Foglio 1, Esercizi di Geometria 2016/2017, P.B.

1. Determinare l'insieme delle soluzioni dei seguenti sistemi lineari.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

2. Calcolare la dimensione dello spazio delle soluzioni dei seguenti sistemi lineari omogenei.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_5 + 2x_6 = 0 \\ x_2 - 2x_4 - 2x_5 - 2x_6 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

3. Studiare i seguenti sistemi lineari (nelle incognite x, y, z) al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ y + \alpha z = -1 \\ x - \alpha y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (\alpha - 2)x + y - z = 1 \\ (3 - \alpha)y - z = 1 \\ (\alpha - 2)x + 2y = 1 \end{cases}$$

4. Calcolare il rango del tabellone della tombola.

$$\begin{array}{rrcrr} 1 & 2 & \dots & 9 & 10 \\ 11 & 12 & \dots & 19 & 20 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 71 & 72 & \dots & 79 & 80 \\ 81 & 82 & \dots & 89 & 90 \end{array}$$

5. Di ognuna delle seguenti matrici quadrate dire se è invertibile ed eventualmente calcolarne l'inversa.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Trovare due matrici 2×2 che hanno lo stesso rango ma che non sono equivalenti per righe.

7. Trovare una matrice 3×3 con coefficienti tutti diversi da zero e con determinante uguale a 1.

8. Usando lo sviluppo di Laplace, calcolare il determinante di

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

9. Usando la formula dei cofattori, calcolare la matrice inversa di

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Risolvere il seguente sistema lineare.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$