Foglio 6, Esercizi di Geometria 2014/2015, P.B.

1. Per ognuna delle seguenti matrici A trovare M invertibile tale che $M^T AM$ sia della forma prescritta dal Teorema di Sylvester.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. La traccia $\mathrm{tr}(A)$ di una matrice quadrata A è la somma degli elementi sulla diagonale di A. Mostrare che $b\colon \mathrm{M}_{2,2}(\mathbb{R})\times\mathrm{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, tale che $b(X,Y) = \mathrm{tr}(XY)$, è una forma bilineare simmetrica non degenere. Determinarne la segnatura.

3. Sia V di dimensione finita n. Dimostrare che se la forma bilineare simmetrica b su V è non-degenere allora per ogni sottospazio vettoriale U di V:

   (a) $\dim U^\perp + \dim U = n$,

   (b) $(U^\perp)^\perp = U$.

D'ora in avanti fissiamo su $\mathbb{R}^n$ il prodotto scalare canonico $\langle\ ,\ \rangle$, e in generale su ogni $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V fissiamo un prodotto scalare definito positivo $\langle\ ,\ \rangle$.

4. Dimostrare che

$$\forall\ v, w \in V \quad \langle v, w\rangle = \frac{1}{4}\left(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2\right).$$

5. Dimostrare che se i vettori $v_1, \ldots, v_m$ sono non nulli e due a due ortogonali allora sono linearmente indipendenti.

6. Mostrare che se A è una matrice ortogonale allora $\det A$ è uguale a 1 oppure -1.

7. Mostrare che se $(v_1, \ldots, v_n)$ è una base ortonormale di V

   (a) $\forall\ v, w \in V \quad \langle v, w\rangle = \langle v, v_1\rangle\langle v_1, w\rangle + \ldots + \langle v, v_n\rangle\langle v_n, w\rangle$,

   (b) $\forall\ v \in V \quad \|v\|^2 = \langle v, v_1\rangle^2 + \ldots + \langle v, v_n\rangle^2$.

8. Calcolare la proiezione ortogonale di v su U, dove

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad U = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

9. Determinare le coordinate del vettore v rispetto alla base ortogonale $\mathcal{B}$, dove

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

10. Mostrare che autovettori relativi ad autovalori diversi di un endomorfismo simmetrico sono necessariamente ortogonali.

11. Per ognuna delle seguenti matrici simmetriche A trovare una matrice ortogonale M tale che $M^{-1}AM$ sia diagonale.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$