Forme bilineari simmetriche

Qui il campo dei coefficienti è sempre $\mathbb{R}$.

Definizione 1. *Sia V uno spazio vettoriale. Una forma bilineare su V è una funzione $b: V \times V \to \mathbb{R}$ tale che*

- $\forall\ v_1, v_2, v_3 \in V \quad b(v_1 + v_2, v_3) = b(v_1, v_3) + b(v_2, v_3)$,
- $\forall\ t \in \mathbb{R}\ \forall\ v_1, v_2 \in V \quad b(tv_1, v_2) = tb(v_1, v_2)$,
- $\forall\ v_1, v_2, v_3 \in V \quad b(v_1, v_2 + v_3) = b(v_1, v_2) + b(v_1, v_3)$,
- $\forall\ t \in \mathbb{R}\ \forall\ v_1, v_2 \in V \quad b(v_1, tv_2) = tb(v_1, v_2)$.

Equivalentemente, per ogni $v \in V$, $b(\ , v)$ e $b(v,\ )$ sono forme lineari su V.

In generale,

$$b(t_1v_1+t_2v_2, t_3v_3+t_4v_4) = t_1t_3b(v_1, v_3)+t_1t_4b(v_1, v_4)+t_2t_3b(v_2, v_3)+t_2t_4b(v_2, v_4).$$

Sia $A = (a_{i\,j})$ una matrice $n \times n$. Possiamo definire una forma bilineare b_A su $\mathbb{R}^n$ nel modo seguente: per ogni coppia di vettori x, y di $\mathbb{R}^n$, pensati come vettori colonna

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

poniamo

$$b_A(x, y) = x^T Ay,$$

cioè

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1\,1} & \dots & a_{1\,n} \\ \vdots & & \\ a_{n\,1} & \dots & a_{n\,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Consideriamo la base canonica $(e_1, \dots, e_n)$ di $\mathbb{R}^n$, osserviamo che, per ogni i, j,

$$b_A(e_i, e_j) = a_{i\,j}.$$

In generale, sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n e sia b una forma bilineare su V. Data $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ una base di V, definiamo la **matrice associata alla forma bilineare b rispetto alla base $\mathcal{B}$**

$$M_{\mathcal{B}}(b) = (m_{i\,j}),$$

matrice $n \times n$ ottenuta ponendo per ogni i, j

$$m_{i\,j} = b(v_i, v_j).$$

Cioè

$$M_{\mathcal{B}}(b) = \begin{pmatrix} b(v_1, v_1) & \dots & b(v_1, v_n) \\ \vdots & & \\ b(v_n, v_1) & \dots & b(v_n, v_n) \end{pmatrix}.$$

Per ogni coppia di vettori v, v' in V, abbiamo

$$b(v, v') = (v_{\mathcal{B}})^T M_{\mathcal{B}}(b) v'_{\mathcal{B}},$$

dove $v_{\mathcal{B}}$ è il vettore colonna delle coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Fissata una base $\mathcal{B}$, l'applicazione che a ogni forma bilineare b su V associa la matrice $M_{\mathcal{B}}(b)$ è biettiva (in effetti è un isomorfismo di spazi vettoriali).

Date due basi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ di V, consideriamo la matrice di cambiamento di base $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\mathrm{id}_V)$. Per ogni forma bilineare b su V abbiamo

$$M_{\mathcal{B}_2}(b) = (M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\mathrm{id}_V))^T M_{\mathcal{B}_1}(b) M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\mathrm{id}_V).$$

Infatti,

$$(v_{\mathcal{B}_2})^T (M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\mathrm{id}_V))^T M_{\mathcal{B}_1}(b) M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\mathrm{id}_V) v'_{\mathcal{B}_2} =$$

$$= \big(M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\mathrm{id}_V) v_{\mathcal{B}_2}\big)^T M_{\mathcal{B}_1}(b) M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\mathrm{id}_V) v'_{\mathcal{B}_2} = (v_{\mathcal{B}_1})^T M_{\mathcal{B}_1}(b) v'_{\mathcal{B}_1}.$$

Due matrici A e B $n \times n$ si dicono **congruenti** se esiste una matrice invertibile M tale che

$$A = M^T B M.$$

Due matrici $n \times n$ rappresentano la stessa forma bilineare (rispetto a due basi eventualmente distinte) se e solo se sono congruenti.

