Corso di laurea in Matematica
SAPIENZA Università di Roma

Prove scritte di Meccanica Razionale (testi e soluzioni)

Paolo Buttà & Piero Negrini

Dipartimento di Matematica
"Guido Castelnuovo"
SAPIENZA Università di Roma

Indice

1 Testi

1.1 Compito 1

In un piano verticale una sbarra materiale di massa M, di estremi A, B, lunghezza 2ℓ, con distribuzione di massa omogenea, è libera di ruotare attorno al suo centro fisso O. Sulla sbarra è fissato un punto materiale P di massa m ad una distanza $\frac{\ell}{2}$ da B.

Su una retta immateriale orizzontale passante per O può scorrere senza attrito un punto materiale P_1 di ugual massa m. Tra i punti P e P_1 si esercita una forza elastica di costante k, $k > 0$. Assunta la retta orientata come asse coordinato, sia x la corrispondente ascissa del punto P_1 e θ l'angolo che la direzione $\overrightarrow{AB}$ forma con il suddetto asse. Si chiede:

1) Scrivere la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.

2) Individuare le posizioni di equilibrio, al variare del parametro $\lambda = \frac{2mg}{k\ell}$, studiandone le relative proprietà di stabilità. Si determinino quindi le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.

3) Si consideri ora lo stesso sistema ma su un *piano orizzontale*. Fissate le condizioni iniziali $\theta_0 = 0$, $\dot{\theta}_0 = 0$, determinare i corrispondenti moti.

1.2 Compito 2

Su un piano verticale, sia $\{O; x, y\}$ un sistema di riferimento ortonormale con l'asse y diretto secondo la verticale ascendente. Una sbarretta omogenea AB, di massa M e lunghezza ℓ, giace in tale piano ed ha l'estremo A vincolato a scorrere senza attrito lungo l'asse delle ascisse. L'estremo B della sbarretta è richiamato dall'origine delle coordinate attraverso una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Si denoti con x l'ascissa del punto A e con θ l'angolo che la direzione $\overrightarrow{AB}$ forma con l'asse delle ascisse.

Si scriva la lagrangiana del sistema, si individuino le posizioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità al variare del parametro $\lambda = \dfrac{Mg}{2k\ell}$.

Si calcolino inoltre le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.

1.3 Compito 3

Su un piano verticale, sia $\{O; x, y\}$ un sistema di riferimento ortonormale con l'asse y diretto secondo la verticale ascendente. Il baricentro G di una sbarretta omogenea AB di massa m e lunghezza 2 è vincolato a scorrere senza attrito lungo la guida curvilinea di equazione $y = x^2/2$. L'estremo A della sbarretta è attratto dall'asse delle ordinate tramite una molla ideale di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Si indichino con x l'ascissa del punto G e con θ l'angolo che il vettore $\overrightarrow{GA}$ forma con l'asse delle ascisse.

1) Si scriva la lagrangiana del sistema, si individuino le posizioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità. Si calcolino inoltre le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.

2) Si modifichi il sistema assumendo che anche l'estremo B della sbarretta è attratto dall'asse delle ordinate tramite una molla ideale di uguale costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Si scriva la lagrangiana del problema individuando due integrali primi del moto. Quindi si discutano qualitativamente i moti del sistema, con particolare riguardo all'esistenza di soluzioni periodiche non banali.

1.4 Compito 4

Sia $\{O; x, y, z\}$ un sistema di riferimento ortonormale con l'asse z diretto secondo la verticale ascendente. Un punto materiale pesante P_1 di massa m è vincolato a scorrere senza attrito lungo la guida circolare di centro l'origine O, raggio unitario e giacente sul piano coordinato $\{O; x, y\}$. Tale punto è attratto da un secondo punto pesante P_2, di ugual massa m, tramite una molla ideale di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Il punto P_2 è a sua volta vincolato a scorrere senza attrito lungo la guida circolare di centro l'origine O, raggio unitario e giacente sul piano coordinato $\{O; y, z\}$. Si indichino con φ l'angolo che il vettore $\overrightarrow{0P_1}$ forma con l'asse delle ascisse x e con θ l'angolo che il vettore $\overrightarrow{OP_2}$ forma con l'asse delle ordinate z.

Si scriva la lagrangiana del sistema, si individuino le posizioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità. Si calcolino inoltre le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.

1.5 Compito 5

Una guida parabolica (immateriale) è libera di ruotare attorno l'asse verticale u, passante per il punto fisso O. Si introduca un sistema di riferimento fisso $\{O; x, y, z\}$, con origine in O ed asse z diretto coincidente con l'asse u e diretto come la verticale ascendente. Si consideri un sistema di riferimento solidale alla guida $\{O; \xi, \eta, \zeta\}$, con piano della guida π assegnato da $\eta = 0$, asse ζ coincidente con u e diretto come la verticale ascendente. In questo sistema di coordinate la guida è rappresentata da

$$\zeta = \frac{a}{2}\xi^2, \quad a > 0.$$

Sia infine ϕ l'angolo che π forma col piano fisso $y = 0$, contato in verso antiorario. Sulla guida è libero di scorrere senza attrito un punto materiale P, di massa m. Inoltre, fissato sulla guida nel punto di coordinata $\xi = L$, vi è il punto Q, di massa M.

1) Si scrivano le coordinate dei punti P ed Q nel sistema fisso. Si scriva di conseguenza la Lagrangiana del sistema e le relative equazioni di Lagrange.

2) Si individui l'integrale primo del sistema di Lagrange $\mathcal{L}$ corrispondente alla coordinata ciclica, e lo si denoti con P. Si consideri poi il sistema lagrangiano $\hat{\mathcal{L}}$, ad un grado di libertà, ottenuto restringendo l'originale sistema sulla superficie assegnata da $P = k$, $k \in \mathbb{R}$.

3) Si considerino gli equilibri del sistema lagrangiano $\hat{\mathcal{L}}$ al variare del parametro $\lambda = \frac{|k|}{ML^2\sqrt{ga}}$, studiando le relative proprietà di stabilità.

4) Si disegnino le orbite del sistema $\hat{\mathcal{L}}$ nello spazio delle fasi, nel caso $\lambda > 1$.

1.6 Compito 6

Si consideri un cerchio rigido libero di ruotare attorno al suo diametro fissato su un asse verticale (u). Sia R il raggio del cerchio, O il suo centro, M la sua massa distribuita con densità uniforme μ.

Si assuma come sistema di riferimento fisso il sistema $\{O; x, y, z\}$ con asse coordinato z diretto come l'asse (u) contro orientato rispetto all'accelerazione di gravità. Sia poi ϕ l'angolo che il piano solidale al disco forma con il piano fisso $y = 0$. Quindi, se indichiamo con $\{O; \xi, \eta, z\}$ un sistema ortonormale solidale, l' angolo ϕ è quello che l'asse coordinato ξ forma con l' asse coordinato x, mentre il piano solidale ha equazione $\eta = 0$. Sul cerchio è libero di scorrere (senza attrito) un punto materiale P di massa m. Questo è richiamato dall'asse (u) con una forza $\overrightarrow{f}$ proporzionale alla reciproca distanza. Precisamente, denotato con Q il piede della perpendicolare da P ad (u), detta K una costante positiva la forza che si esercita su P è

$$\overrightarrow{f} = K\overrightarrow{PQ}$$

Infine, si denoti con ψ l'angolo che individua la posizione di P sul cerchio. Scelte come coordinate lagrangiane (ϕ, ψ) si risponda alle seguenti domande.

1) Scrivere la lagrangiana del sistema.

2) Scrivere il sistema di Lagrange e determinarne gli integrali primi.

3) Studiare le soluzioni del sistema di Lagrange in corrispondenza al dato iniziale $\dot{\phi}(0) = 0$. In particolare, usando gli integrali primi, analizzare i moti della cordinata ψ, rappresentando le relative orbite nel piano delle fasi.

1.7 Compito 7

Due punti materiali P_1 e P_2 di uguale massa m sono vincolati agli estremi di un'asta immateriale di lunghezza 2ℓ il cui centro G è vincolato a muoversi su una guida circolare di raggio R $(R > \ell)$, fissa in un piano orizzontale π. Si consideri un riferimento fisso ortonormale $\{O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ con origine O nel centro della guida e versore $\underline{k}$ perpendicolare a π, orientato lungo la verticale ascendente. Il punto P_1 è attratto, tramite una molla elastica di costante K, dal punto immateriale Q_1 situato sull'asse $\underline{k}$ alla stessa quota di P_1. Analogamente P_2 è attratto, tramite una molla elastica di uguale costante K, dal punto immateriale Q_2 situato sull'asse $\underline{k}$ alla stessa quota di P_2.

Sia $\theta \in [0, 2\pi)$ l'angolo che $\overrightarrow{OG}$ forma con la direzione $\underline{i}$ e si denoti con ψ l'angolo che $\overrightarrow{GP_2}$ forma con la direzione $\underline{k}$. Si restringa il dominio di ψ all'intervallo aperto $(0, \pi)$ e, detta H la proiezione di P_2 sul piano π, sia infine $\varphi \in [0, 2\pi)$ l'angolo che $\overrightarrow{GH}$ forma con $\underline{i}$.

Si chiede:

1) Scrivere la lagrangiana $L(\theta, \varphi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi})$ e determinare tre integrali primi del moto.

2) Utilizzando i suddetti integrali primi si dimostri che il problema lagrangiano è risolubile per quadrature. In particolare si dimostri che si riduce ad un problema unidimensionale nella coordinata ψ.

3) Si denoti con p_φ l'impulso coniugato alla coordinata φ. Restringendosi al caso $p_\varphi \neq 0$ si discuta il diagramma delle orbite nello spazio delle fasi per il suddetto problema unidimensionale al variare del parametro $\lambda = \frac{p_\varphi^2}{4Km\ell^4}$.

4) Si determini una soluzione periodica del sistema lagrangiano completo.

1.8 Compito 8

Sia π una lastra piana rigida, di distribuzione di massa omogenea, di forma quadrata con lato l, massa tootale M. Si G il suo baricentro. La lastra è vincolata a ruotare attorno ad una sua retta r (immateriale) orizzontale e parallela ad uno dei lati, passante per G.

Su un asse verticale passante per G è fissato l'estremo Q di una molla elastica di costante K. Tale molla si esercita sul punto materiale P di massa m, libero di muoversi senza attrito sulla lastra.

