Isometrie

Sia $(O, P_1, \ldots, P_n)$ un sistema di riferimento cartesiano fissato.

Definizione 1. *Un'applicazione biettiva* $f\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ *la cui espressione in coordinate sia*

$$f(x) = Bx + c$$

con B *ortogonale, si dice* **isometria** *(o anche movimento rigido).*

Le isometrie preservano la relazione di perpendicolarità e la distanza.

Consideriamo il caso particolare delle isometrie la cui espressione sia $f(x) = Bx$, cioè con $c = 0$. Sono cioè delle applicazioni lineari biettive $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ che conservano il prodotto scalare canonico: per ogni $v, w \in \mathbb{R}^n$

$$\langle f(v), f(w)\rangle = (Bv)^T(Bw) = v^T B^T Bw = v^T B^{-1} Bw = v^T w = \langle v, w\rangle.$$

Una tale applicazione lineare può avere come autovalori solo 1 o -1 (esercizio).

Il caso $n = 2$.

Ricordiamo che una matrice B, $n \times n$, è ortogonale se e solo se per ogni i, j compresi tra 1 e n

$$\langle B^i, B^j\rangle = \delta_{i\,j},$$

cioè le sue colonne formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

Quindi una matrice B, 2×2, ortogonale è necessariamente della forma

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Nel primo caso il determinante è uguale a 1 e abbiamo una **rotazione** di angolo θ intorno all'origine. Nel secondo caso il determinante è uguale a -1 e abbiamo una **riflessione** rispetto alla retta di equazione

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) x - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) y = 0.$$

Osserviamo, che nel primo caso la matrice B è diagonalizzabile se e solo se è uguale a I_2 oppure $-I_2$, cioè è una rotazione di angolo 0 oppure π. Nel secondo caso la matrice B è sempre diagonalizzabile infatti

$$\left(\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \right)$$

è una base ortonormale di autovettori di autovalore rispettivamente 1 e -1.

Il caso $n = 3$.

Il polinomio caratteristico di una matrice 3×3 ha necessariamente una radice reale. Quindi una matrice B, 3×3, ortogonale ha necessariamente un autovalore λ (uguale a 1 o -1). Sia $v \neq 0$ un autovettore di autovalore λ. Consideriamo il sottospazio vettoriale $\{v\}^\perp$, abbiamo per ogni $w \in \{v\}^\perp$

$$\langle v, Bw \rangle = \langle B^{-1}v, w \rangle = \langle \lambda^{-1} v, w \rangle = \lambda^{-1} \langle v, w \rangle = 0.$$

Quindi B è simile a una matrice della forma

$$\left(\begin{array}{r|c} \pm 1 & 0 \\ \hline 0 & B' \end{array} \right),$$

con B' ortogonale 2×2.

Si hanno quindi più casi. Se 1 è un autovalore di B, possiamo prendere $\lambda = 1$ e:

- se $\det B' = 1$ abbiamo una rotazione intorno alla retta generata da v;
- se $\det B' = -1$ abbiamo una riflessione rispetto a un piano contenente v.

Se 1 non è autovalore di B, $\lambda = -1$ e necessariamente $\det B' = 1$:

- abbiamo una rotazione intorno alla retta generata da v composta con la riflessione rispetto al piano $\{v\}^\perp$.