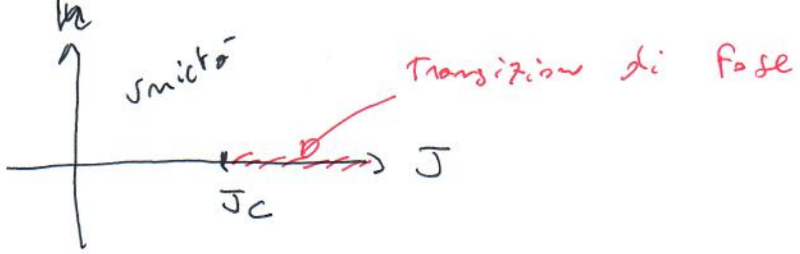
DIAGRAMMA DI FASE PER ISING: CASO $h \neq 0$ (1

Ising primi vicini (solo per semplicità) ferromagnetico

$d \geq 2$



Rimane da dimostrare la unicità dello stato di volume infinito se $h \neq 0$.

Conviene ricordarsi la dipendenza da h nelle notazioni. $J \geq 0$ fissato.

$$H_\Lambda(\sigma|\tau) = -J \sum_{\{x,y\}\cap\Lambda\neq\emptyset} \underbrace{\sigma_x \sigma_y}_{\text{leggi } \tau_y \text{ se } x\notin\Lambda} - h \sum_{x\in\Lambda} \sigma_x$$

$$\mu^\tau_{\Lambda,h}(\sigma) = \frac{1}{Z^\tau_{\Lambda,h}} e^{-H_\Lambda(\sigma|\tau)}$$

(pressione)

$$p(h) = \lim_{\Lambda\uparrow\mathbb{Z}^d} \frac{1}{|\Lambda|} \lg Z^\tau_{\Lambda,h}$$

limite $\exists$ ed è indipendente da τ

TEO 1 $p \in C^1(\mathbb{R}\setminus\{0\})$

[se $h \neq 0$ la pressione è differenziabile in h]

TEO 2

~~se~~ p è C^1 in $h \Rightarrow |\mathcal{G}(h)| = 1$

stati di Gibbs di volume infinito

Morale: per Ising le cose interessanti possono succedere solo per $h=0$.. Per ! stati di volume infinito basta guardare la pressione come funzione di $h \in \mathbb{R}$ invece che ~~su tutto~~ sullo spazio di Banach B_1 delle interazioni

[Dipende dalla monotonia FKG]

(2)

dim Teo 2

Siano $\mu_h^{\pm} = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \mu^{\pm}_{\Lambda, h}$ limite $\exists$ per monotonia FKG

per concludere ! stati di volume ∞ basta

$\mu_h^+ = \mu_h^-$ e poiché sono ordinati e invarianti per traslazioni

basta $\mu_h^+(\sigma_0) = \mu_h^-(\sigma_0)$

Si tratta quindi di scoprire che

p C^1 in h $\Rightarrow$ $\mu_h^+(\sigma_0) = \mu_h^-(\sigma_0) = p'(h)$

Sia Λ_n = successione di cubi di lato n

$$p_n^{\pm}(h) = \frac{1}{|\Lambda_n|} \log Z^{\pm}_{\Lambda_n, h}$$ pressione di volume finito

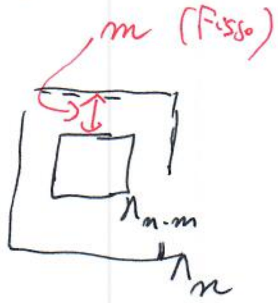
• Passo 1:

$$\mu_h^{\pm}(\sigma_0) = \lim_n \frac{d}{dh} p_n^{\pm}(h)$$ [in particolare lim $\exists$]

come al solito, per n finito

$$\frac{d}{dh} p_n^{+}(h) = \frac{1}{|\Lambda_n|} \mu^+_{\Lambda_n, h}\left(\sum_{x \in \Lambda_n} \sigma_x \right)$$

Fissa m. Poiché $\frac{|\Lambda_n \setminus \Lambda_{n-m}|}{|\Lambda_n|} \to 0$ per $n \to \infty$



$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{d}{dh} p_n^+(h) = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \mu^+_{\Lambda_n,h}\left(\frac{1}{|\Lambda_n|}\sum_{x\in\Lambda_n} \sigma_x\right)$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \mu^+_{\Lambda_n,h}\left(\frac{1}{|\Lambda_{n-m}|}\sum_{x\in\Lambda_{n-m}} \sigma_x\right)$$

