Coniche e quadriche

Una quadrica è il luogo degli zeri in $\mathbb{E}^n$, lo spazio euclideo di dimensione n, di un polinomio di grado 2 nelle variabili $x_1, \ldots, x_n$. Polinomi proporzionali danno luogo alla stessa quadrica. Se $n = 2$ una quadrica viene anche detta conica.

Esempi.

- $x^2 + y^2 - 1 = 0$.
- $x^2 + y^2 + 1 = 0$.
- $(x + y + z + 1)^2 = 0$.

Per ogni polinomio di grado 2 in n variabili esiste una e una sola matrice simmetrica $(a_{i\,j})$ con indici $0 \leq i, j \leq n$ tale che il polinomio si scrive nel modo seguente

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{0\,0} & a_{0\,1} & \ldots & a_{0\,n} \\ a_{0\,1} & a_{1\,1} & \ldots & a_{1\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{0\,n} & a_{1\,n} & \ldots & a_{n\,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

cioè

$$\sum_{1 \leq i \leq n} a_{i\,i} x_i^2 \quad + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2a_{i\,j} x_i x_j \quad + \sum_{1 \leq j \leq n} 2a_{0\,j} x_j \quad + a_{0\,0}.$$

Esempio: L'equazione $x^2 + xy - yz - z^2 - x - z + 2 = 0$ diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1/2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

La proprietà di essere una quadrica non dipende dal sistema di riferimento affine scelto.

Denotiamo con $\mathbf{x}$ il vettore colonna delle variabili $x_1, \ldots, x_n$,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Se $\mathbf{x} = B\mathbf{x}' + \mathbf{c}$, passando dalle coordinate $x_1, \ldots, x_n$ alle coordinate $x'_1, \ldots, x'_n$, la quadrica associata alla matrice simmetrica A diventa la quadrica associata alla matrice

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \mathbf{c} & B \end{array}\right)^T A \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \mathbf{c} & B \end{array}\right)$$

infatti

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ B\mathbf{x}' + \mathbf{c} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \mathbf{c} & B \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix}$$

Teorema 1 (Classificazione delle coniche)**.** *L'equazione di ogni conica si può scrivere, in un opportuno sistema di riferimento cartesiano, in una e una sola delle seguenti forme (dette forme canoniche).*

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, $a \geq b > 0$ *(ellisse reale)*
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$, $a \geq b > 0$ *(ellisse immaginaria)*
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, $a, b > 0$ *(iperbole)*
- $\frac{x^2}{a^2} - y = 0$, $a > 0$ *(parabola)*
- $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 0$, $a \geq 1$ *(rette reali incidenti)*
- $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 0$, $a \geq 1$ *(rette immaginarie incidenti)*
- $\frac{x^2}{a^2} - 1 = 0$, $a > 0$ *(rette reali parallele)*
- $\frac{x^2}{a^2} + 1 = 0$, $a > 0$ *(rette immaginarie parallele)*
- $x^2 = 0$ *(rette coincidenti)*

In generale una quadrica si dice **degenere** se il determinante della sua matrice simmetrica associata è zero. *Una conica è degenere se e solo se la sua equazione si fattorizza (a coefficienti complessi).*

Mostriamo come partendo da una equazione generica si costruisce il cambiamento di sistema di riferimento cartesiano che mette l'equazione in forma canonica.

1. Sia $A = (a_{i\,j})$ una matrice simmetrica con $0 \leq i, j \leq 2$. In particolare la sottomatrice $A_{0\,0}$, ottenuta da A eliminando la prima riga e la prima colonna, è simmetrica. Prendiamo una matrice B, 2×2, ortogonale e tale che $B^T A_{0\,0} B$ sia diagonale. Ponendo

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)^T A \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

   abbiamo $A'_{0\,0}$ diagonale.

2. Abbiamo due casi.

(a) Se esiste $\mathbf{c}' \in \mathbb{R}^2$ tale che la sostituzione $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'' + \mathbf{c}'$ elimina i termini di primo grado, scriviamo

$$A'' = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \mathbf{c}' & I_2 \end{array} \right)^T A' \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \mathbf{c}' & I_2 \end{array} \right)$$

e abbiamo A'' diagonale.

Ora:

i. se $a''_{0\,0} \neq 0$, abbiamo un'ellisse, un'iperbole o due rette parallele,

ii. se $a''_{0\,0} = 0$, abbiamo due rette incidenti o coincidenti.

(b) Se non esiste $\mathbf{c}' \in \mathbb{R}^2$ tale che la sostituzione $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'' + \mathbf{c}'$ elimina i termini di primo grado, abbiamo una parabola.

