**Foglio 5, Esercizi di Geometria 2014/2015, P.B.**

1. Scrivere delle equazioni parametriche per la retta passante per i punti $P_1 = (1, -2, 5)$ e $P_2 = (0, -2, 3)$.

2. Scrivere delle equazioni cartesiane per la retta passante per i punti $P_1 = (1, 1, 0)$ e $P_2 = (1, 0, -3)$.

3. Mostrare che i punti $P_1 = (2, -1, 0)$, $P_2 = (0, -2, 1)$, $P_3 = (1, 1, 1)$ non sono allineati e scrivere delle equazioni parametriche per il piano passante per i punti $P_1$, $P_2$, $P_3$.

4. Mostrare che i punti $P_1 = (1, 1, -1)$, $P_2 = (1, -1, 1)$, $P_3 = (-1, 1, 1)$ non sono allineati e scrivere un'equazione cartesiana per il piano passante per i punti $P_1$, $P_2$, $P_3$.

5. In ognuno dei seguenti casi, dire se i quattro punti dati sono complanari, in tal caso scrivere l'equazione cartesiana del piano che li contiene.

   (a) $P = (1, 0, 0)$, $Q = (0, 1, 0)$, $R = (0, 0, 1)$, $S = (1, 1, 1)$.

   (b) $P = (1, 1, 0)$, $Q = (0, 1, 1)$, $R = (1, 0, 1)$, $S = (2/3, 2/3, 2/3)$.

6. Se il punto $P$ non giace sulla retta $r$ esiste un solo piano che contiene $P$ e $r$. In ognuno dei seguenti casi mostrare che il punto $P$ non giace sulla retta $r$ e scrivere un'equazione cartesiana per il piano che contiene $P$ e $r$.

   (a)
$$P = (1, 0, -1) \qquad r\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = -3t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

   (b)
$$P = (1, 2, -2) \qquad r\colon \begin{cases} x + y = -1 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

7. Dire se le seguenti coppie di rette sono coincidenti, incidenti, parallele o sghembe.

   (a)
$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 - t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

   (b)
$$\begin{cases} x - y - z + 1 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 + t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

(c)

$$\begin{cases} x - y - z + 2 = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

(d)

$$\begin{cases} x + z + 1 = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

8. In ognuno dei seguenti casi dire se esiste (e se è unico) un piano passante per il punto $P$ che non interseca le rette $r_1$ e $r_2$.

   (a)

$$P = (1,1,1) \quad r_1\colon \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \qquad r_2\colon \begin{cases} y - z + 2 = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

   (b)

$$P = (3,-4,5) \quad r_1\colon \begin{cases} x - y - 3z + 1 = 0 \\ 2x + y + z - 2 = 0 \end{cases} \qquad r_2\colon \begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$$

   (c)

$$P = (1,0,0) \quad r_1\colon \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases} \qquad r_2\colon \begin{cases} y + z + 1 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

   (d)

$$P = (0,0,1) \quad r_1\colon \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases} \qquad r_2\colon \begin{cases} y + 2z - 1 = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

9. *Versione corretta.* Dati due sottospazi affini $L_1$ e $L_2$ di $\mathbb{A}^n$ denotiamo con $L_1 + L_2$ il più piccolo sottospazio affine che li contiene entrambi. Mostrare che se $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$

$$\dim(L_1 + L_2) + \dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2.$$

   Mostrare che in generale

$$\dim(L_1 + L_2) + \dim(L_1 \cap L_2) \leq \dim L_1 + \dim L_2$$

   se si pone per convenzione $\dim \varnothing = -1$.