Foglio 6, Esercizi di Geometria 2016/2017, P.B.

1. Calcolare la proiezione ortogonale di v su U, dove
$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad U = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

2. Determinare le coordinate del vettore v rispetto alla base ortogonale $\mathcal{B}$, dove
$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

3. Scrivere la matrice associata, rispetto alla base canonica, alla proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ sul sottospazio vettoriale U di equazione $x - y + 2z = 0$.

4. Mostrare che se A è una matrice ortogonale allora $\det A$ è uguale a 1 oppure -1.

5. Dimostrare la *disugualianza triangolare*
$$\forall\ v, w \in V \quad |\|v\| - \|w\|| \leq \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

6. Dimostrare che se i vettori $v_1, \ldots, v_m$ sono non nulli e tra loro ortogonali, cioè $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ per ogni $i \neq j$, allora sono linearmente indipendenti.

7. Calcolare l'area del parallelogramma individuato in $\mathbb{R}^4$ dai due vettori:
$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

8. Per ognuna delle seguenti matrici simmetriche A trovare una matrice ortogonale M tale che $M^{-1}AM$ sia diagonale.
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Mostrare che autovettori relativi ad autovalori diversi di un endomorfismo simmetrico sono necessariamente ortogonali.

10. Per ognuna delle seguenti matrici A trovare M invertibile tale che $M^T AM$ sia della forma prescritta dal Teorema di Sylvester.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

11. Determinare la segnatura della forma bilineare simmetrica di $\mathbb{R}^3$ associata alla matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

12. La traccia $\mathrm{tr}(A)$ di una matrice quadrata A è la somma degli elementi sulla diagonale di A. Mostrare che $b\colon \mathrm{M}_{2,2}(\mathbb{R})\times\mathrm{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, tale che $b(X,Y) = \mathrm{tr}(XY)$, è una forma bilineare simmetrica non degenere. Determinarne la segnatura.