Esercizio. Consideriamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e definiamo $b(x, y) = x^T A y$. *Abbiamo* $A = M_{\mathcal{E}}(b)$. *Consideriamo un'altra base di* $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

Scrivere la matrice $M_{\mathcal{B}}(b)$.

Definizione 2. *Una forma bilineare b su V si dice* **simmetrica** *se per ogni v_1, v_2 in V*

$$b(v_1, v_2) = b(v_2, v_1).$$

Una forma bilineare b su V è simmetrica se e solo se la sua matrice associata rispetto a una qualsiasi base $\mathcal{B}$ è una matrice simmetrica, cioè

$$(M_{\mathcal{B}}(b))^T = M_{\mathcal{B}}(b).$$

D'ora in avanti consideriamo solo forme bilineari simmetriche.

Sia b una forma bilineare simmetrica fissata. Due vettori v_1, v_2 si dicono **ortogonali** se $b(v_1, v_2) = 0$, si scrive anche $v_1 \perp v_2$. Un vettore v si dice **isotropo** se $b(v, v) = 0$.

Per ogni sottoinsieme U di V, l'ortogonale

$$U^{\perp} = \{v \in V \mid b(v, u) = 0 \ \forall\ u \in U\}$$

è un sottospazio vettoriale di V.

Abbiamo

$$\begin{gathered} U_1 \subseteq U_2 \quad \Rightarrow \quad U_1^{\perp} \supseteq U_2^{\perp} \\ (U_1 + U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp} \\ (U_1 \cap U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} + U_2^{\perp} \end{gathered}$$

Il radicale di b è

$$V^{\perp} = \{v \in V \mid b(v, w) = 0 \ \forall\ w \in V\}.$$

Definizione 3. *La forma bilineare simmetrica b si dice* **non degenere** *se il suo radicale $V^{\perp}$ è zero.*

Si dice **definita positiva** *se $b(v, v) > 0$ per ogni $v \neq 0$.*

Una forma bilineare simmetrica definita positiva è necessariamente non-degenere.

La forma bilineare simmetrica b è non-degenere se e solo se la matrice associata a b rispetto a una qualsiasi base di V è di rango massimo.

Infatti, fissato $v \in V$, $b(v,\ )$ è una forma lineare su V, e $v \in V^{\perp}$ se e solo se $b(v,\ )$ è la forma lineare nulla. La matrice associata all'applicazione lineare $b(v,\ ) \colon V \to \mathbb{R}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ (e alla base canonica in $\mathbb{R}$) è uguale al vettore riga

$$(v_{\mathcal{B}})^T M_{\mathcal{B}}(b),$$

quindi $v \in V^{\perp}$ se e solo se tale vettore riga è zero, ovvero (trasponendo) se e solo se il vettore colonna $M_{\mathcal{B}}(b) v_{\mathcal{B}}$ è zero, ovvero il vettore colonna $v_{\mathcal{B}}$ appartiene a un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $\dim V - \operatorname{rg}(M_{\mathcal{B}}(b))$.

Teorema 1 (Teorema di Sylvester)**.** *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n, sia b una forma bilineare simmetrica su V. Allora esiste una base $\mathcal{B}$*

di V tale che la matrice associata alla forma bilineare b rispetto alla base $\mathcal{B}$ è della forma a blocchi

$$\left(\begin{array}{c|c|c} I_p & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_q & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

con $p \geq 0$, $q \geq 0$ e $p+q \leq n$, dove p e q non dipendono dalla base $\mathcal{B}$ scelta, ma solo dalla forma bilineare b.

Attenzione, precisiamo che i blocchi sulla diagonale della matrice dell'enunciato del Teorema di Sylvester sono rispettivamente della forma $p \times p$, $q \times q$ e $(n-p-q) \times (n-p-q)$, ma qualcuno di questi interi p, q, $n-p-q$ può anche essere zero, quindi qualcuno di questi blocchi può anche non comparire. Ad esempio, se $p = n$ (quindi $q = 0$) la matrice diventa semplicemente I_n.

La coppia di tali numeri naturali (p, q) si chiama **segnatura** della forma bilineare simmetrica b.

La forma bilineare simmetrica di segnatura (p, q) è non-degenere se e solo se $p + q = n$, ed è definita positiva se e solo se $p = n$.

