ASSENZA DI TRANSIZIONI DI FASE IN DIMENSIONE 1 (POTENZIALI DI PORTATA FINITA)

- In $d=1$ e Φ portata finita ($\Phi_X = 0$ se $\mathrm{diam}(X) > R$)

Misure di Gibbs sono stretti parenti di catene di Markov.

Si possono analizzare con argomenti di "matrici di trasferimento".

Discuto solo il caso di Ising a primi vicini (portata $= 2$), ma l'argomento è generale.

L'ingrediente fondamentale è di algebra lineare

TEO (Perron-Frobenius)

Sia $A = (a_{ij})$ matrice $n \times n$ con entrate strettamente positive ($a_{ij} > 0$)

Allora

i) $\lambda_{max} = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{spec}(A)\}$ è autovalore

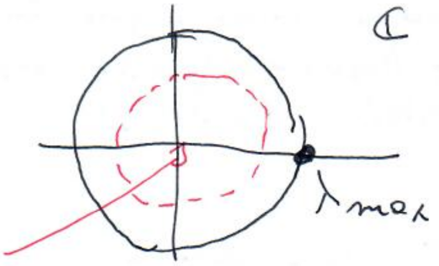
ii) λ_{max} è autovalore semplice

iii) Se $\lambda \in \mathrm{spec}(A)$, $\lambda \neq \lambda_+ \Rightarrow |\lambda| < \lambda_+$

iv) è possibile scegliere e_{max} l'autovettore associato a λ_{max}, in modo che $(e_{max})_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

v) gli altri autovettori non hanno tutte le coordinate > 0

ovvero



il resto dello spettro di A è qui

OSS 1

Perron-Frobenius $\Rightarrow$ Teorema ergodico per catene di Markov su spazio degli stati finito

Infatti

Basta $\exists\, k \geq 1$ t.c. A^k ha entrate strettamente positive

ma

ci possono essere altri autovalori con $|\lambda| = \lambda_{max}$

per esempio $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

~~sta~~ $\mathrm{spec}(A) = \{1, -1\}$

dimostrazione omessa

• Modello di Ising primi vicini $d = 1$ $h = 0$

$$H(\sigma) = -J \sum_x \sigma_x \sigma_{x+1} \qquad \text{Formale } \sigma \in \{-1,1\}^{\mathbb{Z}}$$

su $\{-N, \dots, 0, \dots, N\}$ con condizioni al bordo vuote

$$H_N(\sigma) = -J \sum_{x=-N}^{N-1} \sigma_x \sigma_{x+1} \qquad \sigma \in \{-1,1\}^{2N+1}$$

$$\mu_N(\sigma) = \frac{1}{Z_N} e^{-H_N(\sigma)}$$

β riassorbito in J e (consueta) oscillazione nella scelta della normalizzazione.

Calcoliamo la pressione

$$P_N = \frac{1}{(2N+1)} \lg Z_N = \frac{1}{2N+1} \lg \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-H_N(\sigma)}$$

$$p = \lim_{N \to \infty} P_N = ?$$

$$Z_N = \sum_{\sigma_{-N}} \cdots \sum_{\sigma_N} e^{+J\sigma_{-N}\sigma_{-N+1}} e^{+J\sigma_{-N+1}\sigma_{-N+2}} \cdots e^{+J\sigma_{N-1}\sigma_N}$$

è come un prodotto di matrici 2×2

$$A = \begin{pmatrix} e^{J} & e^{-J} \\ e^{-J} & e^{J} \end{pmatrix} \qquad \psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Z_N = \langle \psi, A^{2N} \psi \rangle \text{ --- } \rightarrow (\text{prodotto scalare su } \mathbb{R}^2)$$

infatti:

$N=0$ $\qquad Z_0 = \sum_{\sigma_0} e^0 = 2$

$$\langle \psi, \psi \rangle = (1\ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

