



Corsi di Laurea in Informatica, A.A. 2023-24
Calcolo delle probabilità (Docente: Bertini)
Esercizi settimanali

FOGLIO 2

Esercizio 1. Un'associazione è formata da 25 iscritti. Tra questi devono essere scelti un presidente ed un segretario.

- 1) Quanti sono i modi possibili per ricoprire le due cariche?
- 2) Se gli individui vengono scelti a caso per ricoprire le cariche, qual è la probabilità che un assegnato membro dell'associazione ne ricopra una?

Esercizio 2. Quanti sono gli anagrammi (anche senza senso) delle parole: RISO, PATATE e COZZE.

Esercizio 3. Sia S un insieme di cardinalità n . Quanti sono i sottoinsiemi di S di cardinalità k (con $k = 0, \dots, n$)?

Esercizio 4. Un compito di esame prevede di rispondere (esattamente) a 10 domande tra le 13 proposte.

- 1) In quanti modi si possono scegliere le domande?
- 2) Supponendo che le prime due domande siano obbligatorie, in quanti modi si possono scegliere le domande?
- 3) Supponendo sia richiesto di rispondere alla prima o alla seconda domanda (ma non ad entrambe), in quanti modi si possono scegliere le domande?

Esercizio 5. Alfredo e Bianca escono la sera con 5 amici. Cominciano la serata con un aperitivo al bar. Davanti al bancone ci sono 7 sgabelli vuoti in fila e ciascuno sceglie uno sgabello a caso. Qual è la probabilità che Alfredo e Bianca si siedano vicini? Dopo si recano al ristorante, dove gli viene assegnato un tavolo rotondo con 7 sedie e ciascuno sceglie una sedia a caso. Qual è la probabilità che Alfredo e Bianca si siedano vicini?

Esercizio 6. Vengono estratte 5 carte a caso da un mazzo di 52 carte francesi. Calcolare la probabilità di ottenere:

- 1) poker;
- 2) colore;
- 3) full;
- 4) doppia coppia (ma non un full);
- 5) tris (ma né poker né full).

Esercizio 7. In un dipartimento di Psicostoria, le aule I e II possono accogliere 50 studenti ciascuna, mentre l'aula III può accoglierne 100. Per seguire il corso di probabilità in tali aule, 200 matricole vengono divise in tre gruppi (di 50, 50 e 100 studenti).

1) In quanti modi si possono creare i tre gruppi, ed in quanti modi si possono assegnare nelle tre aule?

Alyona e Bogdana vorrebbero seguire il corso insieme per aiutarsi nello studio, ma vorrebbero evitare di ritrovarsi in classe con l'insopportabile Vadik.

2) Calcolare la probabilità che tale desiderio si avveri.

Esercizio 8. Sia Ω un insieme finito non-vuoto ed $H: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione data. Per ogni $\beta \geq 0$, definiamo una probabilità \mathbb{P}_β su Ω ponendo per ogni $\omega \in \Omega$ (si ricordi che su spazi finiti la probabilità è identificata dal suo valore sui singoletti)

$$\mathbb{P}_\beta(\{\omega\}) = \frac{e^{-\beta H(\omega)}}{Z_\beta}$$

dove Z_β è un numero reale positivo. Poniamo inoltre

$$m := \min_{\omega \in \Omega} H(\omega) \quad E_m := \{\omega \in \Omega : H(\omega) = m\} = H^{-1}(\{m\})$$

1) Si scriva Z_β in funzione di β (ed H).

2) Verificare che se $\beta = 0$ allora \mathbb{P}_β è la probabilità uniforme su Ω .

3) Verificare che

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_\beta(E_m) = 1$$

(o, come si dice, che \mathbb{P}_β si concentra sui minimi di H quando $\beta \rightarrow +\infty$).

4) Calcolare $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_\beta(\{\omega\})$ per ogni $\omega \in \Omega$.