**Foglio 7, Esercizi di Geometria 2014/2015, P.B.**

1. Scrivere l'equazione della retta passante per il punto $(1, 2)$ e perpendicolare alla retta di equazione $x - 2y + 2 = 0$.

2. Scrivere l'equazione del piano passante per il punto $(0, 0, 1)$ e perpendicolare alla retta di equazioni
$$\begin{cases} x - y - z - 2 = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}.$$

3. Scrivere l'equazione del piano contenente la retta di equazioni
$$\begin{cases} x + y + 2z + 2 = 0 \\ x - y - 3z - 4 = 0 \end{cases}$$
e perpendicolare al piano di equazione $x + y + 2z + 2 = 0$.

4. Trovare la proiezione ortogonale del punto $P = (2, 3, 1)$ sul piano
$$\pi \colon x - y - 2z + 3 = 0.$$

5. Trovare la proiezione ortogonale del punto $P = (0, 1, -1)$ sulla retta
$$r \colon \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}.$$

6. Trovare la proiezione ortogonale sul piano $\pi \colon x - 2y - 2z = 0$ della retta
$$r \colon \begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ y + z + 2 = 0 \end{cases}.$$

7. $$r \colon \begin{cases} x + 2y + 2z + 2 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \end{cases} \qquad s \colon \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$$
Mostrare che le rette $r$ e $s$ sono sghembe. Trovare la retta di minima distanza, cioè la retta perpendicolare a $r$ e $s$ e incidente con entrambe.

8. In $\mathbb{E}^n$, sia $P$ un punto di coordinate $(a_1, \ldots, a_n)$ e $\pi$ un iperpiano di equazione $b_1 x_1 + \ldots + b_n x_n + b_0 = 0$. Mostrare che
$$\operatorname{dist}(P, \pi) = \left| \frac{b_1 a_1 + \ldots + b_n a_n + b_0}{\sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2}} \right|.$$

9. In $\mathbb{E}^n$, siano $P$ un punto e $r \colon P_0 + tv$ una retta. Mostrare che
$$\operatorname{dist}(P, r) = \sqrt{\|P - P_0\|^2 - \frac{\langle P - P_0, v \rangle^2}{\|v\|^2}}.$$

10. In $\mathbb{E}^3$, siano $r_1\colon P_1 + tv_1$ e $r_2\colon P_2 + tv_2$ due rette sghembe. Mostrare che

$$\operatorname{dist}(r_1, r_2) = \left| \frac{\det A}{\sqrt{\|v_1\|^2\|v_2\|^2 - \langle v_1, v_2\rangle^2}} \right|$$

dove $A$ è la matrice $3 \times 3$ le cui righe sono $v_1$, $v_2$ e $P_2 - P_1$.

11. Consideriamo nel piano il triangolo di vertici $P = (-1, -1)$, $Q = (2, 0)$, $R = (0, 3)$. Calcolare il circocentro (cioè il centro della circonferenza passante per i vertici) e l'incentro (cioè il centro della circonferenza tangente ai lati).

12. Sia $(O, P_1, P_2, P_3)$ un sistema di riferimento affine di $\mathbb{A}^3$. Sia $r$ la retta definita dalle seguenti equazioni cartesiane.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - 1 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$$

Scrivere le equazioni cartesiane di $r$ in coordinate rispetto al sistema di riferimento affine $(O', P_1', P_2', P_3')$, dove le seguenti sono le coordinate rispetto a $(O, P_1, P_2, P_3)$.

$$\begin{aligned} O' &= (-1, -1, -1) \\ P_1' &= (2, 1, 0) \\ P_2' &= (1, 2, 1) \\ P_3' &= (0, 1, 2) \end{aligned}$$

13. (a) Scrivere la matrice che rappresenta la rotazione di angolo $\frac{\pi}{2}$ rispetto alla retta generata da $(1, 1, 1)$.
    (b) Scrivere la matrice che rappresenta la riflessione rispetto al piano di equazione $x - y - z = 0$.

14. Nel piano, scrivere l'espressione in coordinate
    (a) della rotazione di angolo $\theta$ intorno al punto $(x_0, y_0)$,
    (b) della riflessione rispetto alla retta di equazione $ax + by = c$.

15. Nello spazio, scrivere l'espressione in coordinate
    (a) di una rotazione di angolo $\frac{\pi}{4}$ intorno alla retta di equazioni

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - z = -1 \end{cases}$$

    (b) della riflessione rispetto al piano di equazione $x - y + z = -1$.

16. Scrivere l'espressione in coordinate della rotazione, attorno alla retta passante per i punti $(0, -1, 0)$ e $(1, -1, -1)$, che manda il punto $(\sqrt{2}, 0, 0)$ nel punto $(0, 0, -\sqrt{2})$.

