Foglio 3, Esercizi di Geometria 2014/2015, P.B.

1. Consideriamo l'applicazione lineare da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^2$ tale che
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 \\ x_3 + x_4 \end{pmatrix}.$$
Determinare:
   (a) il nucleo e l'immagine.
   (b) l'immagine inversa di $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.
   (c) l'immagine di $\operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.
   (d) l'immagine inversa di $\operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

2. In ognuno dei seguenti casi, dire se esiste (e se è unico) un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ che soddisfa le condizioni date.
   (a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$
   (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$
   (c) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

3. Trovare un sistema lineare omogeneo il cui insieme delle soluzioni è uguale a
$$\operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

4. Siano U_1 e U_2 i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$.
$$U_1\colon \begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad U_2\colon \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$
Trovare un sistema lineare omogeneo il cui insieme delle soluzioni è uguale a $U_1 + U_2$.

5. Siano $A \in \mathrm{M}_{l,m}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Mostrare che

$$\mathrm{rg}(AB) \leq \mathrm{rg}\, A$$

e

$$\mathrm{rg}(AB) \leq \mathrm{rg}\, B.$$