Si assuma una terna fissa levogira di assi $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ e origine il baricentro della lastra. Siano (X, Y, Z) le corrispondenti coordinate. Per definitezza si supponga la terna orientata in modo tale che

$$Q \equiv (0, 0, Z_0), \quad Z_0 \geq 0$$

Inoltre sia $\underline{j}$ il versore della retta r. Sia $\underline{c}$ un versore normale a π. Si denoti con ϕ l'angolo (contato in modo antiorario) che $\underline{c}$ forma con $\underline{k}$. Siano poi (x, y) le coordinate del punto P relativamente ad un sistema solidale piano, con secondo asse coincidente con $\underline{j}$, origine nel baricentro della lastra.

1) Si scriva la lagrangiana del sistema, in funzione delle coordinate lagrangiane (ϕ, x, y).

2) Si determini il moto della coordinata y del punto P.

3) Si individuino le posizioni di equilibrio del sistema. Si consideri in particolare il caso
$$\lambda := \frac{mg - KZ_0}{K} \neq 0$$
e si discuta la stabilità degli equilibri.

4) Si consideri il caso $\lambda = 0$ e si determini esplicitamente il moto del sistema.

1.9 Compito 9

Si consideri in un piano verticale Π una guida rettilinea immateriale. Tale guida è libera di ruotare attorno ad un suo punto fisso O ed ha fissato su di essa, a distanza ℓ da O, un punto materiale P di massa m. Sull'asta è poi libero di scorrere senza attrito il centro G di un disco omogeneo, di massa M e raggio R. Il disco è libero di ruotare, mantenendosi nel piano Π. Tra i punti P e G si esercita una forza elastica di costante K.

Siano φ l'angolo che la direzione $\overrightarrow{OP}$ forma con l'asse coordinato orizzontale, ψ l'angolo di rotazione propria del disco ed $s \in \mathbb{R}$ l'ascissa di G lungo la guida. Assunti come parametri lagrangiani (φ, ψ, s), si chiede:

1) Scrivere la lagrangiana del sistema, mostrando che
$$L(\varphi, \psi, s, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{s}) = L_1(\varphi, s, \dot{\varphi}, \dot{s}) + L_2(\dot{\psi})$$
e determinare quindi il moto di ψ.

2) Si consideri ora il sistema corrispondente ad $L_1(\varphi, s, \dot{\varphi}, \dot{s})$. Se ne determinino gli equilibri e le relative proprietà di stabilità al variare del parametro
$$\lambda = \frac{K\ell(M+m)}{M^2 g}$$
nell'insieme $(0,1) \cup (1, +\infty)$.

3) Si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.

1.10 Compito 10

Sia U un asse verticale fisso, orientato come la verticale ascendente. Un piano Π è libero di ruotare attorno ad U (il piano è considerato senza massa). Su di un asse orizzontale V, fisso in questo piano e passante per il punto $O \in U$, è disposto il centro Q di un cerchio C, solidale a Π , di massa anch'essa ignorabile, raggio r, con $r < |OQ| := R$.

Infine un punto materiale P, di massa m, è libero di scorrere senza attrito lungo C. Su P si esercita una forza di richiamo elastica, di costante elastica k. Il centro di applicazione della forza è fissato nel punto $D \in U$ al di sopra di O; la distanza $d := |OD|$ è scelta tale che $k = \frac{mg}{d}$.

1) Si scriva la lagrangiana del sistema, utilizzando come coordinate lagrangiane l'angolo θ che identifica P su C e l'angolo ϕ che il piano Π

forma con il piano $Y = 0$ di un sistema di coordinate fisso $\{O; X, Y, Z\}$ (l'asse Z essendo diretto lungo U).

2) Dimostrare che una delle due coordinate è ciclica e scrivere quindi, utilizzando il corrispondente integrale primo, la lagrangiana del sistema ridotto.

3) Determinare gli equilibri di tale sistema ridotto al variare dei parametri. Discuterne quindi le relative proprietà di stabilità.

4) Mostrare che il sistema completo ammette soluzioni periodiche esibendone almeno una.

1.11 Compito 11

Su un piano verticale, sia $\{O; x, y\}$ un sistema di riferimento ortonormale con l'asse y diretto secondo la verticale ascendente. Due punti materiali pesanti P_1 e P_2 di uguale massa m sono vincolati agli estremi di un asta immateriale di lunghezza 2. Il centro C di tale asta è libero di scorrere senza attrito lungo la guida curvilinea di equazione $y = -x^2$ ed è richiamato dal punto Q di coordinate $(0, 1)$ attraverso una molla di costante elastica $K > 0$. Si indichi con x l'ascissa del punto C e con φ l'angolo che $\overrightarrow{P_1P_2}$ forma con l'asse delle ascisse. Si richiede:

1) Calcolare la lagrangiana del sistema utilizzando le coordinate (x, φ), mostrando che
$$L(x, \varphi, \dot{x}, \dot{\varphi}) = L^{(1)}(x, \dot{x}) + L^{(2)}(\varphi, \dot{\varphi}).$$

2) Integrare esplicitamente il moto della coordinata φ.

3) Discutere qualitativamente il moto della variabile x al variare del parametro
$$\lambda = \frac{mg}{K}.$$

4) Si calcoli, nel caso $\lambda = 1$, la frequenza delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile relativa alla lagrangiana $L^{(1)}(x, \dot{x})$.

5) Esistono soluzioni non globali delle equazioni del moto nel caso in cui $K = 0$ (ovvero si escluda la molla)?

6) Esistono soluzioni periodiche del problema completo $t \mapsto (x(t), \varphi(t))$ tali che $x(t)$ e $\varphi(t)$ siano entrambe funzioni non costanti?

1.12 Compito 12

Sia $\{O; x, y\}$ un sistema di riferimento ortonormale su un piano verticale Π, con l'asse delle ordinate y diretto secondo la verticale ascendente. Un punto materiale P di massa m giace su tale piano ed è vincolato a rimanere a distanza costante $\ell > 0$ dal punto materiale Q di uguale massa m, che è libero di scorrere lungo l'asse delle ascisse x. Il punto P è richiamato dal punto geometrico C di coordinate $(0, \ell)$ attraverso una molla di costante elastica $k > 0$. Si richiede:

1) Scrivere la lagrangiana del sistema, utilizzando come coordinate l'ascissa x del punto Q e l'angolo θ che il vettore $\overrightarrow{QP}$ forma con la direzione verticale discendente.

2) Determinare le posizioni di equilibro del sistema al variare del parametro
$$\lambda = \frac{mg}{k\ell}.$$
Discuterne quindi le relative proprietà di stabilità restringendosi al caso $\lambda \neq 2$.

3) Calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile nel caso $\lambda > 2$.

1.13 Compito 13

Un punto materiale pesante P di massa m è vincolato senza attrito alla superficie di rotazione d'asse verticale x_3 ascendente, descritta in coordinate cartesiane dall'equazione
$$x_3 = \log \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$
Si richiede:

1) Scrivere la lagrangiana del sistema utilizzando le coordinate polari (r, φ) definite da

   $x_1 = r\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\varphi.$

2) Determinare due integrali primi del sistema.

3) Discutere i moti del punto P utilizzando gli integrali primi e restringendosi al caso di condizioni iniziali tali che $\dot{\varphi}(0) \neq 0$.

4) Determinare almeno una soluzione periodica delle equazioni del moto.

5) Discutere i moti del punto P per condizioni iniziali tali che $\dot{\varphi}(0) = 0$. Esistono in tal caso soluzioni non globali delle equazioni del moto?

1.14 Compito 14

Su un piano verticale sia $\{O; x, y\}$ un sistema di riferimento ortonormale con l'asse y diretto secondo la verticale ascendente. Due punti materiali P_1 e P_2 di uguale massa m sono vincolati a scorrere senza attrito lungo una guida curvilinea di equazione

$$y = ax^2, \qquad a \neq 0.$$

I punti sono soggetti alla forza peso ed inoltre si attraggono reciprocamente attraverso una forza di energia potenziale

$$U_{\text{in}}(x_1, x_2) = \frac{k}{4}(x_1 - x_2)^4, \qquad k > 0,$$

essendo x_1 ed x_2 le ascisse dei punti P_1 e P_2 rispettivamente. Si richiede:

1) Scrivere la lagrangiana del sistema utilizzando le coordinate lagrangiane (x_1, x_2).

2) Determinare le posizioni di equilibrio del sistema al variare del parametro $a \neq 0$ e discuterne le relative proprietà di stabilità.

3) Calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile nel caso $a > 0$.

4) Integrare le equazioni del moto nel caso in cui $a = 0$.

1.15 Compito 15

Su un piano verticale, sia $\{O; x, y\}$ un sistema di riferimento ortonormale con l'asse y diretto secondo la verticale ascendente. Il baricentro C di una sbarretta omogenea AB di massa m e lunghezza 2 è vincolato a scorrere senza attrito lungo la guida rettilinea di equazione $y = -x$. L'estremo A della sbarretta è attratto dal punto d'origine O del sistema di riferimento tramite una molla ideale di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. L'estremo B della sbarretta è attratto dall'asse delle ordinate tramite una molla ideale di uguale costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla.

Si indichino con x l'ascissa del punto C e con θ l'angolo che il vettore $\overrightarrow{CA}$ forma con l'asse delle ascisse.

1) Si scriva la lagrangiana del sistema, si individuino le posizioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità al variare del parametro $\lambda = \frac{mg}{4k}$, limitandosi ai casi in cui la stabilità è riconosciuta dalla parte lineare. Si calcolino inoltre le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.

2) Si modifichi il sistema bloccando il baricentro C della sbarretta nella posizione $x = 0$. Si discutano qualitativamente i moti del sistema, rappresentando le orbite nello spazio delle fasi.

1.16 Compito 16

Su un piano verticale, sia $\{O; x, y\}$ un sistema di riferimento ortonormale con l'asse y diretto secondo la verticale ascendente. Su tale piano giace una sbarretta omogenea AB di massa $2m$ e lunghezza 1. L'estremo A della sbarretta è vincolato a scorrere senza attrito lungo l'asse delle ascisse. L'estremo B è attratto dal punto Q di coordinate $(0, 1)$ tramite una molla ideale di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Si indichino con x l'ascissa del punto A e con θ l'angolo che il vettore $\overrightarrow{AB}$ forma con l'asse delle ascisse.

