Corsi di Laurea in Informatica, A.A. 2023-24
Calcolo delle probabilità (Docente: Bertini)
Esercizi settimanali

FOGLIO 9

Esercizio 1. Si consideri la disposizione casuale di n palline in k scatole. Sia $X_i = 0, \ldots, n$ il numero di palline nella scatola i, con $i = 1, \ldots, k$.

1) Calcolare la distribuzione di X_1.

2) Calcolare la covarianza tra X_1 e X_2.

Si consideri il limite in cui $k, n \to \infty$ con $\frac{n}{k} \to \lambda \in (0, +\infty)$

3) Calcolare la distribuzione limite di X_1.

4) Dimostrare che in questo limite le variabili aleatorie X_1 e X_2 diventano indipendenti.

Esercizio 2. Siano X_i, $i = 1, 2$ variabili aleatorie uniformi in $[0, 1]$ indipendenti.

1) Calcolare la distribuzione (ovvero la densità di probabilità) di $X_1 + X_2$.

2) Calcolare la distribuzione (ovvero la densità di probabilità) di $\max\{X_1, X_2\}$.

3) Calcolare la distribuzione (ovvero la densità di probabilità) di $\min\{X_1, X_2\}$.

Esercizio 3. Sia X una variabile aleatoria a valori in $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \ldots\}$, dimostrare che

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k).$$

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria continua e positiva, $X \geq 0$. Dimostrare che

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x)\, dx.$$

Esercizio 5. Sia X la variabile aleatoria continua con densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x + k & \text{se } x \in [0, k] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

1) Trovare il valore di k.

2) Calcolare $\mathbb{P}(1 \leq X \leq 2)$.

Esercizio 6. Siano U una variabile aleatoria uniforme in $[0, 1]$ e V una variabile aleatoria indipendente da U uniforme in $[-1, 1]$.

1) Calcolare la distribuzione (ovvero la densità di probabilità) di V^2.

2) Calcolare la distribuzione (ovvero la densità di probabilità) di $\log(1/U)$.

3) Calcolare $\mathbb{P}(U \leq V)$.

Esercizio 7. Alice (A) e Bob (B) si sfidano con le seguenti modalità. A scrive 1 o 2 su un foglio e B deve indovinare il numero scritto da A Se A ha scritto $i \in \{1, 2\}$ e B indovina allora A paga i euro a B. Se invece B non indovina allora B paga 0.75 euro ad A.

Si supponga che B adotti una strategia casuale dichiarando 1 con probabilità p e 2 con probabilità $1 - p$.

1) Supponendo che A abbia scritto 1 determinare il guadagno medio di B.

2) Supponendo che A abbia scritto 2 determinare il guadagno medio di B.

3) Determinare il valore di p che massimizza il minimo tra i 2 guadagni medi precedenti.

Si supponga che A adotti una strategia casuale scrivendo 1 con probabilità q e 2 con probabilità $1 - q$.

4) Supponendo che B dichiari 1 determinare la perdita media di A.

5) Supponendo che B dichiari 2 determinare la perdita media di A.

6) Determinare il valore di q che minimizza la massima tra le 2 perdite medie precedenti.

Confrontare le risposte ai punti 3 e 6.