

Foglio 3, Esercizi di Geometria 2015/2016, P.B.

1. Consideriamo l'applicazione lineare da \mathbb{R}^4 a \mathbb{R}^2 tale che

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 \\ x_3 + x_4 \end{pmatrix}.$$

Determinare:

- (a) il nucleo e l'immagine.
(b) l'immagine inversa di $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
(c) l'immagine di $\text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.
(d) l'immagine inversa di $\text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
2. In ognuno dei seguenti casi, dire se esiste (e se è unico) un endomorfismo di \mathbb{R}^3 che soddisfa le condizioni date.

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

(b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

3. Trovare un sistema lineare omogeneo il cui insieme delle soluzioni è uguale a

$$\text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

4. Siano U_1 e U_2 i seguenti sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^4 .

$$U_1: \begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \quad U_2: \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Trovare un sistema lineare omogeneo il cui insieme delle soluzioni è uguale a $U_1 + U_2$.

5. Siano $A \in M_{l,m}(\mathbb{K})$ e $B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Mostrare che

$$\text{rg}(AB) \leq \text{rg } A \quad \text{e} \quad \text{rg}(AB) \leq \text{rg } B.$$