Si scriva la lagrangiana del sistema, si individuino le posizioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità al variare del parametro $\lambda = 1 - \frac{mg}{k}$, limitandosi ai casi in cui la stabilità è riconosciuta dalla parte lineare. Si calcolino inoltre le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.

1.17 Compito 17

Un punto materiale di massa m è libero di muoversi su un piano orizzontale ed è soggetto all'azione di una forza di energia potenziale

$$U(x, y) = \lambda x^2 + \frac{1}{2} y^2 - \log(1 + x^2 + y^2),$$

essendo (x, y) le coordinate del punto in un riferimento ortonormale $\{O; x, y\}$ nel piano e λ è un parametro positivo.

1) Si scriva la lagrangiana del sistema e si individuino le posizioni di equilibrio al variare del parametro $\lambda > 0$; se ne discuta la stabilità limitandosi ai casi in cui essa è riconosciuta dalla parte lineare. Si calcolino inoltre le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.

2) Si consideri ora il caso $\lambda = \frac{1}{2}$. Si individuino due integrali primi del moto e si determini almeno una soluzione periodica delle equazioni del moto.

1.18 Compito 18

Sia $\{O; x, y\}$ un riferimento ortonormale in un piano orizzontale. Un punto materiale P di massa $m = 1$ è vincolato a scorrere senza attrito lungo la guida curvilinea di equazione

$$y = \frac{x^4}{2} - x^2$$

ed è soggetto al campo di forza

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1) Si scriva la lagrangiana del sistema utilizzando come coordinata l'ascissa x del punto P.

2) Si discuta qualitativamente il moto di P. In particolare si disegni il ritratto delle fasi, specificando il numero di orbite su ciascun livello di energia, ed il tipo di moto corrispondente a ciascuna di esse. Esistono moti che non sono definiti globalmente nel tempo?

3) Si calcoli la frequenza delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.

4) Sia $x(t)$ la soluzione di dati iniziali $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$. Calcolare

$$\lim_{t \to +\infty} \dot{x}(t).$$

1.19 Compito 19

Sia $\{O; x, y, z\}$ un sistema di riferimento ortonormale con l'asse z diretto secondo la verticale ascendente. Un punto materiale pesante P di massa m è vincolato a muoversi senza attrito sulla superficie cilindrica di equazione $x^2 + y^2 = 1$. Il punto P è richiamato dall'origine O tramite una molla ideale di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Tale punto è inoltre sottoposto alla forza di energia potenziale

$$U_\alpha(x, y, z) = -\alpha y z$$

con α un parametro positivo. Si denoti con z la quota del punto P e con θ l'angolo che la direzione $\overrightarrow{OQ}$ forma con l'asse delle ascisse, essendo Q la proiezione di P sul piano coordinato orizzontale.

1) Scrivere la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.

2) Individuare le posizioni di equilibrio e discuterne le proprietà di stabilità al variare del parametro $\lambda = \dfrac{mg}{\alpha}$, limitandosi ai casi in cui esse sono riconosciute dalla parte lineare.

3) Calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.

4) Posto $\alpha = 0$, si determini esplicitamente la soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange di dati iniziali

$$z(0) = -\frac{mg}{k}, \qquad \dot{z}(0) = 0, \qquad \theta(0) = 1, \qquad \dot{\theta}(0) = 1.$$

1.20 Compito 20

Sia $\{O; x, y, z\}$ un sistema di riferimento ortonormale con l'asse z diretto secondo la verticale ascendente. Un punto materiale pesante P di massa m è vincolato a muoversi senza attrito sulla superficie di equazione $z = -x - y^2$. Il punto P è richiamato dall'origine O tramite una molla ideale di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla.

1) Scrivere la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange, utilizzando le coordinate cartesiane orizzontali (x, y) del punto P come coordinate lagrangiane.

2) Individuare le posizioni di equilibrio e discuterne le proprietà di stabilità al variare del parametro $\lambda = \dfrac{mg}{k}$, limitandosi ai casi in cui esse sono riconosciute dalla parte lineare. (Facoltativo: studiare anche il caso critico in cui le proprietà di stabilità non sono riconosciute dalla parte lineare).

3) Calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.

1.21 Compito 21

Sia $\{O; x, y\}$ un sistema di riferimento ortonormale su un piano orizzontale. Due sbarrette omogenee AB ed $A'B'$, di uguale massa m e lunghezza $\ell = 2\sqrt{3}$, giacciono su tale piano. La sbarretta AB ha gli estremi vincolati a scorrere senza attrito lungo la guida circolare di raggio $r = 2$ e centro $O = (0, 0)$. Analogamente, la sbarretta $A'B'$ ha gli estremi vincolati a scorrere senza attrito lungo la guida circolare di uguale raggio e centro $O' = (2d, 0)$, essendo d un parametro positivo. I baricentri G, G' delle sbarrette AB ed $A'B'$ si attraggono attraverso una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Si denotino con θ e ϕ gli angoli che le direzioni $\overrightarrow{OG}$ e $\overrightarrow{O'G'}$ rispettivamente formano con l'asse delle ascisse.

1) Scrivere la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.

2) Individuare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità al variare del parametro $d > 0$, limitandosi ai casi in cui la stabilità è riconosciuta dalla parte lineare.

3) Calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.

1.22 Compito 22

Sia $\{O; x_1, x_2, x_3\}$ un sistema di riferimento ortonormale con l'asse x_3 diretto secondo la verticale ascendente. Un punto materiale pesante P di massa m è vincolato senza attrito alla superficie di equazione

$$x_3 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} - \frac{1}{2} \log\left(x_1^2 + x_2^2\right).$$

Il punto P è inoltre sottoposto all'azione di una forza costante $\vec{F} = f\,\vec{e}_1$, $f \in \mathbb{R}$, essendo $\vec{e}_1$ il versore dell'asse x_1.

1) Utilizzando le coordinate cilindriche (r, φ, x_3), $r > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ si scriva la lagrangiana del sistema. Nel caso $f \neq 0$ si individuino le posizioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità al variare dei parametri in gioco.

2) Si consideri il caso $f = 0$. Utilizzando gli integrali primi del sistema si discutano qualitativamente i moti del punto P. Si determini inoltre una soluzione periodica delle equazioni del moto.

1.23 Compito 23

Si considerino due sistemi di riferimento ortonormali, levogiri, l'uno fisso (O, X, Y, Z) l'altro (O, x, y, Z), libero di ruotare attorno all'asse coordinato Z. Tale asse è orientato come la verticale ascendente. Si denoti con ϕ l'angolo che l'asse coordinato x forma con l'asse coordinato X. L'angolo è contato positivamente in senso antiorario a partire dall'asse X. Sul piano $x = 0$ è posto un cerchio immateriale $\mathcal{C}$, di centro O e raggio di lunghezza 1. Su $\mathcal{C}$ si trovano due punti P_1 e P_2 di rispettive masse m_1 ed m_2. Il punto P_1 può scorrere liberamente sul cerchio e la sua posizione è individuata dalla anomalia θ, contata positivamente in senso antiorario a partire dall' asse y. Il punto P_2 è fisso su $\mathcal{C}$ in $(x_2, y_2, Z_2) = (0, 1, 0)$, ed è sottoposto ad una forza schematizzata come quella di molla di costante elastica k ($k > 0$) e punto di applicazione in $X = Z = 0, Y = L$, $L > 0$.

1) Scrivere la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Lagrange.

2) Si individuino le soluzioni di equilibrio.

3) Si scelga una posizione di equilibrio stabile e in corrispondenza si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni.

4) Si determini il moto di ϕ in corrispondenza alle condizioni iniziali $\phi_0 = \pi$, $\dot{\phi}_0 = 0$.

1.24 Compito 24

In un piano verticale è posta un'asta omogenea di massa M e lunghezza ℓ, libera di ruotare attorno ad un suo estremo fisso. Si consideri un sistema di coordinate $\{O; x, y\}$ con origine O nell'estremo fisso, asse orizzontale x ed asse verticale y diretto secondo la verticale ascendente.

Detto G il baricentro dell'asta, si consideri la retta immateriale (r), passante per G e perpendicolare all'asta stessa. Si orienti questa retta in modo tale che il corrispondente versore $\hat{n}$ si allinei alla direzione $\overrightarrow{OG}$ mediante una rotazione oraria si $\pi/2$.

Sia P un punto materiale di massa m libero di scorrere su (r) e sia s la sua coordinata su (r), precisamente $\overrightarrow{GP} = s\,\hat{n}$. Il punto è richiamato da G tramite una molla elastica di costante k.

Sia infine θ l'angolo che l'asta forma con l'asse verticale, contato in verso antiorario, con $\theta = 0$ corrispondente alla posizione più bassa dell'estremo libero dell'asta.

1) Si scriva la lagrangiana del sistema utilizzando le coordinate (s, θ).

2) Si determinino le posizioni di equilibrio del sistema e le relative proprietà di stabilità al variare del parametro positivo

$$\lambda = \frac{M + m}{2m^2 g} k\ell,$$

limitandosi ai casi in cui tali proprietà sono riconosciute dalla parte lineare.

3) Si cambi ora problema abolendo la molla ($k = 0$). Si studino le posizioni di equilibrio e le loro proprietà di stabilità per la corrispondente lagrangiana.

1.25 Compito 25

Si consideri un piano orizzontale Π e su di esso una guida circolare $\mathcal{C}$ di centro O e raggio unitario. La guida è immateriale. Si assuma un sistema di riferimento ortonormale $\{O; x, y, z\}$, con asse z orientato lungo la verticale ascendente. Su tale asse è libero di scorrere un punto P_1 di massa m_1. Sulla guida circolare $\mathcal{C}$ è libero di scorrere un punto P_2 di massa m_2. Infine, sull'asse x è libero di scorrere un punto P_3 di massa m_3.

Tra il punto P_1 ed il punto P_2 si esercita una forza elastica (una molla) di costante k, $k > 0$. Tra il punto P_2 ed il punto P_3 si esercita una forza elastica (una molla) di costante k', $k' > 0$.

Si denoti con θ l'anomalia angolare che il raggio vettore di P_2 forma con l'asse x. Si denoti con z la coordinata di P_1 sull'asse verticale, con x la coordinata di P_3 sull'asse corrispondente.

