STATI DI GIBBS DI VOL. ∞ (SUNTO)

$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$ $\quad \mathcal{P}(\Omega)$ prob. Borel su Ω

<u>DEF</u> $\mu \in \mathcal{P}(\Omega)$ è GIBBS PER L'INTERAZIONE Φ

sse

(DLR) $\quad \mu(\cdot \mid \eta \text{ fuori } \Delta) = \dfrac{1}{Z_\Delta^\eta} e^{-H_\Delta(\cdot \mid \eta)}$ $\quad \mu$ q.s. in η

$$H_\Delta(\omega \mid \eta) = \sum_{X \cap \Delta \neq \emptyset} \phi_X(\omega_\Delta \eta_{\Delta^c})$$

$\mathcal{G} = \mathcal{G}(\Phi)$ = collezione stati di Gibbs ~~rispetto~~ per Φ

$\mathcal{G}$ convesso, compatto, non vuoto

$\mathcal{G} \supset \{$ p.ti accumulazione mis di vol finito nel limite di vol ∞ $\}$

- Domanda naturale:

Sia $\mu \in \mathcal{P}(\Omega)$ quand'è che $\mu \in \mathcal{G}(\Phi)$ per un qualche Φ con $\|\Phi\| < +\infty$?

<u>N.B.</u> μ potrebbe essere <u>non</u> invariante per traslazioni anche se Φ lo è !
[esempio discusso alla fine del corso]

- Se fossimo in vol finito è facile

$\mu \in \mathcal{P}(\Omega_\Lambda)$ $\quad \Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$

quand'è che $\mu(\omega) \propto e^{-H_\Lambda(\omega)}$?

Basta che $\mu(\omega) > 0 \quad \forall \omega \in \Omega_\Lambda$

e vi trovate H_Λ

- In vol infinito ?

Ci sono evidenti condizioni necessarie

- $C \subset \Omega$ è un cilindro

$\mu(C) > 0$ (è lo stesso che richiedere che la marginale di μ su Ω_Λ carichi ogni configurazione)

- $\mu(\cdot \mid \mathcal{F}_{\Delta^c})$ deve avere la forma Gibbsiana per un certo $\Phi \in \mathcal{B}_1$

$\Rightarrow$ le prob. condizionali di μ rispetto a $\mathcal{F}_{\Delta^c}$ devono essere funzioni continue

o meglio : deve esistere una versione continua delle prob. condizionate

$\rightarrow$ Queste condizioni sono anche sufficienti $\leftarrow$

Struttura di $\mathcal{G}(\Phi)$ come insieme convesso e interpretazione fisica

- $\mathcal{E}$ compatto convesso

$\mathcal{E}_e$

$$\mathcal{E}_e = \{ \text{p.ti estremali di } \mathcal{E} \}$$

ove

$x \in \mathcal{E}$ è estremale sse

$$x = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2, \quad \alpha \in (0,1) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 = x$$

i p.ti di $\mathcal{E}$ ~~quelli~~ che non si possono scrivere come combinazioni convesse non banali

Teo (generale)

Sia $\mathcal{E}$ compatto convesso

$\forall x \in \mathcal{E}$ $\exists$ probabilità $\mu = \mu_x$ con supporto su $\mathcal{E}_e$ t.c.

$$x = \int_{\mathcal{E}_e} \mu(dy)\, y$$

ovvero

ogni punto di $\mathcal{E}$ si può scrivere come combinazione convessa infinita (= integrale) di elementi estremali

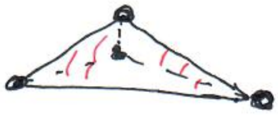
dim ?

<u>esempi</u>

$\mathcal{E}$ = PALLA

Un sacco di modi di scrivere $x \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_e$ come comb. convesse

$\mathcal{E}$ = TRIANGOLO



$\mathcal{E}_e$ = vertici

Un unico modo!

