



Corsi di Laurea in Informatica, A.A. 2023-24  
Calcolo delle probabilità (Docente: Bertini)  
Esercizi settimanali

FOGLIO 5

**Esercizio 1.** È noto che i gemelli possono essere omozigoti, in questo caso sono necessariamente dello stesso sesso, oppure eterozigoti, e in questo caso sono dello stesso sesso nel 50% dei casi. Sia  $p$  la probabilità che due gemelli siano omozigoti.

- 1) Calcolare, in funzione di  $p$ , la probabilità che 2 gemelli siano omozigoti sapendo che sono dello stesso sesso.
- 2) Calcolare, in funzione di  $p$ , la probabilità che 2 gemelli siano di sesso diverso.

**Esercizio 2.** In un'urna ci sono tre monete: la prima è equa ed ha testa (T) su di una faccia e croce (C) sull'altra, la seconda ha C su entrambe le facce, la terza ha T su entrambe le facce. Si estrae a caso una moneta dall'urna e la si lancia senza guardare di quale moneta si tratti.

- 1) Calcolare la probabilità che esca T.
- 2) Sapendo che la moneta ha reso T, calcolare la probabilità che sull'altra faccia ci sia C.

Supponendo che la moneta abbia reso testa, la si raccoglie e la si lancia nuovamente (senza guardare l'altra faccia della moneta).

- 3) Calcolare la probabilità di ottenere ancora T.

**Esercizio 3.** È stato indetto un referendum in una popolazione di  $n$  individui (tutti aventi diritto al voto). Ciascun individuo andrà a votare con probabilità  $1/2$ , indipendentemente dagli altri. Inoltre, se un individuo andrà a votare, voterà SI con probabilità  $1/2$ , indipendentemente dagli altri.

- 1) Calcolare la probabilità che un individuo fissato vada a votare e voti SI.
- 2) Calcolare la probabilità che il numero di voti SI sia  $k$ ,  $k = 0, \dots, n$ .
- 3) Sapendo che il numero di voti SI è pari a  $k$ , calcolare la probabilità che il numero di votanti sia stato  $m$ ,  $m = k, \dots, n$ .

**Esercizio 4.** Per  $n \in \mathbb{N}$  e  $p \in (0, 1)$  si consideri la distribuzione binomiale (numero di teste in  $n$  lanci di moneta truccata)

$$P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n.$$

Dimostrare che  $P(k)$  è crescente per  $k \leq \bar{k}$  per un opportuno  $\bar{k} = \bar{k}(n, p)$  (da trovare) e decrescente per  $k > \bar{k}$ .

**Esercizio 5.** Si dispone di una moneta truccata con parametro di truccatura  $p$  incognito che si vuole determinare. Lo *stimatore di massima verosimiglianza*  $\hat{p}$  per  $p$  è definito richiedendo che  $\hat{p}$  massimizzi la probabilità dell'evento osservato. Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza  $\hat{p}$  per i due esperimenti seguenti.

- 1) Si lancia la moneta 200 volte ottenendo testa 67 volte.
- 2) Si lancia la moneta finché essa non rende testa e si osserva che la prima testa è stata ottenuta al quinto lancio

Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza  $\hat{p}$  nei casi generici in cui: (i) si lancia la moneta  $n$  volte e si ottiene  $k$  volte testa; (ii) la prima testa è stata osservata al lancio  $h$ .

**Esercizio 6.** Tre sentieri collegano i bivacchi A, B e C in modo che da ciascun bivacco si possa raggiungere uno qualunque degli altri due con un sentiero diretto. A causa di frane, ciascun sentiero può essere non percorribile. Sia  $p_{AB} \in (0, 1)$  (rispettivamente  $p_{BC}, p_{AC}$ ) la probabilità che il sentiero che collega A con B (rispettivamente B con C, A con C) sia percorribile. Si assuma che lo stato di agibilità di ciascun sentiero sia indipendente dagli altri. Vi trovate al bivacco A.

- 1) Calcolare la probabilità che possiate arrivare al bivacco C.
- 2) Un alpinista vi ha detto che non è possibile arrivare a C per via delle frane. Calcolare la probabilità che possiate comunque arrivare a B.

Supponiamo ora che tra A e B via siano 3 sentieri diretti, ciascuno percorribile con probabilità  $q$  indipendentemente dagli altri.

- 3) Calcolare le due probabilità precedenti (senza rifare tutti i calcoli).

**Esercizio 7.** Sia  $S$  un insieme di cardinalità  $n$ . Si scelgono a caso due sottoinsiemi di  $S$ . Calcolare la probabilità che il primo sottoinsieme scelto sia incluso nel secondo.

**Esercizio 8.** Si considerino lanci ripetuti di una moneta truccata in modo che la probabilità di ottenere testa sia  $p \in (0, 1)$ . Dati  $a, b \geq 1$ , calcolare la probabilità che la moneta renda  $a$  volte testa prima di  $b$  volte croce.