

MODELLI IN CAMPO MEDIO: CURIE WEISS

• Transizione di fase ferromagnetica.

Fatti sperimentali

Alcuni materiali, metalli o leghe ("in parte di ferro") presentano il fenomeno del ferromagnetismo

... accendete un campo magnetico $h > 0$

si magnetizza nella direzione del campo magnetico, con magnetizzazione $m(h) > 0$

ora levate il campo magnetico: $h < 0$

-- sorpresa: $\lim_{h \rightarrow 0} m(h) = m^0 > 0$

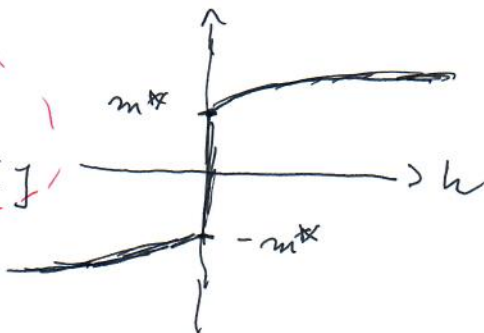
rimane magnetizzato, magnetizzazione spontanea [o residuo]

C'è un effetto di isteresi: lo stato del materiale dipende dalla sua storia passata

potete $h < 0$ e disgiungere $m(h)$

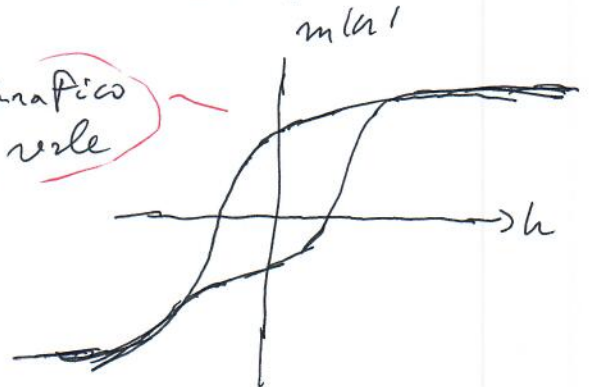
Grafico ideale

[m dispari]



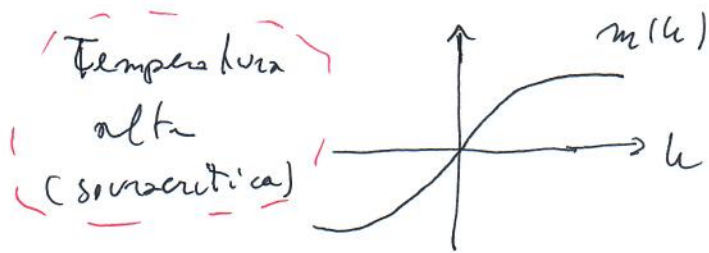
$$h=0 \quad m(h) = 0$$

Grafico reale



- Questo fenomeno non si manifesta più se alzate (a sufficienza) la temperatura:

se $h > 0$ si magnetizza $m(h) > 0$ ma se $h < 0$
 ritorna $m(h) < 0$



non c'è
più isteresi

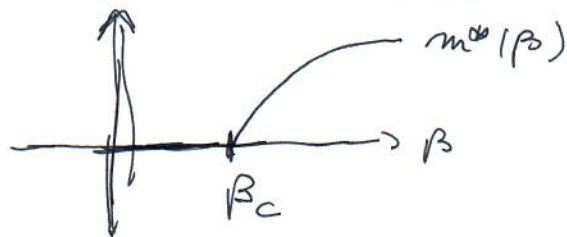
T_c = Temperatura di
curie (o temperatura critica)

se $T > T_c$ non c'è ferromagnetismo

$T < T_c$ c'è ferromagnetismo

Vediamo in effetti: $m^{\pm} = m^{\pm}(T)$

Fatto così $\beta = \frac{1}{kT}$



$m^{\pm}(\beta) \downarrow 0$
se $\beta \downarrow \beta_c$

Vediamo che un pezzo di ferro si magnetizza
poco $T_c >$ Temperatura ambiente

- Il ferro magnetismo è abbastanza complicato -
 Una descrizione dettagliata richiede la meccanica
 quantistica - Ferens invece un semplice modello
 classico che coglie gli aspetti essenziali
 e prevede la transizione di fase -

