Foglio 2, Esercizi di Geometria 2016/2017, P.B.

1. Dire quali sono le relazioni di inclusione tra i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$.

$$U_1 = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \qquad U_2 = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$U_3\colon \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \qquad U_4\colon \{x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

2. Dire quali dei seguenti sono insiemi di generatori per $\mathbb{R}^3$ e quali di essi sono insiemi di vettori linearmente indipendenti.

$$a)\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad b)\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$$

$$c)\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \qquad d)\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$e)\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad f)\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$$

3. Scrivere le coordinate del vettore v rispetto alla base $\mathcal{B}$.

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

4. L'insieme delle matrici $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ con la somma e il prodotto per scalari è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Di quale dimensione?

5. Completare $\mathcal{B}$ a una base di W.

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_2 - x_3 = 0 \right\}$$

6. Calcolare la dimensione della somma dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^5$.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

7. Trovare una base dell'intersezione dei seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$.

$$U_1 = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$U_2 = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

8. Siano U_1 e U_2 i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$.

$$U_1 = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} \qquad U_2 \colon \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

   (a) Scrivere una base $\mathcal{B}$ di $U_1 \cap U_2$.
   (b) Completare $\mathcal{B}$ a una base $\mathcal{B}'$ di $U_1 + U_2$.
   (c) Completare $\mathcal{B}'$ a una base $\mathcal{B}''$ di $\mathbb{R}^4$.

9. Mostrare che l'unione di due sottospazi vettoriali è un sottospazio vettoriale solo se uno dei due sottospazi è incluso nell'altro.

10. Siano U_1, U_2, U_3 sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V. Dire se le seguenti identità sono vere in generale.

   - $U_1 \cap (U_2 + U_3) = (U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3)$
   - $U_1 + (U_2 \cap U_3) = (U_1 + U_2) \cap (U_1 + U_3)$