1) Si scriva la lagrangiana $L(x, \theta, z, \dot{x}, \dot{\theta}, \dot{z})$ del sistema, mostrando che si separa in due lagrangiane indipendenti,

$$L(z, \theta, x, \dot{z}, \dot{\theta}, \dot{x}) = L_1(z, \dot{z}) + L_2(\theta, x, \dot{\theta}, \dot{x}).$$

2) Si studi per primo il sistema lagrangiano di lagrangiana $L_1(z, \dot{z})$, determinandone la soluzione generale e, in particolare, le soluzioni di equilibrio.

3) Si passi quindi allo studio del sistema di lagrangiana $L_2(\theta, x, \dot{\theta}, \dot{x})$, determinandone le soluzioni di equilibrio ed il loro carattere di stabilità.

4) Scelta una soluzione di equilibrio stabile, si determinino le frequenze dei modi normali.

1.26 Compito 26

Su un piano verticale, sia $\{O; x, y\}$ un sistema di riferimento ortonormale con l'asse y diretto secondo la verticale ascendente. Una sbarretta omogenea AB, di massa m e lunghezza 2ℓ, giace in tale piano ed ha gli estremi vincolati a scorrere senza attrito lungo una guida circolare di raggio $r = \sqrt{2}\,\ell$ e centro l'origine O. Un punto materiale P di uguale massa m è libero di scorrere senza attrito lungo una guida rettilinea immateriale passante per gli estremi A e B della sbarretta. I punto P è richiamato dal baricentro G della sbarretta attraverso una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Detto $\vec{e}$ il versore di $\overrightarrow{GB}$, si denoti con ξ l'ascissa del punto materiale P tale che $\overrightarrow{GP} = \xi\,\vec{e}$, e con θ l'angolo che la direzione $\overrightarrow{OG}$ forma con l'asse delle ascisse.

1) Scrivere la lagrangiana del sistema.

2) Individuare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità al variare del parametro $\alpha = \dfrac{2k\ell}{mg}$, limitandosi ai casi in cui la stabilità è riconosciuta dalla parte lineare.

3) Si modifichi il problema trascurando la forza peso. Individuare due integrali primi del moto e mostrare come, mediante questi, l'integrazione delle equazioni del moto si riconduce allo studio di un opportuno problema unidimensionale efficace.

1.27 Compito 27

Su un piano orizzontale, sia $\{O; x, y\}$ un sistema di riferimento ortonormale. Su tale piano si muovono due sbarrette omogenee di lunghezza 2ℓ e massa m di estremi rispettivamente A, B e B, C, incernierate tra loro in B ma libere di ruotare senza attrito. Gli estremi A e C sono inoltre vincolati a scorrere senza attrito lungo l'asse delle ascisse. L'estremo A è richiamato dal punto Q_1 di coordinate $(-\ell, 0)$ attraverso una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Analogamente, l'estremo C è richiamato dal punto Q_2 di coordinate $(\ell, 0)$ attraverso una molla di uguale costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Si scelgano come variabili lagrangiane l'ascissa x di B e l'angolo θ che la direzione $\overrightarrow{AB}$ forma con l'asse delle ascisse.

1) Scrivere la lagrangiana del sistema e le relative equazioni di Eulero-Lagrange.

2) Individuare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità.

3) Calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.

4) Trovare se esistono condizioni iniziali per cui il moto sia armonico non solo per piccole oscillazioni ma anche per oscillazioni finite.

1.28 Compito 28

Una sbarra rigida omogenea pesante OA di lunghezza ℓ e massa $M = 2m$ è posta in un piano verticale ed è libera di ruotare senza attrito attorno al suo estremo O. Per l'altro estremo passa una guida rettilinea di massa trascurabile ed ortogonale alla sbarra. Lungo tale guida si muove senza attrito un punto materiale pesante P di massa m. Tale punto è richiamato dall'estremo O attraverso una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla.

Si scelgano come variabili lagrangiane l'angolo θ che la direzione $\overrightarrow{OA}$ forma con la verticale discendente e l'ascissa ξ del punto P lungo la guida.

1) Scrivere la lagrangiana del sistema.

2) Individuare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità al variare del parametro $\alpha = \dfrac{2k\ell}{mg}$, limitandosi ai casi in cui la stabilità è riconosciuta dalla parte lineare.

3) Calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.

1.29 Compito 29

Sia $\{O; x, y, z\}$ un sistema di riferimento ortonormale con l'asse z diretto secondo la verticale ascendente. Un punto materiale pesante P di massa m è vincolato a muoversi senza attrito sulla superficie di equazione $z = xy$. Il punto P è richiamato dall'origine O tramite una molla ideale di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla.

1) Scrivere la lagrangiana del sistema utilizzando le coordinate cartesiane orizzontali (x, y) del punto P come coordinate lagrangiane.

2) Individuare le posizioni di equilibrio e discuterne le proprietà di stabilità al variare del parametro positivo $\lambda = \dfrac{mg}{k}$, limitandosi ai casi in cui esse sono riconosciute dalla parte lineare.

3) Calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.

4) Studiare le proprietà di stabilità delle posizioni di equilibrio nel caso critico, ovvero quando esse non sono riconosciute dalla parte lineare.

1.30 Compito 30

Su un piano verticale, sia $\{O; x, y\}$ un sistema di riferimento ortonormale con l'asse y diretto secondo la verticale ascendente. Una sbarra omogenea AB, di massa M e lunghezza 2ℓ, giace in tale piano ed ha l'estremo A vincolato a scorrere senza attrito lungo l'asse delle ordinate. Il baricentro G della sbarra è richiamato dall'origine delle coordinate attraverso una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Si denoti con y l'ordinata del punto A e con θ l'angolo che la direzione $\overrightarrow{AB}$ forma con l'asse delle ascisse.

1) Si scriva la lagrangiana del sistema.

2) Si individuino le posizioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.

3) Si calcolino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.

4) Si modifichi ora il problema bloccando l'estremo A della sbarra alla quota $\bar{y} = \frac{Mg}{k}$. Si discutano qualitativamente i moti del sistema, rappresentando le orbite nello spazio delle fasi $(\theta, \dot{\theta})$.

1.31 Compito 31

Su un piano verticale sia $\{O; x, y\}$ un sistema di riferimento ortonormale con l'asse y diretto secondo la verticale ascendente. Su tale piano si muovono due sbarrette omogenee pesanti di lunghezza 2ℓ e massa M di estremi rispettivamente A, B e B, C, incernierate tra loro in B ma libere di ruotare senza attrito. Gli estremi A e C sono inoltre vincolati a scorrere senza attrito lungo l'asse delle ascisse. L'estremo in comune B delle sbarrette è richiamato dall'origine delle coordinate attraverso una molla di costante elastica $K > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Si scelgano come variabili lagrangiane l'ascissa x di B e l'angolo θ che la direzione $\overrightarrow{AB}$ forma con l'asse delle ascisse.

1) Si scriva la lagrangiana del sistema.

2) Si individuino le posizioni di equilibrio al variare del parametro $\alpha = \dfrac{Mg}{2K\ell}$ (dove g è l'accelerazione di gravità) e se ne discutano le relative proprietà di stabilità, limitandosi ai casi in cui tali proprietà sono riconosciute dalla parte lineare.

3) Si calcolino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.

2 Soluzioni

2.1 Soluzione Compito 1

1) Siano $\vec{e}_1$ ed $\vec{e}_2$ rispettivamente i versori degli assi coordinati orizzontale e verticale ascendente. Si ha

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\ell}{2}\cos\theta\,\vec{e}_1 + \frac{\ell}{2}\sin\theta\,\vec{e}_2, \quad \overrightarrow{OP_1} = x\,\vec{e}_1,$$

cosicché

$$\overrightarrow{v_P} = -\frac{\ell}{2}\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{e}_1 + \frac{\ell}{2}\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_2, \quad \overrightarrow{v_{P_1}} = \dot{x}\,\vec{e}_1.$$

Poiché il baricentro della sbarra è fissato in O l'energia cinetica della sbarra è

$$T_{\text{sbarra}} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{M\ell^2}{6}\dot{\theta}^2,$$

essendo $I = \frac{M}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} dr\, r^2 = \frac{M\ell^2}{3}$ il momento di inerzia della sbarra rispetto al baricentro ed $\omega = \dot{\theta}$ la velocità angolare della sbarra. Quindi l'energia cinetica totale è

$$T = T_{\text{sbarra}} + \frac{m}{2}|\overrightarrow{v_P}|^2 + \frac{m}{2}|\overrightarrow{v_{P_1}}|^2 = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \left(\frac{M\ell^2}{6} + \frac{m\ell^2}{8}\right)\dot{\theta}^2,$$

Il punto fisso della sbarra coincide con il suo baricentro e la quota del punto P_1 non varia. Quindi l'energia potenziale è

$$U = mg\,\overrightarrow{OP}\cdot\vec{e}_2 + \frac{k}{2}|\overrightarrow{PP_1}|^2 = \frac{mg\ell}{2}\sin\theta + \frac{k}{2}\left[\left(x - \frac{\ell}{2}\cos\theta\right)^2 + \frac{\ell^2}{4}\sin^2\theta\right],$$

ovvero, a meno di una costante additiva,

$$U = \frac{k}{2}\left(x^2 - \ell x\cos\theta + \frac{1}{2}\lambda\ell^2\sin\theta\right),$$

avendo introdotto il parametro $\lambda = \frac{2mg}{k\ell}$. Concludiamo che la lagrangiana $L = T - U = L_2 + L_0$ è

$$L = \frac{1}{2}\left[m\dot{x}^2 + \left(\frac{M\ell^2}{3} + \frac{m\ell^2}{4}\right)\dot{\theta}^2\right] - \frac{k}{2}\left(x^2 - \ell x\cos\theta + \frac{1}{2}\lambda\ell^2\sin\theta\right)$$

e le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx + \frac{1}{2}k\ell\cos\theta, \\ \left(\frac{M\ell^2}{3} + \frac{m\ell^4}{2}\right)\ddot{\theta} = -\frac{1}{2}k\ell x\sin\theta - \frac{1}{4}k\ell^2\lambda\cos\theta. \end{cases}$$

2) Le posizioni di equilibrio sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_0}{\partial x} = -kx + \dfrac{1}{2} k\ell \cos\theta = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial L_0}{\partial \theta} = -\dfrac{1}{2} k\ell x \sin\theta - \dfrac{1}{4} k\ell^2 \lambda \cos\theta = 0, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x = \dfrac{\ell}{2} \cos\theta, \\ (\sin\theta + \lambda)\cos\theta = 0. \end{cases}$$

