Matematica I, I. Birindelli

1. Trovare i domini di definizione delle seguenti funzioni

$$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}, \qquad g(x) = \log(2^x - 2), \qquad h(x) = \sqrt{\log\left(\frac{3}{x-2}\right)}, \qquad k(x) = \sqrt{\sin(2x)}.$$

2. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}, \quad \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}, \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\log(1+\cos x)}{\cos x}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$$

3. Determinare l'insieme I delle $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$x - |x^2 - 2x - 3| \geq 0$$

4. Determinare l'insieme dei punti di discontinuità della funzione $f(x) = (x-1)[x]$

5. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}, \quad f_1(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}, \quad f_2(x) = e^{x \operatorname{tg} x}$$

$$f_3(x) = (\log x)^3, \quad f_4(x) = \frac{x^p}{x^m - a^m}$$

dove $a,\ p,\ m$ sono delle costanti.

6. Calcolare la derivata in $x = 0$ di

$$f(x) = \begin{cases} e^{3x} & \text{per } x > 0 \\ x^2 + 3x + 1 & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$$

7. Studiare al variare di $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ la continuità e la derivabilità delle seguenti funzioni

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+1} & x > 1 \\ ax + 2b & x \leq 1 \end{cases} \qquad f_1(x) = \begin{cases} e^{-x+3} & x > 2 \\ ax^2 - bx + 1 & x \leq 2 \end{cases}$$

8. Determinare i punti di massimo e minimo relativo e assoluto, e gli intervalli di monotonia per le seguenti funzioni considerate nei loro insiemi di definizione: $f(x) := x + 1/x$, $g(x) := \frac{x}{x^2+1}$, $h(x) := \sqrt{x} - 2\sqrt{x+2}$, $k(x) := 2x + \frac{1}{x^2}$.

9. Sia $f(x) = \cos ax$, con $a \in \mathbb{R}$. Trovare l'espressione della derivata n-esima di f in un generico punto x.

10. Determinare se esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che la funzione $g(x) = \frac{x+a}{2x^2+3x+1}$ abbia una discontinuità eliminabile in $x = -1$.

11. (*) Sia G il grafico della funzione $f(x) = 4x^3$. Determinare l'equazione di una retta passante per il punto $(0, \alpha)$ (con $\alpha \in \mathbb{R}$) e tangente a G.

12. Tenendo conto del grafico della funzione $\log(x)$ e la definizione di $|x|$ disegnare il grafico della funzione $f(x) = \log|x+1| + \frac{2x}{|x|}$ In particolare determinare l'insieme di definizione di f.

13. Studiare il grafico cioe':

determinare insieme di definizione, eventuali parita', comportamento della funzione agli estremi del dominio, asintoti, insiemi di monotonia, eventuali punti di discontinuità, punti angolosi, punti di massimo o minimo (locali e non) e **disegnare il grafico** e una retta tangente in un punto significativo)

delle seguenti funzioni:

$$f(x) = x^4 - 4x^2 - 2, \quad g(x) = \frac{2x+2}{x-3}, \quad k(x) = 4x + \frac{1}{x-1}, \quad h(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-2}, \quad f_1(x) = \log|x-2|, \quad f_3(x) = \sqrt{|x+1|}, \quad f_4(x) = x\log x$$

$$h(x) = \log(x^2 - 2x - 1), \quad h_1(x) = \log\left(\frac{x+1}{2x-3}\right), \quad h_2(x) = \frac{\log x}{x}$$

$$k(x) = e^{x^2+3x-4}, \quad k_1(x) = e^{x^2-x^3}, \quad k_2(x) = \frac{x}{|x|}(\sqrt{1-x^2})$$

$$g(x) = \sin x + \cos x, \quad g_1(x) = \log(\sin x), \quad g_2(x) = e^{\sin x}.$$

14. Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_0^2 x^2 - 3x\, dx, \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x + \frac{\pi}{4})dx, \quad \int_0^2 e^{3x}dx,$$

$$\int_{-1}^2 xe^{2x}dx, \quad \int_0^2 |x-1|dx, \quad \int_0^3 x(x^2-1)^3dx, \quad \int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$$

$$\int_0^1 \frac{x}{x+1}dx, \quad \int_0^2 \frac{x^2}{x^3+1}dx, \quad \int_0^2 \frac{x}{(x^2+1)^3}dx.$$

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin x^2 dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} 3 + x\sin 2x\, dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}dx.$$

15. Sia $F(x) = \int_0^{3x} \sin(t^2 + \frac{\pi}{2})dt$. Calcolare $F(0)$. Determinare $F'(x)$.

Buon anno!