

**Foglio 2, Esercizi di Geometria 2015/2016, P.B.**

1. Dire quali sono le relazioni di inclusione tra i seguenti sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}^3$ .

$$U_1 = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad U_2 = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$U_3: \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad U_4: \{x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

2. Dire quali dei seguenti sono insiemi di generatori per  $\mathbb{R}^3$  e quali di essi sono insiemi di vettori linearmente indipendenti.

$$a) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad b) \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$$

$$c) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad d) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$e) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad f) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$$

3. Scrivere le coordinate del vettore  $v$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$ .

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

4. L'insieme delle matrici  $M_{m,n}(\mathbb{K})$  con la somma e il prodotto per scalari è un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale. Di quale dimensione?

5. Completare  $\mathcal{B}$  a una base di  $W$ .

$$\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 - x_3 = 0 \right\}$$

6. Calcolare la dimensione della somma dei seguenti sottospazi di  $\mathbb{R}^5$ .

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

7. Siano  $U_1$  e  $U_2$  i seguenti sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}^4$ .

$$U_1 = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad U_2: \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

- (a) Scrivere una base  $\mathcal{B}$  di  $U_1 \cap U_2$ .
  - (b) Completare  $\mathcal{B}$  a una base  $\mathcal{B}'$  di  $U_1 + U_2$ .
  - (c) Completare  $\mathcal{B}'$  a una base  $\mathcal{B}''$  di  $\mathbb{R}^4$ .
8. Mostrare che l'unione di due sottospazi vettoriali è un sottospazio vettoriale se e solo se uno dei due sottospazi è incluso nell'altro.
9. Siano  $U_1, U_2, U_3$  sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale  $V$ . Dire se le seguenti identità sono vere in generale.
- $U_1 \cap (U_2 + U_3) = (U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3)$
  - $U_1 + (U_2 \cap U_3) = (U_1 + U_2) \cap (U_1 + U_3)$