Per ogni valore del parametro $\lambda > 0$ si hanno le soluzioni $\left(0, \pm\frac{\pi}{2}\right)$. Se $\lambda \leq 1$ si hanno inoltre le soluzioni

$$(x_\pm, \theta_\pm) = \left(\pm\frac{\ell}{2}\sqrt{1-\lambda^2}, -\frac{\pi}{2} \pm \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\lambda \right) \right).$$

Studiamone la stabilità; la matrice hessiana di L_0 è

$$\mathcal{H}(x,\theta) = \begin{pmatrix} -k & -\frac{1}{2}k\ell\sin\theta \\ -\frac{1}{2}k\ell\sin\theta & -\frac{1}{2}k\ell x\cos\theta + \frac{1}{4}k\ell^2\lambda\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\mathcal{H}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} -k & -\frac{1}{2}k\ell \\ -\frac{1}{2}k\ell & \frac{1}{4}k\ell^2\lambda \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{H}\left(0, -\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} -k & \frac{1}{2}k\ell \\ \frac{1}{2}k\ell & -\frac{1}{4}k\ell^2\lambda \end{pmatrix}$$

e

$$\mathcal{H}(x_\pm, \theta_\pm) = \begin{pmatrix} -k & -\frac{1}{2}k\ell\lambda \\ -\frac{1}{2}k\ell\lambda & -\frac{1}{4}k\ell^2 \end{pmatrix},$$

da cui si ricava che $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ è instabile, $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$ è stabile se $\lambda > 1$ ed instabile se $\lambda < 1$, mentre le posizioni $(x_\pm, \theta_\pm)$ sono stabili se $\lambda < 1$ (ovvero quando esistono distinte da $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$).

Nel caso critico $\lambda = 1$, in cui la soluzione $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$ biforca, la stabilità non è riconosciuta dalla parte lineare (la matrice hessiana possiede un autovalore negativo ed uno nullo). Osserviamo però che in tal caso si ha

$$L_0 = -\frac{k}{2}\left(x^2 - \ell x\cos\theta + \frac{1}{2}\ell^2\sin\theta \right) = -\frac{k}{2}\left(x - \frac{\ell}{2}\cos\theta \right)^2 + \frac{k\ell^2}{8} g(\theta),$$

con $g(\theta) = \cos^2\theta - 2\sin\theta = 2 - (1+\sin\theta)^2$. Poiché $g(\theta)$ possiede un massimo proprio in $\theta = -\frac{\pi}{2}$, si ricava immediatamente che $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$ è un punto di massimo proprio di L_0. Siamo quindi nelle ipotesi del teorema di Lagrange-Dirichlet, dunque $\left(0,-\frac{\pi}{2}\right)$ è stabile anche per $\lambda = 1$.

Calcoliamo infine le frequenze delle piccole oscillazioni attorno alla posizione $\left(0,-\frac{\pi}{2}\right)$ per $\lambda > 1$. Sia A la matrice dell'energia cinetica calcolata in $\left(0,-\frac{\pi}{2}\right)$, ovvero

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{M\ell^2}{3} + \frac{m\ell^2}{4} \end{pmatrix}.$$

Posto $H = \mathcal{H}\left(0,-\frac{\pi}{2}\right)$, le frequenze delle piccole oscillazioni sono $\omega_\pm = \sqrt{-\mu_\pm}$, essendo $\mu_\pm$ le radici dell'equazione caratteristica

$$\det(H-\mu A) = \det \begin{pmatrix} -k-\mu m & \frac{1}{2}k\ell \\ \frac{1}{2}k\ell & -\frac{1}{4}k\ell^2\lambda - \mu\left(\frac{M\ell^2}{3} + \frac{m\ell^2}{4}\right) \end{pmatrix} = 0$$

ovvero

$$\left(\frac{Mm}{3} + \frac{m^2}{4}\right)\ell^2\mu^2 + k\ell^2\left(\frac{1}{4}m\lambda + \frac{M}{3} + \frac{m}{4}\right)\mu - \frac{1}{4}k^2\ell^2 = 0,$$

da cui, ponendo $\alpha = \frac{m}{4}\left(\frac{M}{3} + \frac{m}{4}\right)^{-1}$,

$$\omega_\pm = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\alpha\lambda + 1 \pm \sqrt{(\alpha\lambda+1)^2 + 4\alpha}}.$$

3) Quando il sistema è posto su un piano orizzontale la lagrangiana è

$$L(x,\theta,\dot{x},\dot{\theta}) = \frac{1}{2}\left[m\dot{x}^2 + \left(\frac{M\ell^2}{3} + \frac{m\ell^2}{4}\right)\dot{\theta}^2\right] - \frac{k}{2}x^2 - \frac{1}{2}k\ell x\cos\theta$$

e le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx + \dfrac{1}{2}k\ell\cos\theta, \\[2ex] \left(\dfrac{M\ell^2}{3} + \dfrac{m\ell^2}{2}\right)\ddot{\theta} = -\dfrac{1}{2}k\ell x\sin\theta. \end{cases}$$

Cerchiamo le soluzioni di dati iniziali $(x(0),\dot{x}(0)) = (x_0,\dot{x}_0)$ e $(\theta(0),\dot{\theta}(0)) = (0,0)$. Osserviamo che la seconda equazione è identicamente soddisfatta dalla funzione $\theta(t) \equiv 0$ (che soddisfa le condizioni iniziali). Possiamo quindi ricercare la soluzione delle equazioni nella forma $(x(t), \theta(t)) = (x(t), 0)$. Sostituendo si ricava che $x(t)$ deve essere soluzione dell'equazione

$$m\ddot{x} = -kx + \frac{1}{2}k\ell,$$

che è un oscillatore armonico nella variabile $y = x - \frac{1}{2}\ell$. Quindi la soluzione del problema è

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{\ell}{2} + A\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t + \phi\right), \\ \\ \theta(t) = 0, \end{cases}$$

dove le costanti $A > 0$, $\phi \in [0, 2\pi)$ sono fissate dalle condizioni iniziali: $A\cos\phi = x_0 - \frac{\ell}{2}$, $-A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\phi = \dot{x}_0$.

2.2 Soluzione Compito 2

Siano $\vec{e}_1$ ed $\vec{e}_2$ i versori degli assi coordinati x ed y rispettivamente. Si ha

$$\overrightarrow{OA} = x\,\vec{e}_1, \quad \overrightarrow{OB} = (x + \ell\cos\theta)\,\vec{e}_1 + \ell\sin\theta\,\vec{e}_2,$$

e quindi, detto G il baricentro della sbarretta,

$$\overrightarrow{OG} = \left(x + \frac{\ell}{2}\cos\theta\right)\vec{e}_1 + \frac{\ell}{2}\sin\theta\,\vec{e}_2,$$

cosicché

$$\overrightarrow{v_G} = \left(\dot{x} - \frac{\ell}{2}\dot{\theta}\sin\theta\right)\vec{e}_1 + \frac{\ell}{2}\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_2.$$

Per il teorema di Koenig, l'energia cinetica della sbarretta è

$$T = \frac{M}{2}|\overrightarrow{v_G}|^2 + \frac{1}{2}I\omega^2,$$

essendo $I = \frac{M}{\ell}\int_{-\ell/2}^{\ell/2} dr\, r^2 = \frac{M\ell^2}{12}$ il momento di inerzia della sbarretta rispetto al baricentro ed $\omega = \dot{\theta}$ la velocità angolare della sbarretta. Quindi

$$T = \frac{M}{2}\left[\left(\dot{x} - \frac{\ell}{2}\dot{\theta}\sin\theta\right)^2 + \frac{\ell^2}{4}\dot{\theta}^2\cos^2\theta\right] + \frac{M\ell^2}{24}\dot{\theta}^2,$$

da cui

$$T = \frac{M}{2}\left[\dot{x}^2 + \frac{\ell^2}{3}\dot{\theta}^2 - \ell\sin\theta\dot{x}\dot{\theta}\right].$$

L'energia potenziale è

$$U = Mg\,\overrightarrow{OG}\cdot\vec{e}_2 + \frac{k}{2}|\overrightarrow{OB}|^2 = \frac{Mg\ell}{2}\sin\theta + \frac{k}{2}\left[(x+\ell\cos\theta)^2 + \ell^2\sin^2\theta\right],$$

ovvero, a meno di una costante additiva,

$$U = \frac{k}{2}x^2 + k\ell x\cos\theta + \frac{Mg\ell}{2}\sin\theta.$$

Concludiamo che la lagrangiana $L = T - U = L_2 + L_0$ è

$$L(x,\theta,\dot{x},\dot{\theta}) = \frac{M}{2}\left[\dot{x}^2 + \frac{\ell^2}{3}\dot{\theta}^2 - \ell\sin\theta\dot{x}\dot{\theta}\right] - \frac{k}{2}x^2 - k\ell x\cos\theta - k\ell^2\lambda\sin\theta,$$

avendo introdotto il parametro $\lambda = \frac{Mg}{2k\ell}$.

Le posizioni di equilibrio sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_0}{\partial x} = -kx - k\ell\cos\theta = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial L_0}{\partial \theta} = k\ell x\sin\theta - k\ell^2\lambda\cos\theta = 0, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x = -\ell\cos\theta, \\ (\sin\theta + \lambda)\cos\theta = 0. \end{cases}$$

Per ogni valore del parametro $\lambda > 0$ si hanno le soluzioni $\left(0, \pm\frac{\pi}{2}\right)$. Se $\lambda \leq 1$ si hanno inoltre le soluzioni

$$(x_\pm, \theta_\pm) = \left(\mp\ell\sqrt{1-\lambda^2}, -\frac{\pi}{2} \pm \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\lambda\right)\right).$$

Studiamone la stabilità; la matrice hessiana di L_0 è

$$\mathcal{H}(x,\theta) = \begin{pmatrix} -k & k\ell\sin\theta \\ k\ell\sin\theta & k\ell x\cos\theta + k\ell^2\lambda\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\mathcal{H}\left(0,\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} -k & k\ell \\ k\ell & k\ell^2\lambda \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{H}\left(0,-\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} -k & -k\ell \\ -k\ell & -k\ell^2\lambda \end{pmatrix}$$

e

$$\mathcal{H}(x_\pm,\theta_\pm)=\begin{pmatrix} -k & -k\ell\lambda \\ -k\ell\lambda & -k\ell^2 \end{pmatrix},$$

da cui si ricava che $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ è instabile, $\left(0,-\frac{\pi}{2}\right)$ è stabile se $\lambda>1$ ed instabile se $\lambda<1$, mentre le posizioni $(x_\pm,\theta_\pm)$ sono stabili se $\lambda<1$ (ovvero quando esistono distinte da $\left(0,-\frac{\pi}{2}\right)$).

