



Corsi di Laurea in Informatica, A.A. 2023-24  
Calcolo delle probabilità (Docente: Bertini)  
Esercizi settimanali

FOGLIO 3

**Esercizio 1.** Si consideri una classe con 9 studenti. Il docente prepara 3 compiti diversi ed ogni compito viene assegnato a 3 studenti.

- 1) In quanti modi si possono abbinare i 9 studenti ai 3 compiti?
- 2) Se il docente avesse invece preparato 9 compiti diversi, in quanti modi si sarebbero potuti abbinare i 9 studenti ai 9 compiti?

Si consideri ora la medesima classe di 9 studenti.

- 3) In quanti modi si possono partizionare i 9 studenti in 3 gruppi, ognuno dei quali con 3 studenti?
- 4) In quanti modi si possono partizionare i 9 studenti in 3 gruppi, uno dei quali con 5 studenti e i rimanenti due con 2 studenti ognuno?
- 5) In quanti modi si possono partizionare i 9 studenti in 9 gruppi, ognuno dei quali con un singolo studente?

**Esercizio 2.** Un mazzo di carte napoletane è costituito da 40 carte di 4 semi distinti (denominati denari, coppe, spade e bastoni), numerate dall'asso al re.

In una partita di tresette si distribuiscono 10 carte a ciascuno dei 4 giocatori. Un giocatore ottiene una *napoletana* se riceve asso, due e tre dello stesso seme.

Voi siete al tavolo, e ricevete la vostra mano di 10 carte.

- 1) Calcolare la probabilità che otteniate una napoletana di bastoni (asso, due e tre di bastoni).
- 2) Calcolare la probabilità che otteniate contemporaneamente una napoletana di bastoni e di coppe.
- 3) Calcolare la probabilità che otteniate almeno una napoletana.

**Esercizio 3.** Carletto deve fare il compito in classe di matematica. Nel sussidiario ci sono 50 esercizi di equazioni ellittiche semilineari, 30 di geometria non commutativa e 10 di statistica bayesiana. Carletto non sa assolutamente nulla di tali materie, impara quindi a memoria 20 esercizi di equazioni ellittiche semilineari, 10 di geometria non commutativa e 5 di statistica bayesiana. Al momento del compito, Carletto svolge solo gli esercizi che ha imparato a memoria.

- 1) Se la maestra prepara il compito scegliendo a caso, tra gli esercizi del sussidiario, 4 esercizi di geometria non commutativa, con quale probabilità Carletto riesce a svolgere tutti gli esercizi di geometria non commutativa?

Si supponga invece che la maestra prepari il compito scegliendo a caso, tra gli esercizi del sussidiario, 5 esercizi di equazioni ellittiche semilineari, 4 esercizi di geometria non commutativa e 1 esercizio di statistica bayesiana.

- 2) Quanti compiti diversi può preparare la maestra? (compiti che differiscono solo per l'ordine degli esercizi non sono considerati diversi)
- 3) Con quale probabilità Carletto svolge tutti i 10 esercizi?
- 4) Con quale probabilità Carletto svolge 3 esercizi di equazioni ellittiche semilineari, 2 di geometria non commutativa e 1 di statistica bayesiana?

**Esercizio 4.** Dimostrare il principio di esclusione/inclusione: se  $A_1, \dots, A_n$  sono eventi arbitrari allora

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

**Esercizio 5.** Siano  $S, S'$  insiemi finiti con  $|S| = n$  e  $|S'| = k$ . Rispondere alle seguenti domande al variare di  $n, k \in \mathbb{N}$

- 1) Quante sono le funzioni da  $S$  a  $S'$ ?
- 2) Quante sono le funzioni iniettive da  $S$  a  $S'$ ?
- 3) Quante sono le funzioni biunivoche da  $S$  a  $S'$ ?
- 4) Quante sono le funzioni suriettive da  $S$  a  $S'$ ? (Suggerimento: utilizzare il principio di inclusione/esclusione)

**Esercizio 6.** Alice (A), Barbara (B) e Carlo (C) si sfidano in un torneo con le seguenti modalità. Nel primo round si scontrano A e B. Il vincitore gioca poi contro C, se vince anche questo round è proclamato vincitore; se invece vince C, costui gioca contro il perdente del round precedente e così di seguito. Il primo a vincere due round consecutivi vince il torneo. Si tenga presente che A, B e C hanno la stessa abilità nel gioco e pertanto ogni round è vinto da uno dei due contendenti con probabilità  $1/2$ .

- 1) Qualche giocatore è avvantaggiato dalle regole?
- 2) Calcolare la probabilità che il torneo finisca dopo  $n$  round,  $n \geq 2$ .
- 3) Calcolare le probabilità di vittoria per A, B e C.
- 4) Il torneo potrebbe non avere mai termine?