

Esercizi della prova intermedia di Geometria 1
15 aprile 2019

1. Nello spazio euclideo standard $\mathbb{E}^3$ si considerino i punti

$$P = (2, 4, 1), \quad Q = (1, 2, 2), \quad R = (3, 3, 1).$$

- (a) Mostrare che i tre punti non sono allineati.
- (b) Determinare l'equazione cartesiana del piano che li contiene.
- (c) Calcolare l'area del triangolo di vertici P, Q, R .
- (d) L'insieme S dei punti X tali che

$$\text{dist}(X, P) = \text{dist}(X, Q) = \text{dist}(X, R)$$

è un sottospazio affine? In ogni caso, determinare delle equazioni soddisfatte da tutti e soli i punti di S .

- (e) Esiste una sfera di raggio 3 passante per P, Q ed R ? Se sì, dire quante ce ne sono e determinarne le coordinate dei centri; altrimenti, dimostrare che una tale sfera non esiste.

2. Consideriamo nel piano euclideo standard $\mathbb{E}^2$ l'omotetia $H_{C,\lambda}$ di centro $C = (c_1, c_2)$ e rapporto $\lambda \neq 0$, e la traslazione T_v di vettore $v = (v_1, v_2)$.

- (a) Calcolare $H_{C,\lambda} \circ T_v(x_1, x_2)$.
- (b) Determinare in quali casi $H_{C,\lambda} \circ T_v$ è ancora un'omotetia.
- (c) Determinare in quali casi la composizione di due omotetie $H_{C,\lambda}$ e $H_{C',\lambda'}$ è ancora un'omotetia.

- (d) Dimostrare o confutare con un controesempio la seguente asserzione:

"l'insieme S formato da tutte le omotetie $H_{C,\lambda}$ del piano (di centro C qualsiasi e rapporto qualsiasi $\lambda \neq 0$) e da tutte le traslazioni T_v del piano è chiuso rispetto all'operazione di composizione".

- (e) In quali casi due omotetie $H_{C,\lambda}$ e $H_{C',\lambda'}$ commutano?

3. Consideriamo nel piano euclideo standard $\mathbb{E}^2$ la rotazione antioraria $R_{C,\vartheta}$ di centro $C = (c_1, c_2)$ e di angolo ϑ , e la traslazione T_v di vettore $v = (v_1, v_2)$.

- (a) Calcolare $R_{C,\vartheta} \circ T_v(x, y)$.
- (b) Determinare in quali casi $R_{C,\vartheta}$ e T_v commutano.
- (c) Determinare le coordinate del centro C della rotazione $T_v \circ R_{O,\vartheta}$.
Spiegare inoltre con un argomento di geometria come si trova tale punto a partire da v , e perché è il centro della rotazione.

- (d) Dimostrare o confutare con un controesempio la seguente asserzione:

"l'insieme S formato da tutte le rotazioni $R_{C,\vartheta}$ del piano (di centro C qualsiasi e angolo ϑ qualsiasi) è chiuso rispetto all'operazione di composizione".

- (e) In quali casi due rotazioni $R_{C,\vartheta}$ e $R_{C',\vartheta'}$ commutano?