Nel caso critico $\lambda=1$, in cui la soluzione $\left(0,-\frac{\pi}{2}\right)$ biforca, la stabilità non è riconosciuta dalla parte lineare (la matrice hessiana possiede un autovalore negativo ed uno nullo). Osserviamo però che in tal caso si ha

$$L_0=-\frac{k}{2}x^2-k\ell x\cos\theta-k\ell^2\sin\theta=-\frac{k}{2}(x+\ell\cos\theta)^2+\frac{k\ell^2}{2}g(\theta),$$

con $g(\theta)=\cos^2\theta-2\sin\theta=2-(1+\sin\theta)^2$. Poiché $g(\theta)$ possiede un massimo proprio in $\theta=-\frac{\pi}{2}$, si ricava immediatamente che $\left(0,-\frac{\pi}{2}\right)$ è un punto di massimo proprio di L_0. Siamo quindi nelle ipotesi del teorema di Lagrange-Dirichlet, dunque $\left(0,-\frac{\pi}{2}\right)$ è stabile anche per $\lambda=1$.

Calcoliamo infine le frequenze delle piccole oscillazioni attorno alla posizione $\left(0,-\frac{\pi}{2}\right)$ per $\lambda>1$. Sia A la matrice dell'energia cinetica calcolata in $\left(0,-\frac{\pi}{2}\right)$, ovvero

$$A=\begin{pmatrix} M & \frac{M\ell}{2} \\ \frac{M\ell}{2} & \frac{M\ell^2}{3} \end{pmatrix}.$$

Posto $H=\mathcal{H}\left(0,-\frac{\pi}{2}\right)$, le frequenze delle piccole oscillazioni sono $\omega_\pm=\sqrt{-\mu_\pm}$, essendo $\mu_\pm$ le radici dell'equazione caratteristica

$$\det(H-\mu A)=\det\begin{pmatrix} -k-\mu M & -k\ell-\mu\frac{M\ell}{2} \\ -k\ell-\mu\frac{M\ell}{2} & -k\ell^2\lambda-\mu\frac{M\ell^2}{3} \end{pmatrix}=0$$

ovvero

$$\frac{M^2\ell^2}{12}\mu^2+Mk\ell^2\left(\lambda-\frac{2}{3}\right)\mu+k^2\ell^2(\lambda-1)=0,$$

da cui

$$\omega_\pm=\sqrt{\frac{k}{M}}\sqrt{6\lambda-4\pm\sqrt{36\lambda^2-60\lambda+28}}.$$

2.3 Soluzione Compito 3

1) Siano $\vec{e}_1$ ed $\vec{e}_2$ i versori degli assi coordinati x ed y rispettivamente. Si ha

$$\overrightarrow{OG}=x\vec{e}_1+\frac{x^2}{2}\vec{e}_2,\qquad \overrightarrow{v_G}=\dot{x}\vec{e}_1+x\dot{x}\vec{e}_2.$$

Il momento di inerzia della sbarretta AB rispetto a G è $I = \frac{m}{2}\int_{-1}^{1} ds\, s^2 = \frac{m}{3}$. Quindi l'energia cinetica del sistema è

$$T = \frac{m}{2}|\overrightarrow{v_G}|^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{m}{2}\left[(1+x^2)\dot{x}^2 + \frac{1}{3}\dot{\theta}^2\right].$$

Essendo

$$\overrightarrow{OA} = (x+\cos\theta)\vec{e}_1 + \left(\frac{x^2}{2} + \sin\theta\right)\vec{e}_2,$$

l'energia potenziale è

$$U = U_{\text{molla}} + U_{\text{peso}} = \frac{k}{2}(x+\cos\theta)^2 + \frac{mg}{2}x^2,$$

cosicché la lagrangiana $L = T - U = L_2 + L_0$ è

$$L(x,\theta,\dot{x},\dot{\theta}) = \frac{m}{2}\left[(1+x^2)\dot{x}^2 + \frac{1}{3}\dot{\theta}^2\right] - \frac{k}{2}(x+\cos\theta)^2 - \frac{mg}{2}x^2.$$

Le posizioni di equilibrio sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_0}{\partial x} = -(k+mg)x - k\cos\theta = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial L_0}{\partial \theta} = k(x+\cos\theta)\sin\theta = 0. \end{cases}$$

Per ogni valore dei parametri si hanno le quattro soluzioni

$$(x_1,\theta_1) = \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \qquad (x_2,\theta_2) = \left(0, \frac{3\pi}{2}\right),$$

$$(x_3,\theta_3) = \left(-\frac{k}{k+mg}, 0\right), \qquad (x_4,\theta_4) = \left(\frac{k}{k+mg}, \pi\right).$$

Studiamone la stabilità; la matrice hessiana di L_0 è

$$\mathcal{H}(x,\theta) = \begin{pmatrix} -k-mg & k\sin\theta \\ k\sin\theta & -k\sin^2\theta + k(x+\cos\theta)\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\mathcal{H}(x_1,\theta_1) = \begin{pmatrix} -k-mg & k \\ k & -k \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}(x_2,\theta_2) = \begin{pmatrix} -k-mg & -k \\ -k & -k \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{H}(x_3,\theta_3) = \mathcal{H}(x_4,\theta_4) = \begin{pmatrix} -k-mg & 0 \\ 0 & -\frac{k^2}{k+mg}+k \end{pmatrix},$$

da cui si ricava che (x_1,θ_1) e (x_2,θ_2) sono stabili mentre (x_3,θ_3) e (x_4,θ_4) sono instabili.

Calcoliamo infine le frequenze delle piccole oscillazioni attorno alla posizione (x_1,θ_1). Sia A la matrice dell'energia cinetica calcolata in (x_1,θ_1), ovvero

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{m}{3} \end{pmatrix}.$$

Posto $H = \mathcal{H}(x_1,\theta_1)$, le frequenze delle piccole oscillazioni sono $\omega_\pm = \sqrt{-\mu_\pm}$, essendo $\mu_\pm$ le radici dell'equazione caratteristica

$$\det(H-\mu A) = \det\begin{pmatrix} -k-mg-m\mu & k \\ k & -k-\frac{m}{3}\mu \end{pmatrix} = 0$$

ovvero

$$\frac{m^2}{3}\mu^2 + \frac{m}{3}(4k+mg)\mu + mgk = 0,$$

da cui, posto $\lambda = \frac{mg}{k}$,

$$\omega_\pm = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\frac{4+\lambda\pm\sqrt{\lambda^2-4\lambda+16}}{2}}.$$

2) Essendo

$$\overrightarrow{OB} = (x-\cos\theta)\vec{e}_1 + \left(\frac{x^2}{2}-\sin\theta\right)\vec{e}_2,$$

l'energia potenziale del sistema con la molla aggiuntiva è

$$U = \frac{k}{2}(x+\cos\theta)^2 + \frac{k}{2}(x-\cos\theta)^2 + \frac{mg}{2}x^2 = \frac{2k+mg}{2}x^2 + k\cos^2\theta,$$

cosicché la lagrangiana $L = T-U$ è

$$L(x,\theta,\dot{x},\dot{\theta}) = L^{(1)}(x,\dot{x}) + L^{(2)}(\theta,\dot{\theta})$$

con

$$\begin{aligned} L^{(1)}(x,\dot{x}) &= \frac{m}{2}(1+x^2)\dot{x}^2 - \frac{2k+mg}{2}x^2 \\ L^{(2)}(\theta,\dot{\theta}) &= \frac{m}{6}\dot{\theta}^2 - k\cos^2\theta. \end{aligned}$$

Il problema è completamente separato nei due problemi unidimensionali di lagrangiane $L^{(1)}$ ed $L^{(2)}$. Sono quindi integrali primi del moto le corrispondenti energie

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1(x,\dot{x}) &= \frac{m}{2}(1+x^2)\dot{x}^2 + \frac{2k+mg}{2}x^2\\ \mathcal{E}_2(\theta,\dot{\theta}) &= \frac{m}{6}\dot{\theta}^2 + k\cos^2\theta.\end{aligned}$$

Consideriamo i moti sul livello $\mathcal{E}_1(x,\dot{x}) = E_1$, $\mathcal{E}_2(\theta,\dot{\theta}) = E_2$. Se $E_1 = 0$ il moto della coordinata x è stazionario: $x(t) = 0$; se $E_1 > 0$ il moto di x è periodico di periodo

$$T_1(E_1) = 2\int_{x_-(E_1)}^{x_+(E_1)} dx\,\sqrt{\frac{m(1+x^2)}{2E_1-(2k+mg)x^2}}, \qquad x_\pm(E_1) = \sqrt{\frac{2E_1}{2k+mg}}.$$

Se $E_2 = 0$ il moto della coordinata θ è stazionario: $\theta(t) = \frac{\pi}{2}$ o $\theta(t) = \frac{3\pi}{2}$. Se $0 < E_2 < k$ il moto di θ è periodico attorno a $\theta = \frac{\pi}{2}$ od a $\theta = \frac{3\pi}{2}$, di uguale periodo

$$T_2(E_2) = 2\int_{\theta_-(E_1)}^{\theta_+(E_1)} d\theta\,\sqrt{\frac{m}{6(E_2-k\cos^2\theta)}}, \qquad \theta_\pm(E_1) = \pm\arccos\sqrt{\frac{E_2}{k}}.$$

Se $E_2 = k$ il moto di θ è stazionario, $\theta(t) = 0$ o $\theta(t) = \pi$, oppure lungo un'orbita eteroclina che connette tali punti. Infine, se $E_2 > k$, il moto di θ è periodico con rotazioni complete della barretta di periodo

$$T_2(E_2) = \int_0^{2\pi} d\theta\,\sqrt{\frac{m}{6(E_2-k\cos^2\theta)}}.$$

Per avere moti periodici non banali del sistema completo è necessario che le energie $E_1 \geq 0$ ed $E_2 \geq 0$, $E_2 \neq k$, siano scelte in modo tale che esistano interi N, M per cui $NT_1(E_1) = MT_2(E_2)$.