• Modelli tipo Ising

(3)

• Il materiale si organizza in un reticolo cristallino (per noi $= \mathbb{Z}^d$)

• Su ogni sito del reticolo c'è un momento magnetico [il nucleo + elettroni vicini ... (girano!) -- producono un momento magnetico]

$\sigma_x, x \in \mathbb{Z}^d$ momento magnetico "nucleare"

• ~~Se~~ σ_x dovesse essere un vettore ($\sigma_x \in S_2$ ~~in \mathbb{R}^3~~ se $\dim = 3$)
effettivamente per materiali fortemente anisotropi (es. periferici)

Se σ_x si orienta solo su una direzione scegliamo questa come asse e

$$\sigma_x \in \{-1, 1\} \quad \sigma_x = \begin{cases} \uparrow \\ \downarrow \end{cases}$$

configurazione di spin

$$\sigma = \{ \sigma_x, x \in \mathbb{Z}^d \}$$

$\mathcal{R} = \{-1, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$
spazio delle configurazioni

• Con diversa interpretazione fisica è la stessa struttura matematica che
è gas sul reticolo descritti finora

• Interazione (Hamiltoniana, energia, --) (4)

- accoppiamento con il campo esterno ~~mag~~ magnetico esterno h (che sappiamo detto lungo l'asse degli spin ~~nessi~~)

~~#~~ σ_x si vuole orientare con h
 un contributo energetico pari a

$$- h \sum_x \sigma_x \quad [\text{minimo se } \sigma_x = +1]$$

- interazione tra gli spin vicini

x in 0 $\sigma_x = \uparrow$

vicino a 0 preferiscono orientarsi \uparrow

$$- \sum_{xy} J_{xy} \sigma_x \sigma_y$$

con $J_{xy} > 0$ [~~nessi~~ modelli ferromagnetici]

J invariato per traslazioni:

$$J_{xy} = J(y-x)$$

[maggiori pure pari $J(z) = J(-z)$]

questa parte dell'energia (se $J \geq 0$)

vuole fare tutti i σ_x uguali tra loro

ma non distingue tra $\sigma = +$ e $\sigma = -$

$$\text{Hamiltoniana} = - \sum_{xy} J_{xy} \sigma_x \sigma_y - h \sum_x \sigma_x = H(\sigma)$$

evidentemente è ben definito solo
in volume V finito.

Comunque

$$\arg \inf_{\sigma} \{ H(\sigma) \} = \begin{cases} \sigma = + & h > 0 \\ \sigma = - & h < 0 \\ \{ +, - \} & h = 0 \end{cases}$$

[caso paramagnetico $J > 0$]

Misure di Gibbs associate a H

$$\mu_{\Lambda}(\sigma) = \frac{e^{-\beta H_{\Lambda}(\sigma)}}{Z_{\Lambda}} \quad \text{magari con condizioni al bordo}$$

Nel linguaggio dei gas sul reticolo
d'interesse è

$$\Phi = \{ \phi_{2xy}, \phi_{2xyx} \}$$

$$\text{con } \phi_{2xy}(\sigma) = -h \sigma_x \sigma_y$$

$$\phi_{2xyx}(\sigma_x, \sigma_y) = -J_{xy} \sigma_x \sigma_y$$

co-invariante per traslazioni se h costante in x
[già sul b]

$$J_{0xy} = J(y-x)$$

Se $J(z) = 0 \quad \forall z : |z| > R$

Φ allora è a portata finita

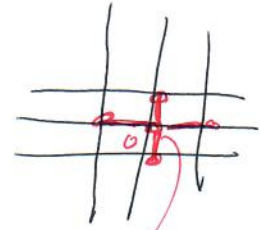
$$\|\Phi\| = |h| + \sum_z |J(z)|$$

poiché ci sono solo
due corpi non c'è
differenza con $\|\cdot\|$

• Modello di Ising (a primi vicini)

$$J_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{se } |x-y|=1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