17. 
    - Mostrare che una traslazione, cioè un'isometria della forma $f(x) = x+c$ è la composizione di due riflessioni rispetto a due piani ortogonali al vettore $c$ che distano tra loro $\frac{\|c\|}{2}$.
    - Mostrare che una rotazione del piano è la composizione di due riflessioni.
    - Osservare quindi che tutte le isometrie del piano e dello spazio si possono sempre ottenere come composizione di un certo numero di riflessioni.

18. Dati due insiemi di $n+1$ punti in posizione generale, $\{P_0, \dots, P_n\}$ e $\{Q_0, \dots, Q_n\}$, tali che per ogni $i, j$ $\mathrm{dist}(P_i, P_j) = \mathrm{dist}(Q_i, Q_j)$, esiste una e una sola isometria $f$ tale che $P_i \mapsto Q_i$, per ogni $i$. Se in coordinate, per ogni $i$,

    $$P_i = (a_1^i, \dots, a_n^i),$$
    $$Q_i = (b_1^i, \dots, b_n^i),$$

    scrivere l'espressione in coordinate di $f$.

19. Siano $P = (1,0), Q = (0, \sqrt{3}), R = (-1,0)$. Scrivere l'espressione in coordinate di tutte le isometrie del piano che mandano il triangolo di vertici $PQR$ in se stesso.

20. Studiare le seguenti coniche.

    (a) $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 2x + 2y - 3 = 0$
    (b) $6xy - 3y^2 + x - 2y - 2 = 0$
    (c) $x^2 - 2xy + y^2 - 3x + y + 1 = 0$
    (d) $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$
    (e) $x^2 + xy - 2y^2 - x - 2y = 0$
    (f) $x^2 + 2xy + y^2 - x + y = 0$

21. Scrivere l'equazione dell'ellisse di centro $(1,-1)$ e vertici $(3,3)$ e $(3,-2)$.

22. Scrivere l'equazione dell'iperbole passante per $(-3,1)$ e di fuochi $(-1,2)$ e $(0,-1)$.

23. Scrivere l'espressione in coordinate di un'isometria del piano che manda la conica di equazione $x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$ nella conica di equazione $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 8 = 0$.

24. In $\mathbb{E}^2$, sia $r$ una retta, $F \notin r$ un punto ed $e > 0$ un numero reale. Mostrare che il luogo dei punti $P$ tali che $\mathrm{dist}(P, F) = e\,\mathrm{dist}(P, r)$ è un'ellisse se $e < 1$ o un'iperbole se $e > 1$. Il numero $e$ è detto eccentricità.

25. Studiare le seguenti quadriche.

    (a) $3y^2 - 3z^2 - 6\sqrt{2}xy - 1 = 0,$

(b) $x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2x + 2z + 4 = 0$,

(c) $x^2 + y^2 - 2xz + 2yz = 0$.

26. Studiare le seguenti coniche ottenute intersecando una quadrica con un piano.
$$\begin{cases} x^2 - y^2 - z = 0 \\ 4x - 2y - z - 3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + yz = 0 \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

27. Siano $r$ e $s$ due rette sghembe non perpendicolari. Mostrare che la superficie ottenuta ruotando la retta $r$ intorno alla retta $s$ è un iperboloide iperbolico.

28. Costruire una parametrizzazione delle due falde dell'iperboloide ellittico di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$.

29. Mostrare che se la conica di equazione
$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{0\,0} & a_{0\,1} & a_{0\,2} \\ a_{0\,1} & a_{1\,1} & a_{1\,2} \\ a_{0\,2} & a_{1\,2} & a_{2\,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$
è a centro, allora le coordinate del centro sono uguali a
$$\left( \frac{-\det \begin{pmatrix} a_{0\,1} & a_{1\,2} \\ a_{0\,2} & a_{2\,2} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} \\ a_{1\,2} & a_{2\,2} \end{pmatrix}}, \frac{-\det \begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{0\,1} \\ a_{1\,2} & a_{0\,2} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} \\ a_{1\,2} & a_{2\,2} \end{pmatrix}} \right).$$

30. (a) Mostrare che l'ellisse riflette tutti i raggi di luce provenienti da un fuoco verso il fuoco opposto.
(b) Mostrare che l'iperbole riflette certi raggi di luce diretti a un fuoco verso il fuoco opposto.
(c) Mostrare che la parabola riflette tutti i raggi di luce provenienti dal suo fuoco nella direzione dell'asse di simmetria.

31. Scrivere l'equazione dell'ellisse di fuochi $(0, 0)$ e $(3, \sqrt{3})$, tangente alla retta di equazione $y + \sqrt{3} = 0$.

32. Mostrare che se una conica contiene punti singolari allora è degenere.