Se $\mathbf{c}' \in \mathbb{R}^2$ come sopra esiste e è univocamente determinato, la conica si dice a centro, e le componenti di $\mathbf{c}'$ sono le coordinate del centro nel sistema di riferimento delle $\mathbf{x}'$.

Esercizio: Mettere in forma canonica la conica di equazione

$$xy + 2x - y - 2 = 0.$$

Risolviamo l'esercizio. Riscriviamo l'equazione in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1/2 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Consideriamo la sottomatrice 2×2, ottenuta eliminando la prima riga e la prima colonna,

$$A_{0\,0} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cerchiamo una matrice B ortogonale tale che $B^T A_{0\,0} B$ sia diagonale.

Scriviamo il polinomio caratteristico:

$$\det(A_{0\,0} - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1/2 \\ 1/2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{4} = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda + \frac{1}{2}\right).$$

Calcoliamo gli autospazi:

$$V_{\frac{1}{2}} = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\},$$

$$V_{-\frac{1}{2}} = V_{\frac{1}{2}}^{\perp} = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

Abbiamo una base ortogonale di $\mathbb{R}^2$ diagonalizzante:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Normalizzando otteniamo una base ortonormale:

$$\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right).$$

Possiamo prendere

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Utilizziamo quindi il cambiamento di coordinate

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Sostituendo nell'equazione di partenza otteniamo

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right) + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right) - 2 = 0,$$

cioè

$$\frac{1}{2}(x')^2 - \frac{1}{2}(y')^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{3}{\sqrt{2}}y' - 2 = 0.$$

Ora eliminiamo i termini di primo grado, con il metodo di completamento del quadrato di un binomio. Cominciamo con i termini nella variabile x',

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(x')^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x' \quad &= \frac{1}{2}\Big((x')^2 + \sqrt{2}x'\Big) = \\
&= \frac{1}{2}\left((x')^2 + 2(x')\big(\frac{1}{\sqrt{2}}\big) + \big(\frac{1}{\sqrt{2}}\big)^2 - \big(\frac{1}{\sqrt{2}}\big)^2\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\big(x' + \frac{1}{\sqrt{2}}\big)^2 - \big(\frac{1}{\sqrt{2}}\big)^2\right) = \\
&= \frac{1}{2}\big(x' + \frac{1}{\sqrt{2}}\big)^2 - \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Analogamente procediamo con i termini nella variabile y',

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}(y')^2 + \frac{3}{\sqrt{2}}y' \quad &= -\frac{1}{2}\Big((y')^2 - 3\sqrt{2}y'\Big) = \\
&= -\frac{1}{2}\left((y')^2 + 2(y')\big(-\frac{3}{\sqrt{2}}\big) + \big(-\frac{3}{\sqrt{2}}\big)^2 - \big(-\frac{3}{\sqrt{2}}\big)^2\right) = \\
&= -\frac{1}{2}\left(\big(y' - \frac{3}{\sqrt{2}}\big)^2 - \big(-\frac{3}{\sqrt{2}}\big)^2\right) = \\
&= -\frac{1}{2}\big(y' - \frac{3}{\sqrt{2}}\big)^2 + \frac{9}{4}.
\end{aligned}$$

L'equazione diventa

$$\left(\frac{1}{2}\big(x'+\frac{1}{\sqrt{2}}\big)^2-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{2}\big(y'-\frac{3}{\sqrt{2}}\big)^2+\frac{9}{4}\right)-2=0,$$

cioè

$$\frac{1}{2}\big(x'+\frac{1}{\sqrt{2}}\big)^2-\frac{1}{2}\big(y'-\frac{3}{\sqrt{2}}\big)^2=0.$$

Utilizziamo quindi il cambiamento di coordinate

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 3/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

e otteniamo

$$\frac{1}{2}(x'')^2-\frac{1}{2}(y'')^2=0,$$

o equivalentemente la forma canonica

$$(x'')^2-(y'')^2=0.$$

Si tratta dell'equazione di due rette incidenti, infatti si può anche scrivere come

$$(x''-y'')(x''+y'')=0,$$

e l'esercizio è concluso.

Ellisse: in $\mathbb{E}^2$, siano F_1 e F_2 due punti e $a > \frac{1}{2}\text{dist}(F_1, F_2)$ un numero reale. Il luogo dei punti P tali che

$$\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = 2a$$

è un'ellisse. I punti F_1 e F_2 si dicono fuochi. I numeri a e b, tale che $b^2 = a^2 - c^2$ dove $2c = \text{dist}(F_1, F_2)$, si dicono semiassi. Il centro dell'ellisse è il punto medio tra i fuochi.