[stesso con $\underline{\lim}$]

Per monotonia FKG + invarianza per traslazioni

$$\mu_h^+(\sigma_0) = \mu_h^+(\sigma_x) \le \mu^+_{\Lambda_n,h}(\sigma_x)$$

$x \in \Lambda_{n-m} \Rightarrow x + \Lambda_m \subset \Lambda_n$

$$\le \mu^+_{x+\Lambda_m,h}(\sigma_x) = \mu^+_{\Lambda_m,h}(\sigma_0)$$

media su $x \in \Lambda_{n-m}$

$$\mu_h^+(\sigma_0) \le \mu^+_{\Lambda_n,h}\left(\frac{1}{|\Lambda_{n-m}|}\sum_{x\in\Lambda_{n-m}} \sigma_x\right) \le \mu^+_{\Lambda_m,h}(\sigma_0)$$

ora $\underline{\lim}_n$ e $\overline{\lim}_n$. Ricavo (usando)

$$\mu_h^+(\sigma_0) \le \underline{\lim}_n \frac{d}{dh} p_n^+(h) \le \overline{\lim}_n \frac{d}{dh} p_n^+(h) \le \underbrace{\mu^+_{\Lambda_m,h}(\sigma_0)}_{\to\, \mu_h^+(\sigma_0)}$$

~~ora $m\to\infty$~~

ORA $m \to \infty$

- Passo 2 (Esercizio di funzioni convesse (su $\mathbb{R}$))

f_n convessa in (a,b)

$f_n \to f$ puntualmente in (a,b)

se f_n' e f' $\exists$ in x

Allora $f_n'(x) \to f'(x)$

Poiché $p_n^{\pm}(h)$ sono convesse e $p_n^{\pm}(h) \to p(h)$ puntualmente

$p(h)$ differenziabile in h $\Rightarrow$ $\mu_h^+(\sigma_0) = \mu_h^-(\sigma_0) = p'(h)$ $\square$

dim Teo 1 Considero $h>0$

$m(h) := \mu_h^+(\sigma_0)$ $\quad \cancel{m_n(h) := \mu^+_{\Lambda_n, h}(\sigma_0)}$

$$m_n(h) = \mu^+_{\Lambda_n,h}\Big(\frac{1}{|\Lambda_n|}\sum_{x\in\Lambda_n}\sigma_x\Big)$$

$\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$

poiché $\frac{\partial}{\partial h} p_n^+(h) = m_n(h)$

$$p_n^+(h) - p_n^+(0) = \int_0^h m_n(h')\,dh'$$

passo al limite $n\to\infty$. Per passo 1 + conv. dominata $(0 \leq m_n(h) \leq 1)$

$$p(h) - p(0) = \int_0^h m(h')\, dh'$$

ora $\quad m \in \mathcal{C}^0((0,+\infty)) \Rightarrow p \in \mathcal{C}^1((0,+\infty))$

come faccio a concludere m continuo?

Basta m concavo (funzioni concave/convesse su $\mathbb{R}$) ☒

Contenuto della prossima affermazione

(Griffiths, Hurst, Sherman)

<u>Prop</u> [Disuguagliante GHS]

Ising. $J \geq 0$, $h > 0$,

$$m_n(h) := \frac{1}{|\Lambda_n|} \mu^+_{\Lambda,h}\Big(\sum_{x \in \Lambda_n} \sigma_x \Big)$$

è concavo

o $\quad m_n''(h) \leq 0$

<u>OSS</u> $\quad p_n'' \geq 0 \quad$ [convessità pressione] ~~è una~~ riflette la condizione di stabilità termodinamica ed è sempre vera

questo dice $m_n'(h) \geq 0$

GHS è speciale di Ising (e simili)

$\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d \quad$ Ising $\quad J \geq 0 \quad$ ferromagnetico

$h \geq 0$ importante $\quad \mu = \mu^+_{\Lambda,h} \quad$ (per semplicità, anche non uniformi per traslazioni)

TEO (Diseg. GHS) Ising $h \geq 0$
$x, y, z \in \Lambda$

$$\mu\big((\sigma_x - \mu(\sigma_x))\,(\sigma_y - \mu(\sigma_y))\,(\sigma_z - \mu(\sigma_z)) \big) \leq 0$$

dim Prop. (assumo Teo)

$$M_n(h) := \mu_h\Big(\sum_{x \in n} \sigma_x \Big)$$

$$= \frac{1}{Z_h} \sum_{\sigma} \sum_{x \in \Lambda_n} \sigma_x \; e^{J \sum_{\langle x,y \rangle} \sigma_x \sigma_y + h \sum_{x \in n} \sigma_x}$$

algebra dei semiinvarianti, o cumulanti, o ~~ecc~~ correlazioni troncate, o ...

