Corsi di Laurea in Informatica, A.A. 2023-24
Calcolo delle probabilità (Docente: Bertini)
Esercizi settimanali

FOGLIO 7

Esercizio 1. Un dado equo viene lanciato finché non esce 5 o 6. Sia T il numero totale di lanci effettuati e X il risultato del dado nell'ultimo lancio effettuato.

1) Calcolare $\mathbb{P}(T = 3, X = 5)$.
2) Calcolare la distribuzione di T.
3) Calcolare la distribuzione di X.
4) Dire, giustificando la risposta, se sono variabili aleatorie T e X sono indipendenti.

Esercizio 2. Siano X_1, X_2 variabili aleatorie indipendenti uniformi in $\{1, \dots, n\}$.

1) Calcolare la distribuzione di $X_1 + X_2$.
2) Calcolare il valore di attesa di $X_1 + X_2$.
3) Calcolare la varianza di $X_1 + X_2$.

Esercizio 3. Quante volte bisogna lanciare – in media – un dado equo per vedere apparire tutte le faccie?
SUGG. Utilizzando variabili aleatorie geometriche si trova la soluzione senza necessità di calcoli.

Esercizio 4. Il tempo di rottura del componente C_i è descritto dalla variabile aleatoria T_i, $i = 1, \dots, k$. Si assuma che le variabili aleatorie $T_1, \dots, T_k$ siano indipendenti e che $T_i \sim \text{Geom}(p)$ con $p \in (0, 1)$, $i = 1, \dots, k$.

1) Trovare la distribuzione del tempo di rottura per il circuito C_{ser} ottenuto mettendo in serie i componenti C_1, ..., C_k.
2) Trovare la distribuzione del tempo di rottura per il circuito C_{par} ottenuto mettendo in parallelo i componenti C_1, ..., C_k.

Esercizio 5. In uno schema di Bernoulli con probabilità di testa $p \in (0, 1)$ sia X la variabile aleatoria che conta il numero di risultati consecutivi uguali al primo; ovvero $X = 1$ se il primo lancio è testa e il secondo croce oppure il primo croce ed il secondo testa, $X = 2$ se due teste e poi una croce oppure due croci e poi una testa,...

1) Trovare la distribuzione di X.
2) Calcolare il valore di attesa di X.
3) Calcolare la varianza di X.

Esercizio 6.(UN TEOREMA LIMITE PER LA DISTRIBUZIONE IPERGEOMETRICA) Per $n, b, k \in \mathbb{N}$, si consideri la *distribuzione ipergeometrica*

$$P_{n,b,k}(h) = \frac{\binom{b}{h}\binom{n}{k-h}}{\binom{b+n}{k}}, \qquad h = 0, \dots, k.$$

1) Calcolare il limite di $P_{n,b,k}$ per $b, n \to \infty$ con $b/(b + n) \to p \in (0, 1)$ (k è fisso).
2) Discutere l'interpretazione probabilistica del risultato.

Esercizio 7. (Dimostrazione alternativa del principio di inclusione esclusione) Per un evento A sia $\mathbf{1}_A$ la variabile aleatoria che rende 1 se $\omega \in A$ e 0 se $\omega \in A^c$.

1) Siano A e B eventi. Verificare che $\mathbf{1}_{A^c} = 1 - \mathbf{1}_A$ e che $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.

2) Siano $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Convincersi della validità dell'identità (binomiale):

$$\prod_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{I \subset \{1,\ldots,n\}} \prod_{i \in I} a_i \prod_{j \in I^c} b_j.$$

3) Utilizzare i due punti precedenti e le proprietà del valore atteso per dimostrare il principio di inclusione esclusione.

Esercizio 8. (Ancora coupon collector) Si consideri un album con n figurine per completare il quale si acquista una figurina al giorno (si supponga probabilità uniforme sulla distribuzione della figurina comprata ciascun giorno ed indipendenza tra figurine comprate in giorni diversi).

1) Dimostrare che il valore di atteso del numero di giorni necessari per completare l'album è dato da

$$K_n = n \Big[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \Big].$$

2) Dimostrare l'asintotica

$$K_n = n \big[\log n + o(\log n) \big].$$

Sugg. Ragionare in termini di variabili aleatorie geometriche.