Brevi cenni alle parametrizzazioni

Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}^m$. Un'applicazione differenziabile $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ si dice **parametrizzazione** *di $f(A) \subset \mathbb{R}^n$ se è un diffeomorfismo su $f(A)$ (cioè se è iniettiva con $f^{-1}\colon f(A) \to A$ differenziabile).*

L'immagine $f(A)$ di una tale parametrizzazione è quella che a volte viene detta sottovarietà elementare di dimensione m. Una sottovarietà, in generale, è ricoperta da parametrizzazioni tra loro "compatibili".

Diamo solo degli esempi.

- Parametrizzazione dell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ meno un punto
$$f\colon \{t \in \mathbb{R}\colon -\pi < t < \pi\} \to \mathbb{R}^2, \qquad f(t) = \big(a\cos(t), b\sin(t)\big)$$
- Parametrizzazioni dei due rami dell'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$
$$f_\pm\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad f_\pm(t) = \big(\pm a\cosh(t), b\sinh(t)\big)$$
- L'applicazione f da $\{\theta \in \mathbb{R}\colon -\pi < \theta < \pi\} \times \{\varphi \in \mathbb{R}\colon -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\}$ a $\mathbb{R}^3$ tale che
$$f(\theta, \varphi) = (\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi)$$
è una parametrizzazione della sfera di centro 0 e raggio 1 privata di un meridiano. La sua inversa è l'applicazione che a un punto sulla sfera associa le sue coordinate *longitudine* e *latitudine*.
- La seguente è una parametrizzazione della sfera di centro 0 e raggio 1, $\mathrm{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3\colon \|x\| = 1\}$, meno il polo nord $P = (0, 0, 1)$:
$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathrm{S}^2 \setminus \{P\}, \qquad f(s,t) = \frac{1}{1 + s^2 + t^2}(2s, 2t, 1 - s^2 - t^2).$$
La sua inversa è la proiezione stereografica (dal polo nord) sul piano che contiene l'equatore:
$$g\colon \mathrm{S}^2 \setminus \{P\} \to \mathbb{R}^2, \qquad g(x,y,z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right).$$
- Sia $A \subset \mathrm{R}^m$ e $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile, l'applicazione $\phi\colon A \to \mathbb{R}^{m+n}$, $\phi(x) = (x, f(x))$, è una parametrizzazione del grafico di f.
- *Superfici di rotazione.* Sia $A \subset \mathbb{R}$ e f una parametrizzazione di $f(A)$ inclusa nel semipiano $\{(x,z) \in \mathbb{R}^2\colon x > 0\}$. L'applicazione
$$\phi\colon A \times \{t \in \mathbb{R}\colon -\pi < t < \pi\} \to \mathbb{R}^3,$$
$$\phi(s,t) = \big(f_1(s)\cos(t), f_1(s)\sin(t), f_2(s)\big),$$
è una parametrizzazione della superficie ottenuta ruotando la curva $f(A)$ intorno all'asse z (meno una curva).

Sia f una parametrizzazione come sopra. Sia $P \in A$. Lo **spazio tangente** a $f(A)$ in $f(P)$, $\mathrm{T}_{f(P)}f(A)$, è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ generato dai vettori

$$\frac{\partial f}{\partial t_1}(P), \dots, \frac{\partial f}{\partial t_m}(P).$$

Poiché f è un diffeomorfismo sulla sua immagine, tali vettori sono linearmente indipendenti e formano quindi una base di $\mathrm{T}_{f(P)}f(A)$.

Esempi.

- *L'ellisse.*

$$f(t) = \big(a\cos(t),\ b\sin(t)\big).$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) = \big(-a\sin(t),\ b\cos(t)\big).$$

  Ad esempio, nel punto P di coordinate $f(\pi/4)$, lo spazio tangente (in questo caso di dimensione 1) è generato dal vettore $(-a/\sqrt{2},\ b/\sqrt{2})$.

- *La sfera.*

$$f(\theta,\varphi) = (\cos\varphi\cos\theta,\ \cos\varphi\sin\theta,\ \sin\varphi).$$
$$\frac{\partial}{\partial\theta}f(\theta,\varphi) = (-\cos\varphi\sin\theta,\ \cos\varphi\cos\theta,\ 0).$$
$$\frac{\partial}{\partial\varphi}f(\theta,\varphi) = (-\sin\varphi\cos\theta,\ -\sin\varphi\sin\theta,\ \cos\varphi).$$

  Ad esempio, nel punto P di coordinate $f(\pi/4,\pi/4)$, lo spazio tangente (in questo caso di dimensione 2) è generato dai vettori $(-1/2,\ 1/2,\ 0)$ e $(-1/2,\ -1/2,\ 1/\sqrt{2})$.

Funzione implicita. Consideriamo il luogo degli zeri di una funzione differenziabile $F(x_1,\dots,x_n)$. Assumiamo che in un punto $Q \in \mathbb{R}^n$ con $F(Q) = 0$ si abbia *gradiente*,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(Q), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(Q)\right) \in \mathbb{R}^n,$$

non nullo. In questo caso il punto si dice *non singolare*. Allora si può dimostrare che esiste una parametrizzazione di un intorno di Q, $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ ($A \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ e $f(A)$ intorno di Q). Se $P \in A$, con $f(P) = Q$, lo spazio tangente nel punto Q è uguale al sottospazio dei vettori ortogonali al gradiente di F in Q.

Infatti, per ogni $j \le n-1$,

$$\frac{\partial F\circ f}{\partial t_j}(P) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(f(P))\frac{\partial f_i}{\partial t_j}(P) = 0$$

poiché $F\big(f(t_1,\dots,t_{n-1})\big) = 0$ in un intorno di P.

Esercizio: verificare esplicitamente la predetta ortogonalità nelle parametrizzazioni date sopra per l'ellisse e la sfera.

La stessa cosa si generalizza anche agli zeri di più funzioni $F_1, \ldots, F_m$ differenziabili, dove i gradienti sono linearmente indipendenti. Esiste una parametrizzazione di un intorno, $f\colon A \to \mathbb{R}^n$, e lo spazio tangente è uguale al sottospazio dei vettori ortogonali simultaneamente a tutti i gradienti delle $F_1, \ldots, F_m$.