Matematica 2, prof. E. Beretta, I. Birindelli
Quarto foglio di esercizi

1) Calcolare la matrice Hessiana della funzione $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+1}$ in $(0,0)$ e in $(1,-1)$. Usando la formula di Taylor del secondo ordine, approssimare f con un polinomio del secondo ordine nel punto $(0,0)$.

2) Sia $f(x,y) = x^2y - 3xy + 2x$ e sia ϕ la curva chiusa data da

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \cos t, \\ y(t) = t \sin t \end{cases}$$

per $t \in [0, 2\pi]$ sia g la funzione f calcolata lungo la curva ϕ i.e. $g(t) = f(x(t), y(t))$.

a)Calcolare $g'(t)$.

b)Determinare i massimi e minimi di g.

c) Determinare il massimo e minimo assoluto di f nell'insieme limitato D che ha per bordo la curva ϕ. (Suggerimento: il punto $(3, -\frac{2}{3})$ non appartiene a D.)

3) Determinare la matrice Hessiana nei punti $(0,0)$ e $(1,-1)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

4) Determinare il massimo e minimo assoluto in

$$D = \{(x,y) \text{ t.c. } \mathrm{x}^2 + 3\mathrm{y}^2 \leq 5, 2\mathrm{x} + \mathrm{y} \geq 0\}$$

della funzione $f(x,y) = x^2y + 2x + 3y$.

5) Determinare i punti critici di $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$. Determinarne la natura (minimo, o massimo locale o punto sella).

6) Determinare i punti critici di $f(x,y) = xye^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}$. Determinarne la natura (minimo, o massimo locale o punto sella).

7) Determinare il massimo e minimo assoluto della funzione $f(x,y) = x^2ye^{-(x+y)}$ nel triangolo $T = \{x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 4\}$.

8) Determinare qual'è il triangolo iscritto nel semicerchio unitario, e avente un lato poggiato sul diametro che ha area massima.

9) Trovare i punti della figura geometrica:

$D = \{(x,y) :\ 17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100\}$ che sono più vicini all'origine e quelli che sono più distanti.