\bar{C} è studiato anche su
grafi regolari invece
che \mathbb{Z}^d



$\rightarrow S_0$ interagisce
solo con i suoi
2d vicini

• Domanda cruciale

se $\beta = \infty$ ($T=0$) $d \geq 2$

e $h=0$

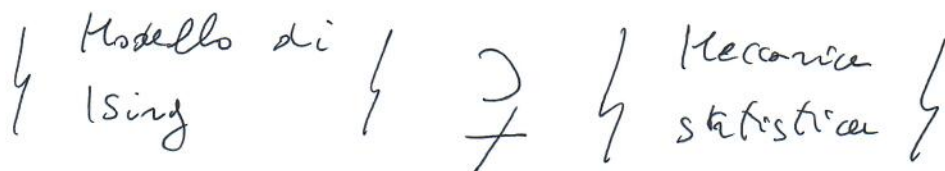
c'è una transizione di fase
[il minimo dell'energia
è degen.]

questa transizione sopravvive a $\beta < +\infty$ ($T > 0$)

... risposta = $\begin{cases} \text{No} & \text{se } d=1 \\ \text{Si} & \text{se } d \geq 2 \end{cases}$

• Nella sua semplicità il modello di Ising è
ricchissimo.

lo dice:



"La teoria più generale è un sottoinsieme proprio del suo esempio migliore"

⑥ Modello di Ising : versione in campo medio
(Curie - Weiss)

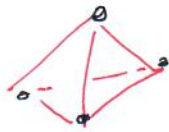
non corrisponde ad una situazione fisica
[è .. fisicamente .. sbagliato] ma ~~per~~ si
possono fare calcoli analitici espliciti

$J_{xy} = \text{costante}$

tutti gli spin interagiscono
tra loro allo stesso modo

non c'è più alcuna struttura spaziale
esplicitamente:

modello di Ising sul grafo completo



tutti i vertici sono più vicini
[iper tetraedro]

Nei nostri formalismo di gas su reticolo
non entra

N spin $\sigma_x \quad x = 1, \dots, N$

$\mathcal{R}_N = \{-1, 1\}^N$ spazio delle configurazioni
di N spin

$H_N(\sigma) = -h \sum_{x=1}^N \sigma_x - J \left(\frac{1}{2N} \right) \sum_{x,y} \sigma_x \sigma_y$

perché
vogliamo

$H_N(\sigma) = O(N)$

interazione $(\sigma_x, \sigma_y) \propto \frac{1}{N}$

campo medio

Misura di Gibbs (con n spin)
 Prob. uniforme su Ω_n

$$\mu_n(\sigma) = \frac{1}{2^n} \frac{e^{-\beta H_n(\sigma)}}{Z_n} \quad \text{su } \Omega_n = \{-1, 1\}^n$$

$$Z_n = \frac{1}{2^n} \sum_{\sigma \in \Omega_n} e^{-\beta H_n(\sigma)} \quad \text{Funzione di partizione}$$

Osservabili significativi (c'è solo questo)

$$H_n(\sigma) = \text{magnetizzazione empirica} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_i$$

v.d. a valori IR (in eff. H_n a valori $\{-1, 1\}$)

$$m_n(\beta, h) = \mu_n(H_n) \quad \text{valori di attesa rispetto misura di Gibbs}$$

~~ci interessa~~

se n fisso m_n è funzione analitica (somme finite)

~~ma~~

nel limite $n \rightarrow \infty$ succede però qualcosa

$$m(\beta, h) = \lim_{n \rightarrow \infty} m_n(\beta, h)$$

scopriremo che

$$m(\beta, 0^+) = \lim_{h \downarrow 0} m(\beta, h) = \begin{cases} 0 & \text{se } \beta \leq \beta_c \\ m_a > 0 & \text{se } \beta > \beta_c \end{cases}$$

Non riusciamo a calcolare esattamente $m(\beta, h)$.