2.4 Soluzione Compito 4

Siano $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ ed $\vec{e}_3$ i versori degli assi coordinati x, y e z rispettivamente. Si ha

$$\overrightarrow{OP_1} = \cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2, \qquad \overrightarrow{OP_2} = \sin\theta\,\vec{e}_2 + \cos\theta\,\vec{e}_3.$$

L'energia cinetica del sistema è

$$T = \frac{m}{2}\big(|\overrightarrow{v_{P_1}}|^2 + |\overrightarrow{v_{P_2}}|^2\big) = \frac{m}{2}\big(\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2\big),$$

mentre l'energia potenziale è

$$\begin{aligned} U &= U_{\text{molla}} + U_{\text{peso}} = \frac{k}{2}|\overrightarrow{P_1P_2}|^2 + mg\big(\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}\big)\cdot \vec{e}_3 \\ &= -k\sin\varphi\sin\theta + mg\cos\theta + \text{costante}, \end{aligned}$$

cosicché la lagrangiana $L = T - U = L_2 + L_0$ è

$$L(\varphi,\theta,\dot\varphi,\dot\theta) = \frac{m}{2}\big(\dot\varphi^2 + \dot\theta^2\big) + k\sin\varphi\sin\theta - mg\cos\theta.$$

Le posizioni di equilibrio sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_0}{\partial\varphi} = k\cos\varphi\sin\theta = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial L_0}{\partial\theta} = k\sin\varphi\cos\theta + mg\sin\theta = 0. \end{cases}$$

Per ogni valore dei parametri si hanno le otto soluzioni

$$\begin{aligned} (\varphi_i,\theta_i) &= (0,0),\ (0,\pi),\ (\pi,0),\ (\pi,\pi),\ \left(\frac{\pi}{2}, -\arctan\lambda\right), \\ &\quad \left(-\frac{\pi}{2}, \arctan\lambda\right),\ \left(\frac{\pi}{2}, \pi - \arctan\lambda\right),\ \left(-\frac{\pi}{2}, \pi + \arctan\lambda\right), \\ &\qquad (i = 1,2,3,4,5,6,7,8), \end{aligned}$$

avendo posto $\lambda = \frac{k}{mg}$. Studiamone la stabilità; la matrice hessiana di L_0 è

$$\mathcal{H}(\varphi,\theta) = mg\begin{pmatrix} -\lambda\sin\varphi\sin\theta & \lambda\cos\varphi\cos\theta \\ \lambda\cos\varphi\cos\theta & -\lambda\sin\varphi\sin\theta + \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\mathcal{H}(\varphi_i,\theta_i) = mg\begin{pmatrix} 0 & \lambda\cos\varphi_i\cos\theta_i \\ \lambda\cos\varphi_i\cos\theta_i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1,2,3,4,$$

$$\mathcal{H}(\varphi_i,\theta_i) = mg\begin{pmatrix} \lambda^2\cos\theta_i & 0 \\ 0 & (\lambda^2+1)\cos\theta_i \end{pmatrix}, \quad i = 5,6,7,8.$$

Essendo $\det\mathcal{H}(\varphi_i,\theta_i) = -k^2$ per $i = 1,2,3,4$ e $\cos\theta_i > 0$ se $i = 5,6$, le prime sei posizioni di equilibrio sono instabili. Viceversa, $\cos\theta_i < 0$ se $i = 7,8$, dunque gli equilibri (φ_7,θ_7) e (φ_8,θ_8) sono stabili.

Calcoliamo infine le frequenze delle piccole oscillazioni attorno alla posizione $(\varphi_7, \theta_7) = \left(\frac{\pi}{2}, \pi - \arctan\lambda\right)$. La matrice dell'energia cinetica è costante

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}.$$

Poiché sia la matrice A che $\mathcal{H}(\varphi_7, \theta_7)$ sono diagonali, le frequenze delle piccole oscillazioni si determinano immediatamente:

$$\omega_- = \sqrt{-g\lambda^2 \cos\theta_7} = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}}},$$

$$\omega_+ = \sqrt{-g(\lambda^2+1)\cos\theta_7} = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda^2+1}}{\lambda}},$$

essendo $g\lambda = \frac{k}{m}$ e $(\cos\theta_7, \sin\theta_7) = \left(\frac{-1}{\sqrt{\lambda^2+1}}, \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}}\right)$.

2.5 Soluzione Compito 5

Le coordinate assolute e le coordinate del sistema solidale sono legate da

$$\begin{cases} x = \xi\cos\phi - \eta\sin\phi \\ y = \xi\sin\phi + \eta\cos\phi \\ z = \zeta \end{cases}$$

Quindi

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \xi\cos\phi \\ \xi\sin\phi \\ \frac{a}{2}\xi^2 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} L\cos\phi \\ L\sin\phi \\ \frac{a}{2}L^2 \end{pmatrix}$$

Ne consegue che l'energia cinetica del sistema è

$$T = \frac{m}{2}(1+\xi^2)\dot{\xi}^2 + \frac{\dot{\phi}^2}{2}(m\xi^2 + ML^2),$$

e l'energia potenziale è

$$U = \frac{m}{2}ga\xi^2.$$

Quindi la lagrangiana si scrive

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(1+\xi^2)\dot{\xi}^2 + \frac{\dot{\phi}^2}{2}(m\xi^2 + ML^2) - \frac{m}{2}ga\xi^2.$$

La ciclicità di ϕ comporta l'esistenza dell'integrale primo

$$P = \dot{\phi}(m\xi^2 + ML^2).$$

Si conserva inoltre l'energia meccanica

$$E = \frac{m}{2}(1+\xi^2)\dot{\xi}^2 + \frac{\dot{\phi}^2}{2}(m\xi^2 + ML^2) - \frac{m}{2}ga\xi^2.$$

Fissato il livello $P = k$, il sistema ristretto ha quindi lagrangiana

$$\hat{\mathcal{L}} = \frac{m}{2}(1+\xi^2)\dot{\xi}^2 - \frac{m}{2}ga\xi^2 - \frac{k^2}{2(m\xi^2 + ML^2)}$$

Gli equilibri sono assegnati dai punti critici di

$$\hat{\mathcal{L}}_0 = -\frac{m}{2}ga\xi^2 + \frac{k^2}{2(m\xi^2 + ML^2)},$$

ovvero le soluzioni di

$$\xi m\left(-ga + \frac{k^2}{(m\xi^2 + ML^2)^2}\right) = 0$$

che sono

$$\xi = 0, \qquad \xi_\pm = \pm\sqrt{\frac{1}{m}\left(\frac{|k|}{\sqrt{ga}} - ML^2\right)}$$

Ovviamente la soluzione $\xi = 0$ esiste per ogni valore di k, mentre $\xi_\pm$ esistono solo se $\frac{|k|}{\sqrt{ga}} > ML^2$, cioè se $\lambda > 1$. Per conoscere la stabilità delle soluzioni di equilibrio esaminiamo la derivata seconda di $\hat{\mathcal{L}}_0$. Si ha

$$\frac{d^2\hat{\mathcal{L}}_0}{d\xi^2} = -m\left(ag + \frac{k^2}{(m\xi^2 + ML^2)^2} - 4\frac{k^2 m\xi^2}{(m\xi^2 + ML^2)^3}\right)$$

Quindi $\xi = 0$ è un massimo propio per $\lambda < 1$ e quindi equilibrio stabile, mentre è un minimo proprio per $\lambda > 1$, quindi equilibrio instabile. Al contrario, quando $\xi_\pm$ esistono (cioè per per $\lambda > 1$) sono massimi per $\hat{\mathcal{L}}_0$ e quindi equilibri stabili. Per $\lambda = 1$, l'equilibrio $\xi = 0$ è multiplo, quindi la derivata seconda è nulla e l'esame della stabilità abbisogna di ulteriori investigazioni. Si può facilmente vedere dal grafico dell'energia potenziale che in effetti, in questo caso, $\xi = 0$ è equilibrio stabile.

2.6 Soluzione Compito 6

La relazione tra coordinate solidali e coordinate fisse è data da

$$\begin{cases} x = \xi \cos\phi - \eta \sin\phi \\ y = \xi \sin\phi + \eta \cos\phi \\ z = \zeta \end{cases}$$

Quindi, il generico punto solidale al cerchio può essere individuato tramite le coordinate

$$\begin{cases} x = R\cos\chi\cos\phi \\ y = R\cos\chi\sin\phi \\ z = R\sin\chi \end{cases}$$

Al variare di χ tra 0 e 2π otteniamo tutti i punti del cerchio. Le coordinate del punto P, libero di muoversi sul cerchio sono invece

$$\begin{cases} x = R\cos\psi\cos\phi \\ y = R\cos\psi\sin\phi \\ z = R\sin\psi \end{cases}$$

L'energia cinetica del cerchio è puramente rotazionale. Si ha

$$T_{\mathcal{C}} = \frac{\dot{\phi}^2}{2} R^3 \mu \int_0^{2\pi} \cos^2\chi d\chi = \frac{R^2}{4} M \dot{\phi}^2.$$

L'energia cinetica del punto P è

$$T_P = \frac{R^2}{2} m(\dot{\phi}^2 \cos^2\psi + \dot{\psi}^2).$$

Infine, l'energia potenziale è

$$V = mgR\sin\psi + \frac{K^2R^2}{2}\cos^2\psi.$$

Pertanto

$$L = \frac{R^2}{4} M\dot{\phi}^2 + \frac{R^2}{2} m(\dot{\phi}^2\cos^2\psi + \dot{\psi}^2) - mgR\sin\psi - \frac{K^2R^2}{2}\cos^2\psi$$

Quindi le equazioni di Lagrange sono

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}[R^2(\frac{M}{2} + m\cos^2)\dot{\phi}] = 0 \\ \\ \frac{d}{dt}[R^2 m\dot{\psi}] = -R^2(m\dot{\phi}^2 - K)\cos\psi\sin\psi - mgR\cos\psi \end{cases}$$

da cui gli integrali primi,

$$\begin{aligned}
P &= \left[R^2(\frac{M}{2}+m\cos^2\psi)\dot{\phi}\right],\\
E &= \frac{R^2}{4}M\dot{\phi}^2+\frac{R^2}{2}m(\dot{\phi}^2\cos^2\psi+\dot{\psi}^2)+mgR\sin\psi+\frac{K^2R^2}{2}\cos^2\psi.
\end{aligned}$$

