Foglio 4, Esercizi di Geometria 2016/2017, P.B.

1. Scrivere delle equazioni parametriche per la retta passante per i punti $P_1 = (1, -2, 5)$ e $P_2 = (0, -2, 3)$.

2. Scrivere delle equazioni cartesiane per la retta passante per i punti $P_1 = (1, 1, 0)$ e $P_2 = (1, 0, -3)$.

3. Mostrare che i punti $P_1 = (2, -1, 0)$, $P_2 = (0, -2, 1)$, $P_3 = (1, 1, 1)$ non sono allineati e scrivere delle equazioni parametriche per il piano passante per i punti P_1, P_2, P_3.

4. Mostrare che i punti $P_1 = (1, 1, -1)$, $P_2 = (1, -1, 1)$, $P_3 = (-1, 1, 1)$ non sono allineati e scrivere un'equazione cartesiana per il piano passante per i punti P_1, P_2, P_3.

5. In ognuno dei seguenti casi dire se i quattro punti dati sono complanari.

   (a) $P = (1, 0, 0)$, $Q = (0, 1, 0)$, $R = (0, 0, 1)$, $S = (1, 1, 1)$.

   (b) $P = (1, 1, 0)$, $Q = (0, 1, 1)$, $R = (1, 0, 1)$, $S = (2/3, 2/3, 2/3)$.

6. In ognuno dei seguenti casi mostrare che il punto P non giace sulla retta r e scrivere un'equazione cartesiana per il piano che contiene P e r.

   (a)
$$P = (1, 0, -1) \qquad r\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = -3t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

   (b)
$$P = (1, 2, -2) \qquad r\colon \begin{cases} x + y = -1 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

7. Dire se le seguenti coppie di rette sono coincidenti, incidenti, parallele o sghembe.

   (a)
$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 - t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

   (b)
$$\begin{cases} x - y - z + 1 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 + t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

(c)

$$\begin{cases} x+z+1=0 \\ 2x-y-z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 2x-2y+z=0 \end{cases}$$

8. Determinare la retta passante per il punto P di coordinate $(1,-1,-1)$ parallela a entrambi i piani π_1 e π_2,

$$\pi_1 \colon x+y-z-1=0, \qquad \pi_2 \colon x-3y+z+1=0.$$

9. In ognuno dei seguenti casi descrivere l'insieme dei piani passanti per il punto P che non intersecano le rette r_1 e r_2 (tale insieme può essere vuoto, contenere un unico piano o contenerne più d'uno).

(a)

$$P=(1,1,1) \quad r_1 \colon \begin{cases} x+y+z+1=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \qquad r_2 \colon \begin{cases} y-z+2=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$$

(b)

$$P=(1,0,0) \quad r_1 \colon \begin{cases} x+y=0 \\ x+z+1=0 \end{cases} \qquad r_2 \colon \begin{cases} y+z+1=0 \\ x+y+z+1=0 \end{cases}$$

(c)

$$P=(0,0,1) \quad r_1 \colon \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-z+1=0 \end{cases} \qquad r_2 \colon \begin{cases} y+2z-1=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}$$

10. Determinare la retta passante per il punto P di coordinate $(1,1,2)$ che interseca entrambe le rette r e s,

$$r \colon \begin{cases} x+y+z-2=0 \\ 2x-y-2=0 \end{cases}, \qquad s \colon \begin{cases} x+z-1=0 \\ x-2y+2z=0 \end{cases}.$$

11. Determinare il più piccolo sottospazio affine di $\mathbb{A}^4$ che contiene entrambi i sottospazi affini seguenti.

$$L \colon \begin{cases} x_1-2x_2-x_3+2x_4=0 \\ x_1+x_2+x_3-1=0 \\ x_1+x_2-3x_4-1=0 \end{cases} \qquad M \colon \begin{cases} x_2+x_3+x_4-1=0 \\ x_1+x_3-3x_4-1=0 \\ x_1-x_2+x_4-3=0 \end{cases}$$