Corsi di Laurea in Informatica, A.A. 2023-24
Calcolo delle probabilità (Docente: Bertini)
Esercizi settimanali

FOGLIO 6

Esercizio 1. (COUPON COLLECTOR) Si consideri un album con n figurine. Calcolare la probabilità di completare l'album comprando k figurine, $k \geq n$ (si supponga probabilità uniforme sulla k-pla di figurine comprate). [SUGG. Utlizzare esclusione/inclusione]

Esercizio 2. Lanciando un dado equo a 6 facce, sia X il risultato ottenuto.

1) Calcolare la distribuzione di X.
2) Calcolare il valore atteso di X.
3) Calcolare la varianza di X.

Rispondere alle precedenti domande nel caso in cui il dado abbia $n \in \mathbb{N}$ facce.

Esercizio 3. Lanciando due dadi equi a 6 facce, sia X il minimo tra i due risultati.

1) Calcolare la distribuzione di X.
2) Calcolare il valore atteso di X.

Esercizio 4. Una scatola contiene 10 transistor di cui 3 sono rotti. Si esamina un transistor alla volta (senza rimpiazzo) finché non se ne trova uno rotto. Calcolare il valore di attesa del numero di transistor esaminati.

Esercizio 5. Si consideri un esame a risposta multipla organizzato al modo seguente. In totale ci sono 10 domande e per ogni domanda ci sono 4 possibili risposte, di cui una sola è corretta. L'algoritmo di valutazione è il seguente: ogni risposta giusta vale 3 e ogni risposta sbagliata (o non risposta) vale -1. Alice risponde a caso a tutte le 10 domande.

1) Calcolare la probabilità che Alice superi l'esame (almeno 18/30).
2) Calcolare il valore di attesa del voto di Alice.
3) Calcolare la varianza del voto di Alice.

Esercizio 6. (INDIPENDENZA DI VARIABILI ALEATORIE) Siano X e Y due variabili aleatorie.

1) Dimostrare che se X è una variabile aleatoria certa, ovvero $X = c$ per un qualche $c \in \mathbb{R}$, allora X e Y sono indipendenti.
2) Dimostrare che nel caso in cui X e Y sono binarie, ovvero $|\mathrm{Im}(X)| = |\mathrm{Im}(Y)| = 2$, le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti se e solo se $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$.
3) Costruire un esempio in cui $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$ ma X e Y non sono indipendenti.

Esercizio 7. (VARIABILE ALEATORIA IPERGEOMETRICA) Si consideri un'urna con b palline bianche ed n palline nere. Si effettuano k estrazioni senza rimpiazzo ($k \leq b+n$). Sia X_i, $i = 1, \dots, k$ la variabile aleatorie che vale 1 se l'i-ma pallina estratta è bianca e 0 se nera. Sia inoltre X il numero totale di palline bianche estratte.

1) Trovare la distribuzione di X.

2) Calcolare il valore di attesa di X.
(È richiesto sia il calcolo diretto a partire dalla distribuzione di X sia quello a partire dal valore di attesa di X_i.)

3) Calcolare la covarianza tra X_i e X_j, $i, j = 1, \dots, k$.

4) Calcolare la varianza di X.
(È richiesto sia il calcolo diretto a partire dalla distribuzione di X sia quello svolto scrivendo $X = \sum_{i=1}^{k} X_i$ ed usando la risposta alla domanda precedente.)