

**Prova scritta di Geometria**  
**4 aprile 2016**

Compito A

1. Sia  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare tale che

$$f \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Determinare:

- (a) una base del nucleo di  $f$ ,
- (b) una base dell'immagine di  $f$ ,
- (c) la controimmagine  $f^{-1}(v)$  del vettore  $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

2. Determinare la retta di minima distanza tra le seguenti rette dello spazio

$$r: \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ y - z - 5 = 0 \end{cases} \quad s: \begin{cases} 3x - y - 5 = 0 \\ 2x - z - 2 = 0 \end{cases}.$$

3. Determinare una base ortonormale di autovettori per l'endomorfismo associato alla matrice

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$