Ma ci andiamo molto vicini

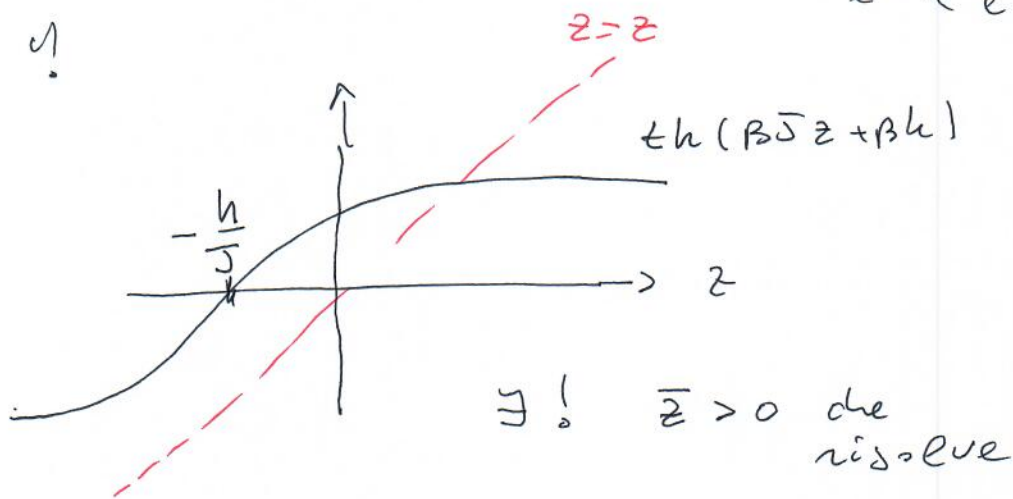
⊙ Eq. ne di campo medio $[\beta, J > 0]$

cerca $z \in \mathbb{R}$ T.O.C.

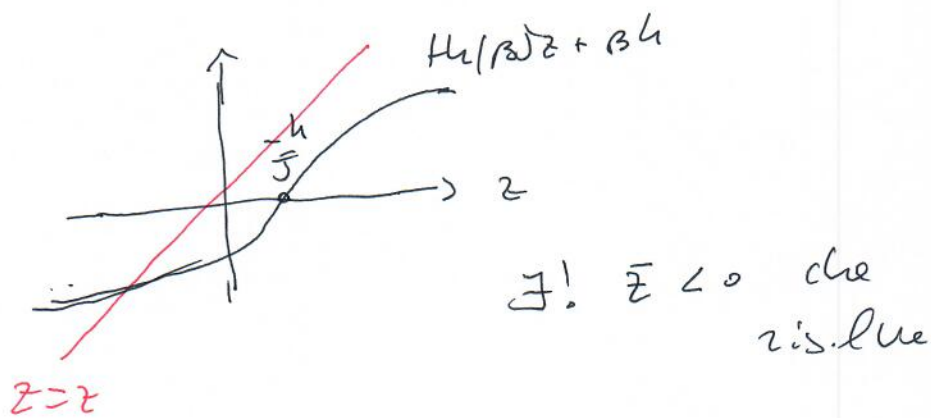
$$z = \tanh(\beta J z + \beta h) \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

cosa succede!