Dimostrazione. Prima di tutto dimostriamo che per ogni spazio vettoriale V di dimensione finita e per ogni forma bilineare simmetrica b su V esiste una base $\mathcal{B}$ di V rispetto alla quale la matrice associata a b sia diagonale.

Procediamo per induzione sulla dimensione n di V. Se $n = 1$ è banale. Supponiamo che sia vero per ogni spazio vettoriale di dimensione $n-1$, e consideriamo V di dimensione n con b forma bilineare simmetrica. Se b è identicamente nulla allora tutte le basi di V vanno bene. Supponiamo che b non sia identicamente nulla, prendiamo un vettore v_1 non isotropo. Questo è sempre possibile infatti poiché b non è identicamente nulla esistono $u_1, u_2 \in V$ tali che $b(u_1, u_2) \neq 0$, ma se u_1 e u_2 sono entrambi isotropi, allora $u_1 + u_2$ non è isotropo:

$$b(u_1 + u_2, u_1 + u_2) = b(u_1, u_1) + b(u_2, u_2) + 2b(u_1, u_2) = 2b(u_1, u_2) \neq 0.$$

Consideriamo $\{v_1\}^\perp$, esso ha dimensione $n-1$, infatti coincide con $\operatorname{Ker}\big(b(v_1, \,)\big)$ e per costruzione $b(v_1, \,)$ è una forma lineare non nulla su V. Inoltre $v_1 \notin \{v_1\}^\perp$. La restrizione di b a $\{v_1\}^\perp$ è una forma bilineare simmetrica, diciamo b', quindi per ipotesi induttiva esiste una base $\mathcal{B}' = (v_2, \ldots, v_n)$ di $\{v_1\}^\perp$ rispetto alla quale la matrice associata a b' è diagonale. Ora $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ è una base di V rispetto alla quale la matrice associata a b è della forma a blocchi

$$\left(\begin{array}{c|c} b(v_1, v_1) & 0 \\ \hline 0 & M_{\mathcal{B}'}(b') \end{array}\right).$$

Sia quindi $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ una base rispetto alla quale la matrice associata a b è diagonale. Gli elementi sulla diagonale sono

$$m_{1\,1} = b(v_1, v_1), \quad \ldots, \quad m_{n\,n} = b(v_n, v_n).$$

Eventualmente riordinando i vettori della base possiamo supporre che i primi p elementi siano > 0, i successivi q siano < 0 e i restanti $= 0$ (per qualche p e q). Possiamo quindi riscalare i vettori della base nel modo seguente,

$$(\frac{v_1}{\sqrt{m_{1\,1}}}, \dots, \frac{v_p}{\sqrt{m_{p\,p}}}, \frac{v_{p+1}}{\sqrt{-m_{p+1\,p+1}}}, \dots, \frac{v_{p+q}}{\sqrt{-m_{p+q\,p+q}}}, v_{p+q+1}, \dots, v_n),$$

ottenendo la matrice desiderata.

Rimane da dimostrare che gli interi p e q non dipendono dalla base scelta. La loro somma è uguale al rango della matrice quindi non dipende dalla base. Mostriamo che p non dipende dalla base scelta, perché è la dimensione massima di un sottospazio vettoriale di V su cui la restrizione di b sia definita positiva.

Sia W un sottospazio di V su cui la restrizione di b è definita positiva. Se $\dim W$ fosse $> p$, intersecando con $W' = \mathrm{Span}\{v_{p+1}, \dots, v_n\}$, per la Formula di Grassmann avremmo

$$\dim(W \cap W') = \dim W + \dim W' - \dim(W + W') > p + (n - p) - n = 0,$$

cioè

$$W \cap \mathrm{Span}\{v_{p+1}, \dots, v_n\} \neq \{0\}$$

che è impossibile. $\square$

Esercizio.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Trovare una matrice invertibile M tale che $M^T AM$ sia della forma prescritta dal Teorema di Sylvester. (Si procede ricorsivamente come nella dimostrazione: se la forma è non nulla si trova un vettore non isotropo e ci si restringe al sottospazio ortogonale, e poi si ricomincia da capo fino a che non si arriva al sottospazio zero o a un sottospazio su cui la forma bilineare sia nulla.)