

Terzo foglio di Esercizi di Matematica I, 07/08 I. Birindelli

1. Sia Π_1 il piano passante per il punto $P_1 = (0, 1, 0)$ e generato dai vettori $\vec{u} = (1, 1, 0)$ $\vec{v} = (-1, 2, 1)$, sia Π_2 il piano determinato dall'equazione $2x + 2y - z = 1$ e sia Π_3 il piano per il punto $(1, 2, 0)$ ortogonale al vettore $(-1, 1, 2)$. Trovare i punti di intersezione di questi tre piani.

2. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcolare $A \cdot B$. Ridurre le matrici A e B , dedurne i loro ranghi. Calcolare il determinante di A e della ridotta di A .

3. Determinare per quali valori di k la seguente matrice è invertibile

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & k \\ 0 & k & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

è invertibile, per $k = 2$ calcolare A^{-1} .

4. Risolvere i seguenti sistemi di equazioni lineari, in particolare studiare il primo al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 3x - y + 3z = 0 \\ 2x - \alpha y + z = 3 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ 2x + 2y - 2z - t = 1 \\ x - y + z + 2t = 2 \\ x + y - z - 2t = 1 \\ 2y - 2z - t = -2 \end{cases}$$

5. Risolvere e caratterizzare geometricamente le soluzioni dei seguenti sistemi al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + 3y = 3 \\ x + y + kz = 1 \\ ky - 3z = \sqrt{6} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 2x + y - \sqrt{2}z = 1 \\ \sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y + z = 2 \end{cases}$$

6. Determinare il rango della matrice A al variare di $a \in \mathbb{R}$ e della matrice B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ a & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$