Se è come nel triangolo si dice che $\mathcal{E}$ è un simplesso

Vediamo di capire chi ~~sia~~ è $\mathcal{E}_e$ se $\mathcal{E}$ è un insieme convesso di probabilità

Ω = spazio topologico compatto

$\mathcal{P}(\Omega)$ compatto

$$\mathcal{P}(\Omega)_e = \, ?$$

se $x \in \Omega$ $\quad \delta_x$ è chiaramente estremale

effettivamente $\quad \mathcal{P}(\Omega)_e = \{ \delta_x, \, x \in \Omega \}$

<u>infatti</u>:

$\mu \in \mathcal{P}(\Omega)$

è la ~~misur~~ prob. che realizza la comb. convessa

$$\mu(\cdot) = \int_\Omega \mu(dy) \, \delta_y(\cdot)$$

evidente

se $f \in \mathcal{C}(\Omega)$

$$\mu(f) \overset{?}{=} \int \mu(dy)\, \delta_y(dx)\, f(x) \qquad \text{certo che sì!}$$

oss: se $|\Omega| = n$ $\mathcal{P}(\Omega)$ è il simplesso n-dim standard — $\triangle$ ....

- Teorema di de Finetti

$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (stesso per $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^d$)

$\mu \in \mathcal{P}(\Omega)$ è scambiabile

sse μ è invariante per ogni permutazione finita

$\omega = (\omega_1, \omega_2, .., \omega_n, --) \longrightarrow \omega' = (\omega_1', \omega_2', .., \omega_n', ..)$

ove ω' ottenuto da ω scambiando un # finito di indici

$\mathcal{P}_{ex}(\Omega) = \{\mu \in \mathcal{P}(\Omega) \;:\; \mu \text{ è scans.}\}$

se μ è la legge di Bernulli i.i.d con parametro $e \in [0,1]$ (detta ν_e)

è evidentemente scambiabile

Ora

TEO (DE FINETTI)

$$\mathcal{P}_{ex}(\Omega)_e = \{\nu_e,\ e \in [0,1]\}$$

Ogni μ scambiabile si può scrivere come comb. convessa (sul parametro) di Bernulli i.i.d

Un po' di teoria ergodica

$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$ $\qquad \theta_x : \Omega \circlearrowleft$ traslaz. di $x \in \mathbb{Z}^d$

$\mu \in \mathcal{P}(\Omega)$ è invariante per traslazioni sse

$$\mu = \mu \circ \theta_x^{-1} \quad \forall x \in \mathbb{Z}^d$$

$\mathcal{P}_\theta(\Omega) = \{ \mu \in \mathcal{P}(\Omega) : \mu$ è inv. per traslazioni $\}$

$A \in \mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$ dico che è inv. per traslaz.

sse $\qquad A = \theta_x A$

$\mathcal{J} = \sigma\{ A \in \mathcal{F}$ inv per trasl. $\}$

$=$ σ alg degli eventi invarianti per traslazioni

OSS

$$\overline{\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d}} \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{x \in \Lambda} \theta_x f \quad \text{è } \mathcal{J} \text{ mis}$$

TEO ERGODICO (Birckhoff)

$f \in L_1(\mu) \qquad \mu \in \mathcal{P}_\theta(\Omega)$

$$\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{x \in \Lambda} \theta_x f \quad \exists \quad \mu \text{ q.o.}$$

e in $L_1(\mu)$

inoltre

$$= \mu(f \mid \mathcal{J})$$

← deve essere $\mathcal{J}$ mis

Def $\mu \in \mathcal{P}_\theta(\Omega)$ è ergodica
sse μ è $\mathcal{J}$ banale $I \in \mathcal{J} \Rightarrow \mu(I) = 0, 1$

oss se μ è ergodica allora $\mu(F \mid \mathcal{J})$
è costante (μ q.s.)

