Foglio 4, Esercizi di Geometria 2014/2015, P.B.

1. Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{K}[t]$ dei polinomi in una variabile t a coefficienti in $\mathbb{K}$. La derivazione $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ è un endomorfismo. Restringiamoci al sottospazio vettoriale dei polinomi di grado $\leq d$. Prendiamo la base $\mathcal{B} = (1, t, \dots, t^{d-1}, t^d)$. Scrivere $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)$.

2. Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{K}[t]$. La moltiplicazione m_q per un polinomio $q(t)$ fissato è un endomorfismo. Per ogni d, denotiamo con V_d il sottospazio vettoriale dei polinomi di grado $\leq d$ e con $\mathcal{B}_d$ la base $(1, t, \dots, t^{d-1}, t^d)$ di V_d.

   Fissiamo ora il polinomio $q(t) = t^2 + 2t - 3 \in \mathbb{R}[t]$. Restringiamoci a V_2, l'immagine di V_2 tramite m_q è inclusa in V_4, cioè possiamo considerare l'applicazione lineare $m_q\colon V_2 \to V_4$. Scrivere $M_{\mathcal{B}_4,\mathcal{B}_2}(m_q)$.

3. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$
   Consideriamo l'applicazione lineare $f\colon \mathrm{M}_{3,2}(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ tale che, per ogni $B \in \mathrm{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $f(B) = A\,B$. Scegliere delle basi a piacere $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ per $\mathrm{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ e $\mathrm{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ e scrivere la matrice $M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$.

4. Scrivere la matrice di cambiamento di base $M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ dove
$$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$
$$\mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

5. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
   rispetto alla base canonica.
   Sia $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare rappresentata dalla stessa matrice A ma rispetto alla base
$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$
   Cioè $A = M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g)$.
   Determinare il nucleo e l'immagine di $g \circ f$.

6. Per ognuna delle seguenti matrici $A \in \mathrm{M}_{3,3}(\mathbb{R})$,
   (a) dire se è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$,
   (b) dire se è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$,
   (c) in caso affermativo, determinare una matrice invertibile M tale che $M^{-1}AM$ sia diagonale.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Sia $V \subset \mathbb{R}[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 2. Consideriamo l'endomorfismo di V che manda il polinomio $p(t)$ nel polinomio
$$(t-2)(p(t+1)-p(t)).$$
Calcolare i suoi autovalori e i relativi autospazi, e dire se è diagonalizzabile.

8. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti in $\mathbb{R}$. Determinare gli autovalori e i relativi autospazi dell'endomorfismo f di V così definito: $f(X) = A\,X\,A^{-1}$, dove
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Si consideri l'endomorfismo di $\mathbb{C}^4$ tale che
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Determinarne gli autovalori, i relativi autospazi e dire se è diagonalizzabile.

10. Scrivere A^k per ogni $k \in \mathbb{N}$, dove A è la matrice seguente.
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$