Corsi di Laurea in Informatica, A.A. 2023-24
Calcolo delle probabilità (Docente: Bertini)
Esercizi settimanali

FOGLIO 8

Esercizio 1. Si assuma che - in media - il 2% della popolazione sia mancina. Dato un campione di 100 individui, utilizzando l'approssimazione di Poisson della binomiale, calcolare la probabilità che almeno 3 siano mancini.

Esercizio 2. Una moneta con probabilità di testa pari a $p \in (0,1)$ viene lanciata un numero di volte aleatorio (indipendente dai risultati dei lanci della moneta) con distribuzione di Poisson di parametro $\lambda > 0$. Trovare le distribuzioni del numero totale di teste e croci otteneute e dimostrare che queste due variabili aleatorie sono indipendenti.

Esercizio 3. Ogni giorno Carlo riceve un numero aleatorio X di email, che possiamo pensare come una variabile aleatoria di Poisson di parametro $\lambda > 0$. Ogni email, indipendentemente dalle altre e dal numero totale di email ricevute, è spam con probabilità p e legittima con probabilità $1-p$, $p \in (0,1)$. Siano Y e Z rispettivamente il numero di email di spam e di email legittime ricevute oggi da Carlo.

1) Calcolare la distribuzione di Y e quella di Z.

2) Dire se Y e Z siano o meno indipendenti. In caso affermativo dimostrarlo, in caso contrario dare un controesempio.

Esercizio 4. (COSTRUZIONE INTERVALLI DI CONFIDENZA) Si consideri una moneta truccata con parametro di truccatura p incognito. Al fine di determinare p, si lancia la moneta n volte e si stima p con S_n/n, ove S_n è il numero di teste negli n lanci effettuati. Dato $\delta > 0$ determinare quanto grande deve essere n affiché la probabilità che $|S_n/n - p| < \delta$ sia almeno il 95%.

Esercizio 5. Da un gruppo di 7 batterie, di cui 3 nuove, 2 usate ma funzionanti e 2 difettose, ne vengono scelte 3 a caso. Siano X e Y rispettivamente il numero di batterie nuove e usate ma funzionanti tra quelle scelte.

1) Determinare la distribuzione congiunta di (X, Y) e le distribuzioni marginali di X e di Y.

2) Calcolare $\text{cov}(X, Y)$. Le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti?

3) Le tre batterie scelte sono montate su di un apparecchio che funziona se nessuna di esse è difettosa. Determinare la probabilità che l'apparecchio funzioni.

Esercizio 6. Un dado che ha una faccia blu, due rosse e tre verdi viene lanciato due volte. Siano R il numero di volte in cui il dado esibisce la faccia superiore rossa e V il numero di volte in cui il dado esibisce la faccia superiore verde.

1) Costruire la tabella della distribuzione congiunta di (R, V).

2) Determinare la distribuzione di $Z = \max\{R, V\}$ e calcolare $\mathbb{E}(Z)$ e $\mathbb{V}(Z)$.

Esercizio 7. I componenti elettronici prodotti in una fabbrica sono difettosi, l'uno indipendentemente dall'altro, con probabilità p e funzionanti con probabilità $1-p$, $p \in (0,1)$. Vengono sottoposti ad un controllo di qualità con la seguente modalità: ogni componente, l'uno indipendentemente dall'altro, viene ispezionato con probabilità α e non ispezionato con probabilità $1-\alpha$, $\alpha \in (0,1)$. Un componente trovato difettoso viene scartato, mentre gli altri vengono messi in commercio. Si supponga di avere n componenti prodotti dalla fabbrica.

1) Calcolare la distribuzione del numero di componenti che vengono scartati dopo il controllo di qualità.

2) Sapendo che il numero di componenti scartati dopo il controllo di qualità è pari a k, $k = 0, 1, \ldots, n$, calcolare la distribuzione dei componenti difettosi tra gli $n-k$ messi in commercio.

Esercizio 8. Siano X, Y due variabili aleatorie di Bernoulli di parametro p e indipendenti. Siano inoltre

$$Z = X(1-Y) \quad \text{e} \quad W = 1 - XY.$$

1) Qual è la distribuzione congiunta di (Z, W)?

2) Quali sono le distribuzioni marginali di Z e W?

3) Per quali valori di p le variabili aleatorie Z e W sono indipendenti?