



Corsi di Laurea in Informatica, A.A. 2023-24
Calcolo delle probabilità (Docente: Bertini)
Esercizi settimanali

FOGLIO 10

Esercizio 1. Siano X, Y due variabili aleatorie discrete. Per $y \in \text{Im}(Y)$ sia $\mathbb{E}(X|y)$ il valore di attesa di X condizionato a $Y = y$ (il valore di attesa per la distribuzione di X condizionata a $Y = y$). Dimostrare che

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{y \in \text{Im}(Y)} \mathbb{P}(Y = y) \mathbb{E}(X|y).$$

Esercizio 2. Sia X una variabile aleatoria gaussiana con valore di attesa 2 e varianza 25. Rispondere alle seguenti domande utilizzando le tavole dell'integrale gaussiano.

- 1) Calcolare $\mathbb{P}(|X - 2| \geq 7)$.
- 2) Calcolare $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 7)$.
- 3) Determinare α tale che $\mathbb{P}(X \geq \alpha) \leq 0.1$.

Esercizio 3. Le sfere di acciaio prodotte dalla ACME devono avere un diametro di 5 mm. Sono tuttavia accettabili sfere di diametro compreso tra 4 mm e 6 mm. Si assuma che i diametri delle sfere prodotte siano variabili aleatorie gaussiane indipendenti di media 5 mm e varianza 0.25 mm^2 .

- 1) Quale percentuale dei pezzi prodotti non rispetta i limiti di tolleranza?
- 2) Potendo ricalibrare di produzione, modificando la varianza delle sfere, si determini il valore massimo della varianza per cui la percentuale di pezzi che non rispettano i limiti di tolleranza è inferiore all'1%.

Esercizio 4. Per trasmettere un bit da una sorgente A a una ricevente B tramite una coppia di fili elettrici, si applica una differenza di potenziale di $+2 \text{ V}$ per il valore 1 e di -2 V per il valore 0. A causa di disturbi elettromagnetici, se A applica $\mu = \pm 2 \text{ V}$, B legge $X = \mu + Z$, dove Z rappresenta il rumore, descritto da una variabile aleatoria gaussiana di media 0 e varianza 1 V^2 . Dalla lettura di X , B decodifica il messaggio con la seguente regola: se $X \geq 0.5 \text{ V}$ si decodifica 1, mentre se $X < 0.5 \text{ V}$ si decodifica 0.

- 1) Se A invia 0, calcolare la probabilità che B decodifichi 1.
- 2) Se A invia 1, calcolare la probabilità che B decodifichi 0.

Si supponga ora che A invii 0 o 1 con la stessa probabilità.

- 3) Calcolare la probabilità che B decodifichi 1.
- 4) Se B ha decodificato 1 calcolare la probabilità che la decodifica corrisponda al messaggio inviato.

Esercizio 5. Due dadi equilibrati vengono lanciati 300 volte. Sia X la variabile aleatoria che indica il numero di volte che si è ottenuto un doppio uno.

- 1) Calcolare $\mathbb{E}(X)$ e $\mathbb{V}(X)$.
- 2) Utilizzando l'approssimazione gaussiana, calcolare la probabilità di ottenere un doppio uno più di 10 volte.

Si consideri ora il caso in cui i due dadi vengono lanciati n volte.

- 3) Utilizzando l'approssimazione gaussiana, determinare quanto grande debba essere n affinché la probabilità di ottenere un doppio uno almeno 10 volte sia maggiore di $1/2$.

Esercizio 6. Siano Z_1, \dots, Z_k variabili aleatorie di Poisson di parametro $\lambda \in (0, \infty)$ indipendenti.

- 1) Determinare la distribuzione di $Z_1 + \dots + Z_k$.
2) Determinare la distribuzione congiunta di Z_1, \dots, Z_k condizionatamente a $Z_1 + \dots + Z_k = n$, ovvero

$$\mu(n_1, \dots, n_k | n) := \mathbb{P}(Z_1 = n_1, \dots, Z_k = n_k | Z_1 + \dots + Z_k = n)$$

con $n_1 + \dots + n_k = n$.

- 3) Identificare la risposta al punto precedente in termini della disposizione casuale di n palline in k scatole.

Esercizio 7. Siano X_1, \dots, X_k variabili aleatorie a valori in $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}$ indipendenti ed identicamente distribuite con distribuzione

$$\mathbb{P}(X_i = n) = p(1-p)^n, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad p \in (0, 1).$$

Ovvero $X_i + 1$ ha distribuzione geometrica di parametro p .

- 1) Determinare la distribuzione di $X_1 + \dots + X_k$.
2) Determinare la distribuzione congiunta di X_1, \dots, X_k condizionatamente a $X_1 + \dots + X_k = n$, ovvero

$$\mu(n_1, \dots, n_k | n) := \mathbb{P}(X_1 = n_1, \dots, X_k = n_k | X_1 + \dots + X_k = n)$$

con $n_1 + \dots + n_k = n$.

- 3) Identificare la risposta al punto precedente come probabilità uniforme su un opportuno insieme.