$N=1$

$$\langle \psi, A^2 \psi \rangle = (1\ 1)\begin{pmatrix} e^{J} & e^{-J} \\ e^{-J} & e^{+J} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{J} & e^{-J} \\ e^{-J} & e^{+J} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \cdots$$

$$Z_3 = \sum_{\sigma_{-1}\sigma_0\sigma_1} e^{J(\sigma_{-1}\sigma_0 + \sigma_0\sigma_1)} =$$

$$= \sum_{\sigma_{-1}\sigma_0} e^{J\sigma_{-1}\sigma_0} \left(e^{J\sigma_0} + e^{-J\sigma_0} \right) = \cdots$$

il caso generale è lo stesso

Per ricavare A^{2N} trovo lo spettro di A

$$\det\begin{pmatrix} e^{J}-\lambda & e^{-J} \\ e^{-J} & e^{J}-\lambda \end{pmatrix} = 0 \iff \lambda = \lambda_{\pm} = e^{J} \pm e^{-J}$$

gli autovettori sono $\quad e_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \pm 1)$

$$A^{2N} = \lambda_+^{2N} \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{proiettore su } e_+} + \lambda_-^{2N} \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{proiettore su } e_-}$$

$$= (\lambda_+)^{2N}\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^{2N}}_{\xrightarrow[N\to\infty]{} 0} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$\langle \psi, A^{2N}\psi\rangle = \lambda_+^{2N}\Big[\underbrace{(1\ 1)\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=2} + \underbrace{\ldots}_{\xrightarrow[N\to\infty]{} 0}\Big]$$

$$p = p(J) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \lg \langle \psi, A^{2N}\psi\rangle$$

$$= \lg \lambda_+ = \lg(2 \operatorname{ch} J)$$

Se avessi avuto altre condizioni al bordo, il calcolo sarebbe stato sostanzialmente lo stesso

Ad esempio

effetto bordo + in $-N-1$
o bordo vuoto

bordo + in $N+1$

$$Z_N = \sum_{\sigma_{-N} \cdots \sigma_N} e^{J\sigma_{-N} + H_N(\sigma) + J\sigma_N}$$

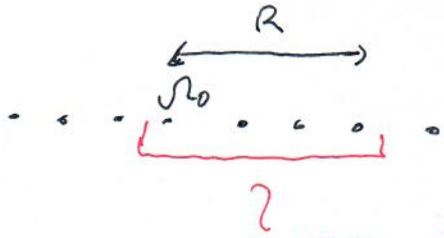
$$= \langle \psi, A^{2N+2} \psi \rangle \quad \text{con} \quad \cancel{\psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \quad \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

In ogni caso

$$p = \lim_N \frac{1}{2N+1} \lg Z_N = \lg \lambda_+$$

Il calcolo esplicito di λ_+ è speciale di Ising ($h=0$) ma l'argomento è generale

- pur di cambiare Ω_0 (spazio di singolo sito) posso ricondurmi portata 2:



Nuovo $\Omega_0 = \Omega_0^R$ = insieme finito

- ora la matrice di trasferimento è $2^R \times 2^R$

Comunque Perron-Frobenius $\Rightarrow$ $\exists!$ autovalore massimale

- Per argomenti di perturbazioni dello spettro (matrici finite) pressione = funzione analitica (costante di accoppiamento)

- Modello di Ising $d=1$ primi vicini $h \neq 0$

$$P(J,h) = ?$$

si tratta di scrivere la matrice di trasferimento

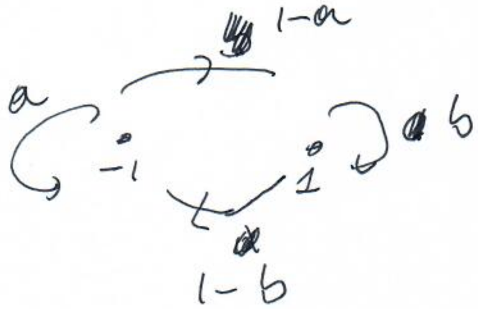
$$A = \begin{pmatrix} e^{J-h} & e^{-J} \\ e^{-J} & e^{J+h} \end{pmatrix}$$

trovo ~~gli~~ autovalore massimale di A, ...