Un caso particolare di ellisse è la circonferenza. L'ellisse è una circonferenza se e solo se $F_1 = F_2$, se e solo se $a = b$. L'equazione di una circonferenza di centro (c_x, c_y) e raggio r è $(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 = r^2$, cioè

$$x^2 + y^2 - 2c_x x - 2c_y y + c_x^2 + c_y^2 - r^2 = 0.$$

Se l'ellisse non è una circonferenza la retta passante per i fuochi e la sua ortogonale si dicono assi dell'ellisse, le intersezioni degli assi con l'ellisse si dicono vertici.

Prendendo il riferimento cartesiano dato dai suoi assi l'equazione dell'ellisse diventa quella canonica $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. In tale sistema di riferimento una parametrizzazione dell'ellisse è la seguente.

$$\begin{cases} x = a\cos(t) \\ y = b\sin(t) \end{cases}$$

Iperbole: in $\mathbb{E}^2$, siano F_1 e F_2 due punti e $0 < a < \frac{1}{2}\mathrm{dist}(F_1, F_2)$ un numero reale. Il luogo dei punti P tali che

$$|\mathrm{dist}(P, F_1) - \mathrm{dist}(P, F_2)| = 2a$$

è un'iperbole. I punti F_1 e F_2 si dicono fuochi. I numeri a e b, tale che $b^2 = c^2 - a^2$ dove $2c = \mathrm{dist}(F_1, F_2)$, si dicono semiassi. Il centro dell'iperbole è il punto medio tra i fuochi. La retta passante per i fuochi e la sua perpendicolare passante per il centro si dicono assi dell'iperbole, le intersezioni della prima con l'iperbole si dicono vertici. Le due rette (che passano per il centro) a cui l'iperbole tende all'infinito si dicono asintoti.

Prendendo il riferimento cartesiano dato dai suoi assi l'equazione dell'iperbole diventa quella canonica $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Gli asintoti hanno equazione rispettivamente

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0.$$

In tale sistema di riferimento una parametrizzazione dei due rami dell'iperbole è la seguente.

$$\begin{cases} x = \pm a \cosh(t) \\ y = b \sinh(t) \end{cases}$$

Parabola: in $\mathbb{E}^2$, sia r una retta e $F \notin r$ un punto. Il luogo dei punti P tali che $\mathrm{dist}(P, F) = \mathrm{dist}(P, r)$ è una parabola. Il punto F si dice fuoco. La retta r si dice direttrice. La retta passante per il fuoco e perpendicolare alla direttrice si dice asse della parabola, l'intersezione dell'asse con la parabola si dice vertice.

Prendendo il riferimento cartesiano dato dalla retta parallela alla direttrice passante per il vertice e dall'asse (scegliendo il verso che va dalla direttrice al fuoco) l'equazione della parabola diventa quella canonica $\frac{x^2}{a^2} - y = 0$, dove $a^2 = 2\mathrm{dist}(F, r)$.

Teorema 2 (Classificazione delle quadriche nello spazio)**.** *L'equazione di ogni quadrica nello spazio si può scrivere, in un opportuno sistema di riferimento cartesiano, in una e una sola delle seguenti forme.*

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, $a \geq b \geq c > 0$ *(ellissoide reale)*
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$, $a \geq b \geq c > 0$ *(ellissoide immaginario)*
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$, $a \geq b > 0$, $c > 0$ *(iperboloide ellittico)*
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, $a \geq b > 0$, $c > 0$ *(iperboloide iperbolico)*
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$, $a \geq b > 0$ *(paraboloide ellittico)*
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$, $a \geq b > 0$ *(paraboloide iperbolico)*
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 = 0$, $a \geq b > 0$ *(cono reale)*

- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+z^2=0,\ a\geq b>0$ *(cono immaginario)*
- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,\ a\geq b>0$ *(cilindro ellittico)*
- $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0,\ a,b>0$ *(cilindro iperbolico)*
- $\frac{x^2}{a^2}-y=0,\ a>0$ *(cilindro parabolico)*
- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0,\ a\geq b>0$ *(cilindro immaginario)*
- $\frac{x^2}{a^2}-y^2=0,\ a\geq 1$ *(piani reali incidenti)*
- $\frac{x^2}{a^2}+y^2=0,\ a\geq 1$ *(piani immaginari incidenti)*
- $\frac{x^2}{a^2}-1=0,\ a>0$ *(piani reali paralleli)*
- $\frac{x^2}{a^2}+1=0,\ a>0$ *(piani immaginari paralleli)*
- $x^2=0$ *(piani coincidenti)*

Le quadriche del piano si chiamano coniche poiché si possono ottenere nello spazio come intersezione di un piano con un cono reale.

Se la quadrica è degenere la sua equazione non necessariamente si fattorizza. Se la matrice simmetrica associata ha rango 3 abbiamo un cono o un cilindro. Se ha rango ≤ 2 una coppia di piani, quindi in questo caso l'equazione si fattorizza (a coefficienti complessi).