• $h > 0$



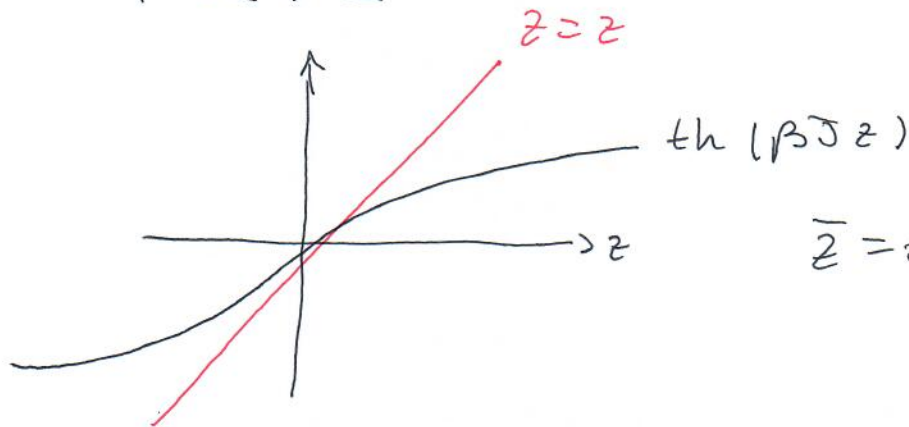
• $h < 0$



• $h = 0$: $\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \dots$

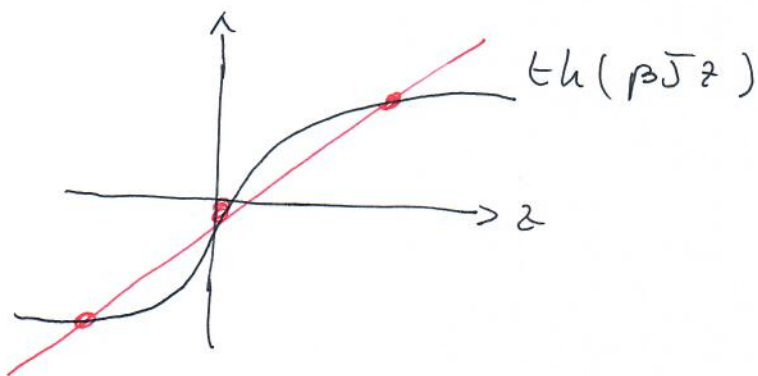
dipende se $\beta J > 1$
 < 1

• $h=0$ $\beta J \leq 1$



$\bar{z} = 0$! soluz.

• $h=0$ $\beta J > 1$



ci sono
3 soluzioni:

$\bar{z} = 0$

$\bar{z} = \pm m_{\beta}^*$

con $m_{\beta}^* > 0$

oss: se studiamo il sistema dinamico (tempo discreto) $[h=0, \text{pu\`a semplice}]$

$z_{n+1} = th(\beta J z_n)$

i punti fissi ~~sono~~ (posizioni di equilibrio) sono le soluz. dell'eq. di campo medio

Nel caso $\beta J > 1$ $z=0$ \u00e8 instabile

[questo perch\u00e9 $th'(0) > 1$]

Teo Siano $h \in \mathbb{R}$, $\beta, J > 0$

$$m(\beta, h) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(H_n) \quad \exists$$

- se $\{h \neq 0\} \cup \{h=0 \text{ e } \beta J \leq 1\}$

$$m(\beta, h) = \bar{z} = \text{! soluzione espone di campo medio}$$

- se $h=0 \text{ e } \beta J > 1$

$$m(\beta, 0^+) = m_{\beta}^+ = \text{! soluz } > 0 \text{ dell'eq.no di campo medio}$$

evitualmente

$$m(\beta, 0^-) = -m_{\beta}^+$$

~~ossia~~ ossia.

