Corsi di Laurea in Informatica, A.A. 2023-24
Calcolo delle probabilità (Docente: Bertini)
Esercizi settimanali

Foglio 1

Esercizio 1. Dimostrare le seguenti relazioni insiemistiche:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Esercizio 2. Siano A, B due insiemi. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti

i) $A \subset B$
ii) $A \cap B = A$
ii) $A \cup B = B$

Esercizio 3. Sia A, B e C tre insiemi non necessariamnte disgiunti. Esprimere $|A \cup B \cup C|$ in termini delle cardinalità di A, B, C e delle loro intersezioni.

Esercizio 4. Dopo aver intervistato 50 studenti si raccolgono i seguenti dati: 25 hanno studiato francese, 20 hanno studiato tedesco e 5 hanno studiato entrambe le lingue. Calcolare

1) quanti studenti hanno studiato solo francese,
2) quanti studenti hanno studiato solo tedesco,
3) quanti studenti non hanno studiato né francese né tedesco.

Esercizio 5. Dopo aver intervistato 60 persone si raccolgono i seguenti dati: 25 leggono Topolino, 26 leggono Tex, 23 leggono Diabolik. Inoltre, 9 leggono sia Topolino sia Tex, 11 sia Topolino sia Diabolik, 8 sia sia Tex sia Diabolik. Infine, 3 leggono tutti e tre i periodici. Calcolare

1) quanti leggono solo Topolino,
2) quanti leggono solo Tex,
3) quanti leggono solo Diabolik,
4) quanti leggono almeno uno dei tre periodici,
5) quanti leggono uno solo dei tre periodici,
6) quanti non leggono alcuno dei tre periodici.

Esercizio 6. Sia $(\Omega, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità, e siano A, B e C tre eventi. Supponiamo di sapere $A \cap B \cap C = \emptyset$ e $\mathbb{P}(A \cap C) = 1/5$ e $\mathbb{P}(B \cap C) = 2/5$.

1) Calcolare $\mathbb{P}((A \cup B) \cap C)$
2) Quali sono i possibili valori di $\mathbb{P}(A \cap B)$? (Ad esempio, può essere $\mathbb{P}(A \cap B) = 1$?)

Esercizio 7.

1) Se $\mathbb{P}(A) = 1/3$ e $\mathbb{P}(B^c) = 1/4$, A e B possono essere eventi disgiunti?
2) Se $\mathbb{P}(A) = 1/4$ e $\mathbb{P}(A \cup B) = 3/4$, quanto vale $\mathbb{P}(B)$ nel caso che A e B siano disgiunti?
3) Se $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 3/8$, può verificarsi che $\mathbb{P}(A \cup B) = 1/4$? E $\mathbb{P}(A \cup B) = 7/8$?
4) Siano $\mathbb{P}(A) = 3/4$ e $\mathbb{P}(B) = 3/8$. Si verifichi che $1/8 \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq 3/8$.
5) Si dimostri la diseguaglianza:

$$\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$$

Esercizio 8. Si lanciano 2 dadi equi, uno di colore rosso, l'altro di colore blu.

1) Descrivere lo spazio degli eventi elementari Ω.

2) Descrivere, come sottoinsiemi di Ω, i seguenti eventi: "il dado rosso vale 5", "uno dei due dadi vale 5", "entrambi i dadi valgono 5", "nessun dado vale 5", "la somma dei dadi vale 5".

3) Calcolare la probabilità degli eventi nel punto precedente.

Esercizio 9.(Asintotica del problema dei compleanni) Sia

$$p_N(k) = 1 - \frac{N(N-1)\cdots(N-k+1)}{N^k}$$

la probabilità per il problema dei compleanni. Si osservi che, per k fissato, $p_N(k)$ è un polinomio in $1/N$. Si consideri l'asintotica per k fisso e $N \to \infty$.

1) Dimostrare che

$$p_N(k) = C_1(k)\frac{1}{N} + o\big(\tfrac{1}{N}\big)$$

e calcolare $C_1(k)$.

2) Dimostrare che

$$p_N(k) = C_1(k)\frac{1}{N} + C_2(k)\frac{1}{N^2} + o\big(\tfrac{1}{N^2}\big)$$

e calcolare $C_2(k)$.