Teo ergodico ! (enunciato essenzialmente equivalente)
$\mu \in \mathcal{P}_\theta(\Omega)$ ergodica $\quad f \in L_1(\mu)$

$$\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \frac{1}{|\Lambda|} \sum_x \theta_x f = \mu(f)$$

in $L_1(\mu)$ o μ q.s.

Con un po' di sforzi in più

$$\mathcal{P}_\theta(\Omega)_e = \{ \mu \in \mathcal{P}_\theta(\Omega) \; \mu \text{ ergodica} \}$$

ovvero ogni μ inv. per traslaz. si scrive come
comb. convessa (= integrale) di μ ergodiche
e in un ! modo

• Ritorniamo nel mondo di ~~Gibbs~~ Gibbs

Slogan dell'inizio euristico

"gli osservabili termodinamici negli ensemble statistici non fluttuano"

[la termodinamica è una teoria deterministica non aleatoria]

σ-algebra coda

$$\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d} \mathcal{F}_{\Lambda^c}$$

eventi misurabili all'infinito

non cambiano se altero ω in un # finito di siti

<u>OSS</u>

$$\overline{\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d}} \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{x \in \Lambda} \theta_x f \in \mathcal{F}_\infty$$

<u>Legge</u> <u>0-1</u> <u>Kolmogorov</u>

μ legge di Bernoulli i.i.d.

$\Rightarrow$ μ è banale su $\mathcal{F}_\infty$

$\mu(F) = 0, 1 \quad \forall F \in \mathcal{F}_\infty$

<u>Ora</u>:

osservabili termodinamici = osservabili estensivi

conviene ~~da~~ pensarli per sito

quelli
ovvero del tipo

$$\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{x \in \Lambda} \vartheta_x f$$

sono sia $\mathcal{F}_\infty$ mis che $\mathcal{J}$ mis.

Vorremo dire che gli stati ~~g~~ di Gibbs di volume infinito sono banali su $\mathcal{F}_\infty$ o $\mathcal{J}$. Non è proprio così.

<u>TEO</u> $\Phi \in \mathcal{B}_1$

1. $\mathcal{G}(\Phi)_e = \{ \mu \in \mathcal{G}(\Phi) : \mu$ è banale su $\mathcal{F}_\infty \}$

2. $(\mathcal{G}(\Phi) \cap \mathcal{P}_\theta(\Omega))_e = \{ \mu \in \mathcal{G}(\Phi) \cap \mathcal{P}_\theta(\Omega) :$ μ ~~erg~~ ergodica $\}$

Inoltre
$\mathcal{G}(\Phi)$ è un simplesso

ovvero $\mu \in \mathcal{G}(\Phi)$ si scrive in un ! modo come comb. convessa ~~C~~ di elementi estremali

<u>Interpretazione</u>

- se $|\mathcal{G}(\Phi)| = 1$ c'è un ! stato di vol ∞ e gli osservabili termodinamici non fluttuano

- se $|\mathcal{G}(\Phi)| > 1$ interpretiamo come transizione di fase

~~Alla~~ classificazione usuale in fisica teorica

transiz. fase 1^o ordine $\leftrightarrow$ derivate prime dei potenziali termodinamici sono singolari

transiz. fase 2^o ordine $\leftrightarrow$ derivate seconde — — sono singolari

Come sempre il calcolo si ferma all'ordine 2

~~Alla~~ l'interpretazione di $|\mathcal{G}(\Phi)| > 1$ come transizione di fase corrisponde a transizioni di fase del primo ordine

Vedremo infatti

$$\mathcal{G}(\Phi) \leftrightarrow \partial p(\Phi) = \left\{ \begin{array}{c} \text{sottodifferenziale} \\ \text{della pressione} \end{array} \right\}$$

biezione

$\mathcal{G}(\Phi)_e$ = stati puri
nel linguaggio della fisica matematica

descrivono le "fasi pure" [nel senso della termodinamica]
del sistema

tipo μ_{acq} e μ_{vapore}

$\mu \in \mathcal{G}(\Phi)$ non estremale che descrive ?

