Corsi di Laurea Magistrale in Matematica, A.A. 2019-20
Calcolo stocastico e applicazioni (Docente: Bertini)
Esercizi settimanali

Settimana 8

Esercizio 1. Si consideri l'equazione stocastica (in $\mathbb{R}$)

$$\begin{cases} dX_t^x = -\lambda X_t^x dt + dB_t \\ X_0^x = x \end{cases}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$

1) Scrivere, via variazione delle costanti, una formula esplicita per la soluzione ed osservare che X è un processo gaussiano.

2) Calcolare media e covarianza di X.

3) Dimostrare che $(X_t^x)_{t\geq 0} \overset{\text{Legge}}{=} \Big(e^{-\lambda t}[x + B_{S(t)}]\Big)_{t\geq 0}$ ove B è un moto browniano e $S\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ una funzione strettamente crescente (da trovare).

4) Trovare la densità di probabilità $q_t(x, \cdot)$ tale che

$$\mathbb{P}(X_t^x \in B) = \int_B dy\, q_t(x, y)$$

per ogni $t > 0$ ed ogni Boreliano $B \subset \mathbb{R}$.

5) Nel caso $\lambda > 0$ trovare $\lim_{t\to\infty} \text{Legge}(X_t^x)$.

Esercizio 2. [Il ponte browniano] Per $t \in [0, 1)$, si consideri l'equazione stocastica (in $\mathbb{R}$)

$$\begin{cases} dX_t = -\frac{X_t}{1-t} dt + dB_t \\ X_0 = 0. \end{cases}$$

1) Scrivere, via variazione delle costanti, una formula esplicita per la soluzione ed osservare che X è un processo gaussiano.

2) Calcolare media e covarianza di X_t, $t \in [0, 1)$.

3) Dimostrare che $\lim_{t\uparrow 1} X_t = 0$ (in probabilità).

Sia ora Sia B il moto browniano in $\mathbb{R}$.

4) Per $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < 1$ calcolare

$$\lim_{\epsilon\to 0} \mathbb{P}\Big(B_{t_1} \in dx_1, \cdots, B_{t_n} \in dx_n \Big| |B_1| \leq \epsilon\Big)$$

e confrontare con le distribuzioni finito dimensionali del processo X.

5) Dimostrare che $(X_t)_{t\in[0,1]} \overset{\text{Legge}}{=} (B_t - tB_1)_{t\in[0,1]}$.