Corso di Laurea TAC . Matematica 1. Birindelli- Garroni

PROVA SCRITTA del 24 febbraio 2005

Cognome: .... **Nome**: ....

Esercizio 1. a) Dati i vettori $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ determinare le coordinate dei vettori

$$\vec{w} = |\vec{u} - 2\vec{v}|\vec{u}, \quad \vec{z} = < \vec{u}, \vec{v} > \vec{v}$$

b) Determinare λ affinché il vettore $\vec{z} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 4 \end{pmatrix}$ sia ortogonale a $\vec{u}$.

Risposta:

a) $\vec{u} - 2\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$, $|\vec{u} - 2\vec{v}| = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} \sqrt{41} \\ 2\sqrt{41} \end{pmatrix}$.

$< \vec{u}, \vec{v} >= -2 + 6 = 4$, $\vec{z} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$.

b)Due vettori non nulli sono ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è nullo. Quindi determiniamo λ tale che $< \vec{z}, \vec{u} >= 0$ cioè $\lambda + 8 = 0$, $\lambda = -8$.

Esercizio 2. a) Determinare l'equazione cartesiana di Π piano dello spazio passante per i tre punti $P_o = (1, 3, 4)$, $P_1 = (2, 1, -1)$ e $P_2 = (2, 3, 0)$.

b) Determinare per quali $a \in \mathbf{R}$ il punto $P_3 = (a, 2, -2)$ appartiene al piano e per quali il vettore $\vec{OP_3}$ è ortogonale al piano.

Risposta: a)Un generico punto $P = (x, y, z)$ appartiene al piano Π se i tre vettori $\vec{P_oP} = (x - 1, y - 3, z - 4)$, $\vec{P_oP_1} = (1, -2, -5)$, $\vec{P_oP_2} = (1, 0, -4)$ sono linearmente dipendenti. Tre vettori sono linearmente dipendenti se e solo se la matrice A delle coordinate ha rango 2, cioè se il determinante di A è nullo.

Si ricorda in oltre che questo è equivalente a richiedere che

$$< \vec{PP_o}, \vec{P_1P_o} \wedge \vec{P_2P_o} >= 0.$$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} x - 1 & y - 3 & z - 4 \\ 1 & -2 & -5 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} = 8(x - 1) - (y - 3) + 2(z - 4) = 0.$$

L'equazione del piano è:

$$8x - y + 2z = 13$$

b) P_3 appartiene al piano se le sue coordinate soddisfano l'equazione $8x - y + 2z = 13$. Sostituendo i valor otteniamo: $8a - 2 - 4 = 13$ cioè $8a = 7$, $a = \frac{8}{7}$.

Tutti i vettori ortogonali al piano sono colineari al vettore dato dai coefficienti dell'equazione cioè $(8, -1, 2)$. Quindi cerchiamo a tale che $(a, 2, -2) = \lambda(8, -1, 2)$, ma questo non può avvenire per nessun a . Quindi OP_3 non è mai ortogonale al piano.

Esercizio 3. Se esistono, determinare le soluzioni del seguente sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y + 3z = 4 \end{cases}$$

Risposta:

Per il Teorema di Rouché-Capelli, un sistema ammette soluzioni se il rango della matrice dei coefficienti è uguale al rango della matrice completa.

Calcoliamo il rango di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Il rango massimo di A è due, quindi vediamo se esiste una matrice 2X2 contenuta in A che abbia determinante diverso da zero.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 0, \ \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 3 + 2 = 5$$

Quindi il rango di A è due ma questo implica che il rango di $A' == \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ è anche 2, quindi il sistema ammette soluzioni.

In particolare, considerando x come un parametro basterà cercare le soluzioni di

$$\begin{cases} y - z = 1 - x \\ 2y + 3z = 4 - 2x \end{cases}$$

che sono $y = \frac{7-5x}{5}, \ z = \frac{2}{5}$.

Quindi l'insieme delle soluzioni è dato dall'insieme delle terne $(x, \frac{7-5x}{5}, \frac{2}{5})$ al variare di x in $\mathbf{R}$.

Esercizio 4. Sia $f(x) = \frac{x^2+5}{x-2}$
a)Determinare l'insieme di definizione di f
Risposta: $D = \mathbf{R} \setminus \{2\} := (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.
b) Determinare i limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+5}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(1+\frac{5}{x^2})}{x(1-\frac{2}{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(1+\frac{5}{x^2})}{(1-\frac{2}{x})} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+5}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(1+\frac{5}{x^2})}{x(1-\frac{2}{x})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(1+\frac{5}{x^2})}{(1-\frac{2}{x})} = -\infty$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = \frac{7}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \frac{7}{0^-} = -\infty$$

c) Determinare gli asintoti della funzione f
Risposta *Gli ultimi due limiti ci dicono che $x = 2$ è un asintoto. Inoltre la funione potrebbe avere degli asintoti obliqui. Infatti, procedendo come sopra e calcolando*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(1+\frac{5}{x^2})}{(1-\frac{2}{x})} = 1$$

Abbiamo trovato il coefficiente angolare. Ora calcolando:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+5}{x-2} = 2.$$

otteniamo dunque che l'asintoto obliquo in piu infinito è $y = x + 2$. Gli stessi calcoli mostrano che questo è l'asinto anche in meno infinito.
d) Calcolare $f'(x)$
Risposta $f'(x) = \frac{x^2-4x-5}{(x-2)^2}$
e) Determinare gli intervalli di monotonia di f.
Risposta *Gli intervalli di monotonia conincidono con gli intervalli in cui la derivata non cambia segno. È facile vedere che la derivata è positiva in $(-\infty, -1)$ e in $(5, +\infty)$. Mentre è negativa in $(-1, 2)$ e in $(2, 5)$. (Ricordarsi di tener conto che in 2 non è definita f e quindi neanche f'.) Per tanto,*
in $(-\infty, -1)$ f è crescente e in $(-1, 2)$ f è decrescente, quindi 1 è un massimo locale.
in $(2, 5)$ f è decrescente e in $(5, +\infty)$ è crescente, quindi 5 è un minimo locale.
f) Determinare l'immagine di f
Risposta: *Per questo è necessario calcolare il valore di f negli estremi locali: $f(1) = -6$ e $f(5) = 10$. Quindi Immagine di $f = (-\infty, -6) \cup (10, +\infty)$*
g) **Disegnare il grafico di f e di $|f|$**

Esercizio 5. a) Determinare una primitiva della funzione

$$f(x) = \pi + 2x^3 + \sqrt{x}\,.$$

b) Calcolare $\displaystyle\int_0^2 e^{2x} dx.$

Risposta:

a) $F(x) = \int f(x)dx = \Pi x + \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$

b)$\int_0^2 e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^2 = \frac{1}{2}(e^4 - 1)$