n fisso

$$m_n(\beta, h) = \mu_n\left(\frac{1}{n} \sum \sigma_i\right) = \frac{\partial}{\partial h} \frac{1}{\beta n} \lg Z_n(\beta, h)$$

infatti

$$Z_n(\beta, h) = \sum_{\sigma} \frac{1}{2^n} e^{-\beta H_n(\sigma)}$$

$$= \sum_{\sigma} \frac{1}{2^n} \exp\left\{ \frac{\beta J}{2n} \sum_{x,y} \sigma_x \sigma_y + \beta h \sum_x \sigma_x \right\}$$

basta fare il limite $n \rightarrow \infty$ (calcolare la pressione) e vedere la derivata rispetto a h

$$K_n(\sigma) = \frac{1}{2^n} \frac{1}{Z_n} e^{-\beta H_n(\sigma)} = \frac{1}{2^n} \frac{1}{Z_n} e^{\frac{\beta J}{2n} \sum_{x,y} \sigma_x \sigma_y + \beta h \sum_x \sigma_x}$$

$$= \frac{1}{2^n} \frac{1}{Z_n} \exp \left\{ \frac{\beta J}{2} m \left(K_n(\sigma) \right)^2 + \beta h m K_n(\sigma) \right\}$$

$$= \frac{1}{2^n} \frac{1}{Z_n} \exp \left\{ m \left[\frac{\beta J}{2} K_n(\sigma)^2 + \beta h K_n(\sigma) \right] \right\}$$

Prop. uniforme

$$K_n(\sigma) = \frac{1}{n} \sum_x \sigma_x$$

Questo è il motivo che rende "facili" i modelli di campo medio

$$\frac{dK_n}{\text{uniforme}} = \exp \left\{ m \Phi(\text{osservabile empirico}) \right\}$$

Pu trovare più in modelli a portate finite ~~esse~~ siano diventati arrivare a livello del processo empirico

Qui basta capire cosa succede a $K_n(\sigma)$

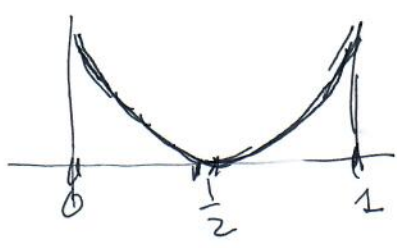
dim

o Passo 1 siano $\sigma_x, x=1, \dots, n$ scelte con probi: uniforme $\frac{1}{2n}$

$K_m(0)$ soddisfa un principio di grandi deviazioni con tasso

~~$I_{Ber}(m)$~~

$$I_{Ber}(m) = \begin{cases} \frac{1+m}{2} \log(1+m) + \frac{1-m}{2} \log(1-m) & |m| \leq 1 \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Tro di Gauer o calcolo ~~esplicito~~ esplicito con Stirling
 $[0, 2 \pm 1$ circa che $0, 1$ come fatto prima]

o Passo 2 via controllo a Laplace - Varadhan e OSS 2

$\sigma_x, x=1, \dots, n$ scelte con K_m

K_m soddisfa principio di grandi deviazioni con tasso

$$I_{CW}(m) = I_{Ber}(m) - \frac{1}{2} J \beta m^2 - \beta h m - C$$

con $C = \inf_{m \in [-1, 1]} \left\{ I_{Ber}(m) - \frac{1}{2} J \beta m^2 - \beta h m \right\}$

• Passo 3 [esercizio di calcolo 1]

Secondo il caso $h=0$ $\beta J > 1$

I_{CW} ha un ! minimo che è ottenuto
sull'! soluti dell'equazione di
campo medio

• Conclusione:

Se I_{CW} ha un ! minimo

grandi deviazioni \Rightarrow legge di grandi numeri

\Rightarrow [poiché K_n è v.d. limitata]

~~non~~ ~~è~~ convergente di $\mu_n(K_n)$

e ~~abbiamo~~ infine, tautologicamente,

$$m(\beta, 0^+) = \lim_{h \downarrow 0} m(\beta, h)$$

OSS 3

• Nella teoria generale

Tassi grandi deviazioni sono convessi
in meccanica statistica

[transizioni di fase \rightarrow non strettamente convessi]

riflette un principio di stabilità Termodinamica

derivate seconde

dei potenziali termodinamici

$$\geq 0$$

I_{CW}

non

è convesso

se $\beta J > 1$,

co "stable" è
del modello