$\log Z_h$ è la funzione ~~[illegible]~~ generatrice

$$\frac{d^2}{dh^2} M_n(h) = \frac{d^3}{dh^3} \log Z_h = \sum_{x,y,z \in n} \mu_h(\sigma_x ; \sigma_y ; \sigma_z)$$

$$= \sum_{x,y,z} \underbrace{\mu_h\big((\sigma_x - \mu(\sigma_x))\,(\sigma_y - \mu(\sigma_y))\,(\sigma_z - \mu(\sigma_z)) \big)}_{\text{Teo} \to \leq 0} \leq 0$$

Per dimostrare GHS, 4 copie ~~[illegible]~~ indipendenti di Ising

$\mu^{\otimes 4}$ pos su $\Omega \times \Omega \times \Omega \times \Omega$ (sopprimo Λ dalla notazione)

~~chiamo le variabili~~ chiamo le variabili

$$\sigma, \tau, \sigma', \tau' \qquad (\sigma_x, \dots, x \in \Lambda)$$

<u>Lemma</u> Siano

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \delta\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\ 1&1&-1&-1\\ 1&-1&1&-1\\ -1&1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma\\ \tau\\ \sigma'\\ \tau'\end{pmatrix}$$

$A, B, C, D \subset \Lambda$

$$\mu^{\otimes 4}\left(\alpha_A \, \beta_B \, \gamma_C \, \delta_D \right) \geq 0$$

ove $\alpha_A = \prod_{x\in A} \alpha_x , \ldots$

<u>dim</u> La matrice è ortogonale: ~~quindi~~

$$\sigma_x\sigma_y + \tau_x\tau_y + \sigma'_x\sigma'_y + \tau'_x\tau'_y = \alpha_x\alpha_y + \beta_x\beta_y + \gamma_x\gamma_y + \delta_x\delta_y$$

quindi

$$H^+_\Lambda(\sigma) + H^+_\Lambda(\tau) + H^+_\Lambda(\sigma') + H^+_\Lambda(\tau')$$

$$= -J \sum_{\{x,y\}\subset\Lambda} \left(\alpha_x\alpha_y + \beta_x\beta_y + \gamma_x\gamma_y + \delta_x\delta_y \right)$$

$$- 2h \sum_{x\in\Lambda} \alpha_x \; - \; 2J \sum_{\substack{x\in\Lambda \\ y\notin\Lambda \\ |x-y|}} \alpha_x$$

← effetto del bordo +

$$\mu^{\otimes 4}\left(\alpha_A \beta_B \gamma_C \delta_D \right) = \frac{1}{Z_h^4} \sum_{\sigma,\tau,\sigma',\tau'} \alpha_A \alpha_B \gamma_C \delta_D \, e^{-[H^+(\sigma)+\cdots]}$$

sviluppo in serie

coefficienti positivi

$$= \sum_{\cdots} \prod_x \sum_{\sigma_x,\tau_x,\sigma'_x,\tau'_x} \alpha_x^a \, \beta_x^b \, \gamma_x^c \, \delta_x^d$$

rimangono solo i termini in cui a, b, c, d hanno la stessa parità

- se tutti pari ≥ 0
- se tutti dispari $\alpha_x \beta_x \gamma_x \delta_x = \frac{1}{4} \left(\sigma_x \tau_x - \sigma'_x \tau'_x \right)^2 \geq 0$

calcolo diretto

dim Teo:

$$\mu\left((\sigma_x - \mu(\sigma_x)) (\sigma_y - \mu(\sigma_y)) (\sigma_z - \mu(\sigma_z)) \right)$$

$$= - \mu^{\otimes 4} \left[(\alpha_z + \beta_z)(\gamma_x \delta_y + \gamma_y \delta_x) \right]$$

calcolo diretto

≥ 0 ∎

lemma

— o —

Possibili argomenti facoltativi:

- Teorema di Lee-Yang $p(h)$ è ~~[illegible]~~ analitica per $h \neq 0$

  adatto per appassionati di Analisi Complessa (vedi Simon o Velenik "Statistical mechanics" o simili)

- Grandi deviazioni per la magnetizzazione empirica per Ising

  Seppalainen Ex. 9.19 consigliato a tutti.