Esempio

$$\mu = \alpha \mu_{acq} + (1-\alpha) \mu_{vapore} \qquad \alpha \in (0,1)$$

per questi valori dei parametri termodinamici ($T = 100°C$)
ci può essere sia acqua che vapore
non sappiamo cosa troveremo, ma
se misuriamo qualcosa [tipo densità che $\mu_{acq}(\text{densità}) \neq \mu_{vapore}(\text{densità})$]
abbiamo prob. α di trovare acqua
$1-\alpha$ " vapore

<u>N.B.</u> $\alpha \mu_{acq} + (1-\alpha) \mu_{vap}$ <u>non</u> descrive
la coesistenza di acqua
e vapore

dim (solo 1 e nemmeno tutto)

- $\mathcal{G}(\Phi)_e \subset \{\mu \in \mathcal{G}(\Phi) : \mu$ banali su $\mathcal{F}_\infty\}$

devo mostrare

$\mu \in \mathcal{G}(\Phi)_e \Rightarrow \mu$ è banale su $\mathcal{F}_\infty$

per assurdo

supponiamo $\exists A \in \mathcal{F}_\infty$ con $\mu(A) \in (0,1)$

prob. totali

$$\mu(\cdot) = \underbrace{\mu(A)}_{\in (0,1)} \mu(\cdot \mid A) + \mu(A^c)\, \mu(\cdot \mid A^c)$$

basta far vedere che $\mu(\cdot \mid A) \in \mathcal{G}(\Phi)$

[A è mis all'∞]

devo mostrare che $\mu(\cdot \mid A)$ soddisfa DLR

Sia $\Delta \subset\subset \mathbb{Z}^d$ $\quad B \in \mathcal{F}_\Delta$

$$\mu(B \mid A) = \frac{\mu(B \cap A)}{\mu(A)} \underset{\text{DLR per } \mu}{=}$$

$$= \frac{1}{\mu(A)} \int \mu(d\eta)\, \mu_\Delta^\eta (\mathbb{1}_B \cdot \mathbb{1}_A)$$

$A \in \mathcal{F}_{\Delta^c}$

$$= \int \mu(d\eta \mid A)\, \mu_\Delta^\eta (B)$$

ovvero

$\mu(\cdot \mid A)$ soddisfa DLR per Δ

- $\{\mu \in \mathcal{G}(\Phi) : \mu$ banale su $\mathcal{F}_\infty\} \subset \mathcal{G}(\Phi)_e$

ovvero

$\mu \in \mathcal{G}(\Phi)$ banale su $\mathcal{F}_\infty \Rightarrow \mu \in \mathcal{G}(\Phi)_e$

Sia $\mu = \alpha \mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$ $\quad \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{G}(\Phi)$, $\alpha \in (0,1)$

devo mostrare che $\mu_1 = \mu_2 = \mu$

Poiché $\alpha \in (0,1)$ $\quad \mu_1 \ll \mu$

In particolare μ_1 è pure banale su $\mathcal{F}_\infty$

Considero ora gli stati di vol. finito

sia $f \in \mathcal{E}(\Omega)$

$\mu_\Lambda^\eta(f) \in \mathcal{F}_{\Lambda^c}$ (come funz. di η)

Via teorema di convergenza per martingale

se $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$ e ν è banale su $\mathcal{F}_\infty$ $+ \nu \in \mathcal{G}(\Phi)$

$$\mu_\Lambda^\eta(f) \xrightarrow{\nu \text{ q.s.}} \int \nu(d\eta)\, f(\eta)$$

Uso per $\nu = \mu$ e $\nu = \mu_1$

Poiché $\mu_1 \ll \mu$ i limiti coincidono

ovvero $\mu_1 = \mu$