Foglio 2, Esercizi di Geometria 2014/2015, P.B.

1. Dire quali dei seguenti sono insiemi di generatori per $\mathbb{R}^3$ e quali di essi sono insiemi di vettori linearmente indipendenti.

$$a)\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \qquad b)\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}\right\}$$

$$c)\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right\} \qquad d)\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\right\}$$

$$e)\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\} \qquad f)\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{pmatrix}\right\}$$

2. Scrivere le coordinate del vettore v rispetto alla base $\mathcal{B}$.

$$v=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} \qquad \mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

3. L'insieme delle matrici $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ con la somma e il prodotto per scalari è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Di quale dimensione?

4. Completare $\mathcal{B}$ a una base di W.

$$\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right) \qquad W=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_2-x_3=0\right\}$$

5. Calcolare la dimensione della somma dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^5$.

$$\begin{cases} x_1+x_3-x_4=0\\ x_1-x_2-x_3+x_5=0\\ x_2+2x_3-x_4-x_5=0\end{cases} \qquad \begin{cases} x_1-2x_2-2x_4+2x_5=0\\ x_1-x_2-x_4+x_5=0\\ x_2+x_4-x_5=0\end{cases}$$

6. Siano U_1 e U_2 i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$.

$$U_1 = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \qquad U_2\colon \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

   (a) Scrivere una base $\mathcal{B}$ di $U_1 \cap U_2$.
   (b) Completare $\mathcal{B}$ a una base $\mathcal{B}'$ di $U_1 + U_2$.
   (c) Completare $\mathcal{B}'$ a una base $\mathcal{B}''$ di $\mathbb{R}^4$.

7. Mostrare che l'unione di due sottospazi vettoriali è un sottospazio vettoriale se e solo se uno dei due sottospazi è incluso nell'altro.

8. Siano U_1, U_2, U_3 sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V. Dire se le seguenti identità sono vere in generale.

   - $U_1 \cap (U_2 + U_3) = (U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3)$
   - $U_1 + (U_2 \cap U_3) = (U_1 + U_2) \cap (U_1 + U_3)$