogni $f \in H_s$

$$(1) \quad |I(f)|^2 \leq \mathcal{C} \|f\|_s^2$$

2) Scrivendo $f(B_t)$ in termini di $\hat{f}$, verificare che (si ricorda che se $f \in H_s$ con $s > 1/2$ allora f è continua)

$$I(f) = \frac{1}{2\pi} \int dk \hat{f}(k) M_T^k, \quad M_T^k = \int_0^T e^{ikB_t} dB_t$$

3) Verificare che (1) vale con (a meno di π)

$$\mathcal{C} = \int dk (1+k^2)^{-s} |M_T^k|^2$$

4) Calcolare $\mathbb{E}\mathcal{C}$ e concludere.

¹Si veda Flandoli F., Gubinelli M., Giaquinta M., Tortorelli V.M.: *Stochastic currents*. Stochastic Process. Appl. **115**, 1583–1601, (2005), per i dettagli di questo esercizio.