⓪ Relazione con catene di Markov

$\Omega_0 = \{-1, 1\}$

catena di Markov su Ω_0



$$P = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}$$ probabilità di transizione

$$P\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$a, b \in (0,1)$

~~∃! π probabilità invariante (su Ω_0)~~

$\cancel{\pi P = \pi}$

Catena di Markov $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$

v.a a valori Ω_0

Data μ probabilità su Ω_0 (legge condizione iniziale)

$$\mathbb{P}_\mu(X_0 = \sigma_0, \dots, X_n = \sigma_n)$$

$$= \mu(\sigma_0)\, P(\sigma_0 \sigma_1) \cdots P(\sigma_{n-1} \sigma_n)$$

$\mathbb{P}_\mu$ probabilità su $\Omega_0^{\mathbb{Z}_+}$

~~$\pi \in \mathcal{P}(\Omega_0)$ è stazionaria per i nuovi~~

OSS) se ~~la~~ legge $(X_0) = \mu$

legge $(X_t) = \mu P^t \qquad t \in \mathbb{Z}_+$

[μ vettore rigo]

$\pi \in \mathcal{P}(\Omega_0)$ è ~~stazionaria~~ stazionaria (o invariante)

se $\quad \pi = \pi P$

Poiché $a, b \in (0,1)$. $\exists!\ \pi$ stazionaria (strettamente positiva)

e $\quad \mu P^t \to \pi \quad$ se $t \to \infty$

catena di Markov stazionaria : uso π come dato iniziale

$\mathbb{P}_\pi$ ~~è l'invariante~~

probabilità su $\Omega_0^{\mathbb{Z}_+}$

invariante per traslazioni temporali.

il marginale di singolo sito è π

" " di 2 siti è $\pi(\sigma_i) P(\sigma_i \sigma_{i+1})$

. . . . . .

Posso riguardare $\mathbb{P}_\pi$ come una probabilità su $\Omega = \Omega_0^{\mathbb{Z}}$

$$\mathbb{P}_\pi (X_{-n} = \sigma_{-n}, \dots, X_n = \sigma_n) = \mathbb{P}_\pi (X_0 = \sigma_{-n}, \dots, X_{2n+1} = \sigma_n)$$

per invarianza per traslazioni $\qquad \mathbb{P}_\pi \in \mathcal{P}_\theta(\Omega)$

invariante per traslazioni

$d = 1$ Interazione con portata finita

Stato di Gibbs di volume infinito è !

e corrisponde ad una catena di Markov stazionaria per un'opportuna probabilità di transizione

caso di portata $= 1$ $=$ Ising primi vicini

$\mathbb{P}_\pi$ catena di Markov stazionaria

$$\begin{array}{ccccccccccc} & -n & & & & & & & n & \\ + & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & + \end{array}$$

distribuzione di volume finito

con bordo $+$ (per fissare le idee)

$$\mathbb{P}_\pi (X_{-n} = \sigma_{-n}, \dots, X_n = \sigma_n \mid X_{-n-1} = +, X_{n+1} = +)$$

$$= \frac{P(+\sigma_{-n})\,P(\sigma_{-n}\,\sigma_{-n+1})\cdots P(\sigma_n +)}{\sum\limits_{\sigma_{-n}\cdots\sigma_n}^{Nor} \cdots}$$

voglio

$$\overset{\downarrow}{=} \text{nel} \quad \mu^{\overset{\text{condizioni al bordo}}{++}}_{\{-n,\dots,n\}}(\sigma_{-n}\cdots\sigma_n) \quad = \quad \text{stato di Gibbs di volume finito}$$

dichiamo chi deve essere P = probab. di transizione

$$A = \begin{pmatrix} e^{J-h} & e^{-J} \\ e^{-J} & e^{J+h} \end{pmatrix} \quad \text{matrice di trasferimento}$$

ovvero

$$A(\eta,\tau) = e^{J\eta\tau + h\frac{\eta+\tau}{2}} \qquad \eta,\tau\in\{-1,1\}$$

$$P(\eta\,\tau) = \frac{A(\eta,\tau)\,e_{max}(\tau)}{\lambda_{max}\,e_{max}(\eta)} \qquad \eta,\tau\in\{-1,1\}$$

