Corsi di Laurea Magistrale in Matematica, A.A. 2019-20
Calcolo stocastico e applicazioni (Docente: Bertini)
Esercizi settimanali

SETTIMANA 11

Esercizio 1. Sia L il generatore di un processo di Feller. Ricordando che $\Gamma(f,g) := \frac{1}{2}\big[L(fg) - fLg - gLf\big]$ sia

$$\Gamma_2(f,g) := \frac{1}{2}\big[L\Gamma(f,g) - \Gamma(Lf,g) - \Gamma(g,Lf)\big].$$

Calcolare Γ_2 quando $Lf = \Delta f - \nabla V \cdot \nabla f$.

Esercizio 2. Si consideri l'equazione stocastica unidimensionale

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t.$$

Sia m la funzione definita da

$$m(x) = \frac{2}{\sigma^2(x)} \exp\Big\{2\int_0^x dy \frac{b(y)}{\sigma^2(y)}\Big\}.$$

Verificare che sotto opportune condizioni (da capire) la misura $m(x)dx$ è invariante per X_t.

Esercizio 3. Sia X_t il moto browniano bidimensionale e D la corona circolare tra le due circonferenze $\gamma := \{|x| = r\}$ e $\Gamma := \{|x| = R\}$, con $r < R$, e τ il tempo di prima uscita da D. Verificare che

$$\mathbb{P}_x(X_\tau \in \gamma) = \frac{\log R - \log|x|}{\log R - \log r}$$

Mediante passaggio al limite per $R \to \infty$ trovare la probabilità di colpire γ. Mediante passaggio al limite per $r \to 0$ trovare la probabilità di colpire $\{0\}$.

Esercizio 4. Sia X_t il moto browniano bidimensionale.

1) Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$. Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}^2$ si ha $\mathbb{P}_x(\exists t\colon X_t \in A) = 1$

2) Dimostrare che se $x \neq y$ allora $\mathbb{P}_x(\exists t\colon X_t = y) = 0$

SUGGERIMENTO. Utilizzare l'esercizio precedente.

Esercizio 5. Calcolare le stesse probabilità dell'esercizio 1 per il moto browniano tridimensionale.

Esercizio 6. Calcolare il valore di attesa del tempo di uscita del moto browniano bidimensionale dall'angolo $\{(x_1, x_2) \,:\, |x_2| \leq x_1 \tan(\alpha/2)\}$.