Esercizi della prova scritta di Geometria 1
27 giugno 2019

1. Sia $\mathbb{R}^4$ lo spazio quadridimensionale standard munito del prodotto scalare standard con coordinate canoniche (x_1, x_2, x_3, x_4). Si consideri il piano π in $\mathbb{R}^4$ passante per i punti $P_1 = (1, 2, 0, 0)$, $P_2 = (1, 0, 1, 1)$ e $P_3 = (1, 1, 1, 1)$, e sia $\vec{\pi}$ la sua giacitura.

   (i) Determinare equazioni cartesiane per π.

   (ii) Determinare una base ortonormale di $\vec{\pi}$.

   (iii) Sia $\vec{p} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proiezione ortogonale sul piano $\vec{\pi}$:

   – $\vec{p}$ è un endomorfismo ortogonale?

   – $\vec{p}$ è un endomorfismo simmetrico?

   – $\vec{p}$ è diagonalizzabile? Determinare in ogni caso i suoi autovalori, con i rispettivi autospazi e le molteplicità geometriche.

   (iv) Detta $r : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la riflessione ortogonale rispetto al piano π, determinare l'espressione esplicita di $r(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

   (v) Determinare, se esiste, una retta s sghemba con π, cioè tale che

   $$s \cap \pi = \emptyset, \text{ ma } s \text{ non parallela a } \pi.$$

   (vi) Determinare, se esiste, un piano σ sghembo con π, cioè tale che

   $$\sigma \cap \pi = \emptyset, \text{ ma } \vec{\sigma} \neq \vec{\pi}.$$

2. Sia $\mathcal{C}$ la conica del piano euclideo di equazione

   $$2xy + 2x - 4y - 2 = 0.$$

   (a) Di quale tipo di conica si tratta?

   (b) Trovare un nuovo sistema di riferimento cartesiano con coordinate x', y' rispetto al quale l'equazione della conica si riduce in forma canonica: scrivere la legge di trasformazione dalle coordinate x, y alle coordinate x', y', e l'equazione canonica nelle nuove coordinate x', y'.

   (c) Sia $\mathcal{C}_0$ la conica che ha per equazione la forma canonica di $\mathcal{C}$, e sia G il gruppo delle simmetrie rigide di $\mathcal{C}_0$, cioè il gruppo delle isometrie g del piano tali che $g(\mathcal{C}_0) = \mathcal{C}_0$. Determinare tutti gli elementi di G.

   (d) Mostrare che $\mathcal{C}_0$ ha un unico centro di simmetria (ricordiamo che un punto C si dice centro di simmetria di $\mathcal{C}_0$ se, per ogni punto P, $P \in \mathcal{C}_0 \;\Rightarrow\; C - \vec{CP} \in \mathcal{C}_0$). Mostrare quindi che le simmetrie affini di $\mathcal{C}_0$, cioè le affinità f del piano tali che $f(\mathcal{C}_0) = \mathcal{C}_0$, ne fissano il centro di simmetria.

(e) Sia $q(x_1, x_2)$ la forma quadratica associata a $\mathcal{C}_0$. Mostrare che il gruppo F degli automorfismi di $\mathbb{R}^2$ (gli isomorfismi lineari da $\mathbb{R}^2$ in sé) che preservano la forma quadratica $q(x_1, x_2)$ è strettamente più grande di G.

(f) Mostrare che ogni simmetria affine di $\mathcal{C}_0$ preserva la forma quadratica $q(x_1, x_2)$.