è di Markov

$P(\eta\,\tau) > 0$

è autovettore con autov. λ_{max}

$$\sum_\tau P(\eta,\tau) = \frac{(A\,e_{max})(\eta)}{\lambda_{max}\,e_{max}(\eta)} = 1$$

$$\mathbb{P}_{\mu}(\cdots \mid X_{-n-1} = +,\, X_{n+1} = +1) \propto P(+\,\sigma_{-n})\,P(\sigma_{-n}\,\sigma_{-n+1})\cdots P(\sigma_n +)$$

$$\propto A(+\,\sigma_{-n})\,A(\sigma_{-n}\,\sigma_{-n+1})\cdots A(\sigma_n +)$$

interazione con il bordo

$$\propto e^{J(\sigma_{-n}\sigma_{-n+1}\cdots+\sigma_{n-1}\sigma_n) + h(\sigma_{-n}+\cdots+\sigma_n) + J(\sigma_{-n}+\sigma_n)}$$

$+ \ldots$

π, probabilità stazionaria per P, è

$$\pi(\eta) = e_{max}(\eta)^2$$

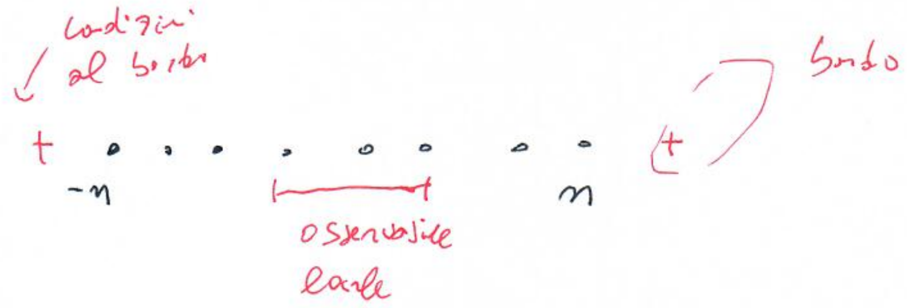
infatti

$$\sum_{\eta} \pi(\eta) \; P(\eta,\tau) = \sum_{\eta} \frac{e_{max}(\eta)^2 \; A(\eta,\tau) \; e_{max}(\tau)}{\lambda_{max} \; e_{max}(\eta)}$$

A è simmetrica
e e_{max} è autovettore con λ_{max}

$$= e_{max}(\tau)^2$$

⑥ Unicità dello stato di volume infinito



F locale

$$\lim_{n\to\infty} \mu^{\tau}_{\{-n,\dots,n\}}(F) = \mathbb{P}_{\pi}(F)$$ indipendente da τ

Per il teorema ergodico per catene di Markov.

$$\mathbb{P}_{\pi}(X_0 = \eta \mid X_{-n-1} = \tau_s, X_{n+1} = \tau_d)$$

$$\to \pi(\eta)$$ questo basta per osservabili locali

- se portata infinita ci possono invece essere transizioni di fase

potenziale a due corpi invariante per traslazione ferromagnetico $\qquad -J(y-x)\,\sigma_x\sigma_y$

$J(z) \geq 0$

se $\sum_z |z|\,J(z) < +\infty \implies \exists!$ stato di volume infinito

$J(z) \sim \frac{J}{z^2}$ e $J \gg 1 \implies$ ci sono transizioni di fase