Foglio 6, Esercizi di Geometria 2015/2016, P.B.

1. Dimostrare che
$$\forall\ v, w \in V \quad \langle v, w\rangle = \frac{1}{4}\left(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2\right).$$

2. Calcolare la proiezione ortogonale di v su U, dove
$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad U = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. Determinare le coordinate del vettore v rispetto alla base ortogonale $\mathcal{B}$, dove
$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

4. Scrivere la matrice associata, rispetto alla base canonica, alla proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ sul sottospazio vettoriale U di equazione $x - y + 2z = 0$.

5. Dimostrare che se i vettori $v_1, \dots, v_m$ sono non nulli e tra loro ortogonali, cioè $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ per ogni $i \neq j$, allora sono linearmente indipendenti.

6. Mostrare che se A è una matrice ortogonale allora $\det A$ è uguale a 1 oppure -1.

7. Mostrare che se $(v_1, \dots, v_n)$ è una base ortonormale di V
   (a) $\forall\ v, w \in V \quad \langle v, w\rangle = \langle v, v_1\rangle\langle v_1, w\rangle + \ldots + \langle v, v_n\rangle\langle v_n, w\rangle$,
   (b) $\forall\ v \in V \quad \|v\|^2 = \langle v, v_1\rangle^2 + \ldots + \langle v, v_n\rangle^2$.

8. Calcolare l'area del parallelogramma individuato in $\mathbb{R}^4$ dai due vettori:
$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

9. Per ognuna delle seguenti matrici simmetriche A trovare una matrice ortogonale M tale che $M^{-1}AM$ sia diagonale.
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Mostrare che autovettori relativi ad autovalori diversi di un endomorfismo simmetrico sono necessariamente ortogonali.

11. Per ognuna delle seguenti matrici A trovare M invertibile tale che M^TAM sia della forma prescritta dal Teorema di Sylvester.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

12. Determinare la segnatura della forma bilineare simmetrica di $\mathbb{R}^3$ associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

13. La traccia $\mathrm{tr}(A)$ di una matrice quadrata A è la somma degli elementi sulla diagonale di A. Mostrare che $b\colon \mathrm{M}_{2,2}(\mathbb{R})\times\mathrm{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, tale che $b(X,Y) = \mathrm{tr}(XY)$, è una forma bilineare simmetrica non degenere. Determinarne la segnatura.

14. Mostrare che se q è una forma quadratica su $\mathbb{R}^n$ definita positiva, allora è anche *uniformemente* definita positiva, cioè esiste $\lambda > 0$ tale che

$$q(x) \geq \lambda\|x\|^2.$$

15. Sia A una matrice simmetrica $n\times n$, e sia b_A la forma bilineare simmetrica associata su $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che b_A è definita positiva se e solo se

$$\det A_i > 0 \text{ per ogni } 1 \leq i \leq n,$$

dove A_i è la sottomatrice $i \times i$ di A ottenuta prendendo i primi i elementi delle prime i righe di A.