In particolare, eliminando $\dot{\phi}$ dalla prima equazione, equivalentemente otteniamo

$$\begin{aligned}
\dot{\phi} &= \frac{P}{R^2(\frac{M}{2}+m\cos^2\psi)},\\
E &= \frac{R^2}{2}m\dot{\psi}^2+mgR\sin\psi+\frac{K^2R^2}{2}\cos^2\psi+\frac{P^2}{2R^2(\frac{M}{2}+m\cos^2\psi)}.
\end{aligned}$$

Consideriamo ora i moti corrispondenti alla condizione iniziale $\dot{\phi}(0)=0$. Essi soddisfano allora le condizioni

$$\begin{aligned}
P &= 0,\\
E &= \frac{R^2}{2}m\dot{\psi}^2)+mgR\sin\psi+\frac{K^2R^2}{2}\cos^2\psi,
\end{aligned}$$

perciò la coordinata ψ è governata dalla stessa legge del moto unidimensionale di lagrangiana ridotta

$$L_r=\frac{R^2}{2}m\dot{\psi}^2-mgR\sin\psi-\frac{K^2R^2}{2}\cos^2\psi$$

Basta quindi, per conoscere il comportamento delle orbite, studiare la funzione V. Si ha

$$V'=\cos\psi[mgR-\frac{K^2R^2}{2}\sin\psi],$$

quindi abbiamo sempre i due equilibri

$$\psi_{1,2}=\pm\frac{\pi}{2}.$$

Se poi $\lambda:=\frac{mg}{KR}<1$ si aggiungono gli equilibri

$$\psi_3=\arcsin\frac{mg}{KR},\quad \psi_4=\pi-\arcsin\frac{mg}{KR}$$

Si ha infine

$$V''=-KR^2\{\sin\psi[\lambda-\sin\psi]-\cos^2\psi\}.$$

Dunque ψ_1 è stabile se $\lambda<1$ instabile se $\lambda>1$, ψ_1 è stabile. Nel caso $\lambda<1$ si vede subito che $\psi_{3,4}$ sono minimi per V e quindi stabili. Il grafico di V nei due casi $\lambda<1$ e $\lambda>1$ permette subito di tracciare i corrispondente grafici delle orbite delle soluzioni nel piano delle fasi.

2.7 Soluzione Compito 7

1) Si ha

$$\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP_2}, \quad \overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP_1}$$

con $\overrightarrow{GP_1} = -\overrightarrow{GP_2}$ a causa del vincolo. Quindi, posto

$$\underline{v}_G = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OG}, \qquad \underline{v} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{GP_2},$$

l'energia cinetica del sistema è

$$T = \frac{m}{2}|\underline{v}_G + \underline{v}|^2 + \frac{m}{2}|\underline{v}_G - \underline{v}|^2 = m|\underline{v}_G|^2 + m|\underline{v}|^2.$$

Ma

$$\overrightarrow{OG} = R\left(\cos\theta\,\underline{i} + \sin\theta\,\underline{j}\right)$$

mentre

$$\overrightarrow{GP_2} = \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HP_2} = \ell\sin\psi\left(\cos\varphi\,\underline{i} + \sin\varphi\,\underline{j}\right) + \ell\cos\psi\,\underline{k}$$

da cui

$$T = mR^2\dot{\theta}^2 + m\ell^2\sin^2\psi\,\dot{\varphi}^2 + m\ell^2\dot{\psi}^2$$

L'energia potenziale è

$$V = \frac{K}{2}\left(|\overrightarrow{Q_1P_1}|^2 + |\overrightarrow{Q_2P_2}|^2\right) + mg\left(z_{P_1} + z_{P_2}\right).$$

Ma

$$z_{P_1} = -z_{P_2}, \qquad \overrightarrow{Q_2P_2} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GH}, \qquad \overrightarrow{Q_1P_1} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{GH}$$

per cui

$$V = K\left(|\overrightarrow{OG}|^2 + |\overrightarrow{GH}|^2\right) = K\left(R^2 + \ell^2\sin^2\psi\right)$$

Quindi, trascurando la costante additiva KR^2, la lagrangiana del sistema è

$$L = mR^2\dot{\theta}^2 + m\ell^2\sin^2\psi\,\dot{\varphi}^2 + m\ell^2\dot{\psi}^2 - K\ell^2\sin^2\psi$$

Le variabili θ e φ sono cicliche. Abbiamo quindi i tre integrali primi dell'energia E e degli impulsi coniugati p_θ e p_φ,

$$E = mR^2\dot{\theta}^2 + m\ell^2\sin^2\psi\,\dot{\varphi}^2 + m\ell^2\dot{\psi}^2 + K\ell^2\sin^2\psi$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = 2mR^2\dot{\theta}, \qquad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = 2m\ell^2\sin^2\psi\,\dot{\varphi}$$

2) Inserendo gli integrali primi degli impulsi nell'integrale dell'energia troviamo che, per ogni moto $(\theta(t), \varphi(t), \psi(t))$, la $\psi(t)$ è soluzione del problema unidimensionale di energia

$$E = m\ell^2\dot{\psi}^2 + \frac{p_\theta^2}{4mR^2} + \frac{p_\varphi^2}{4m\ell^2\sin^2\psi} + K\ell^2\sin^2\psi$$

La soluzione completa si ottiene quindi dagli integrali primi degli impulsi:

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \frac{p_\theta}{2mR^2}(t - t_0), \qquad \varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} ds\, \frac{p_\varphi^2}{2m\ell^2\sin^2\psi(s)}$$

3) Sia ora $p_\varphi \neq 0$. A meno del termine costante $\frac{p_\theta^2}{4mR^2}$, il potenziale efficace è dato dalla funzione

$$V_{\text{eff}}(\psi) = K\ell^2\left(\frac{\lambda}{\sin^2\psi} + \sin^2\psi\right), \qquad \lambda = \frac{p_\varphi^2}{4Km\ell^4} > 0,$$

definita sull'aperto $(0, \pi)$ e simmetrica rispetto a $\frac{\pi}{2}$. Si ha $V_{\text{eff}}(\psi) \to +\infty$ per $\psi \to 0^+$ o $\psi \to \pi^-$. Per $\lambda \geq 1$ vi è un minimo in $\psi = \frac{\pi}{2}$, mentre se $0 < \lambda < 1$ si hanno tre punti critici $\psi_1 < \frac{\pi}{2} < \psi_2$ di cui ψ_1, ψ_2 sono di minimo e $\frac{\pi}{2}$ è di massimo. Quindi per $\lambda \geq 1$ tutte le orbite sono chiuse (una soluzione stazionaria stabile e moti periodici attorno ad essa), mentre per $0 < \lambda < 1$ si hanno sia orbite aperte (corrispondenti ai moti a meta asintotica verso la posizione di equilibrio instabile) che orbite chiuse (le soluzioni stazionarie ed i moti periodici attorno ad una delle due posizioni di equilibrio stabili oppure attorno ad entrambe).

4) Sia $\psi(t) = \psi_0$ una delle soluzioni stazionarie del moto unidimensionale. Allora

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \frac{p_\theta}{2mR^2}(t - t_0), \quad \varphi(t) = \varphi(t_0) + \frac{p_\varphi^2}{2m\ell^2\sin^2\psi_0}(t - t_0), \quad \psi(t) = \psi_0$$

è soluzione periodica del sistema lagrangiano completo purché il rapporto $\omega_\theta/\omega_\varphi$ tra le frequenze $\omega_\theta = \frac{p_\theta}{2mR^2}$ e $\omega_\varphi = \frac{p_\varphi^2}{2m\ell^2\sin^2\psi_0}$ sia razionale.

2.8 Soluzione Compito 8

1) Si ha

$$\begin{cases} X = x\cos\phi \\ Y = y \\ Z = -x\sin\phi \end{cases}$$

Quindi, detto I il momento di inerzia dell'asta rispetto ad r ($I = \frac{M}{12}L^2$), si ha

$$L = \frac{I}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{m}{2}(x^2\dot{\phi}^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgx\sin\phi - \frac{K}{2}(x^2 + y^2 + 2x\sin\phi Z_0)$$

Si vede quindi che si tratta di due problemi disaccoppiati

$$L_1 = \frac{m}{2}\dot{y}^2 - \frac{K}{2}y^2$$

ed

$$L_2 = \frac{I}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{m}{2}(x^2\dot{\phi}^2 + \dot{x}^2) + (mg - KZ_0)x\sin\phi - \frac{K}{2}x^2 = T + U$$

2) Il moto di y è quindi assegnato da

$$y(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t, \qquad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}},$$

cioé un oscillatore armonico.

3) Passiamo allo studio di L_2. Gli equilibri relativi sono assegnati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = -(mg - KZ_0)\sin\phi - Kx = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial \phi} = -(mg - KZ_0)x\cos\phi = 0 \end{cases}$$

Si ricordi la definizione del parametro λ;

$$\lambda = \frac{mg - KZ_0}{K}$$

Per $\lambda \neq 0$ si hanno i seguenti equilibri:

$$\begin{aligned}
&(I) : (x_1, \phi_1) = (0, 0) \\
&(II) : (x_2, \phi_2) = (0, \pi) \\
&(III) : (x_3, \phi_3) = \big(-\lambda, \frac{\pi}{2} \big) \\
&(IV) : (x_4, \phi_4) = \big(\lambda, -\frac{\pi}{2} \big)
\end{aligned}$$

Se $\lambda = 0$ gli equilibri sono un continuum:

$$(V) : (0, \phi), \quad \phi \in [0, 2\pi).$$

Naturalmente gli equilibri del sistema con Lagrangiana totale L sono identificati da quanto sopra scritto $e\, y = 0$ Passiamo alla stabilità degli equilibri per $\lambda \neq 0$. Ovviamente le parti quadratiche di L_1, L_2 sono disaccoppiate, perciò dobbiamo esaminare solo lo Hessiano di U,

$$H(x, \phi) := K \begin{pmatrix} -1 & +\lambda \cos \phi \\ +\lambda \cos \phi & \lambda x \sin \phi \end{pmatrix}$$

nei vari casi. Nei casi (I) e (II) si ha

$$\det H < 0,$$

dunque (I) e (II) sono instabili. Nei casi (III) e (IV) si ha

$$\det H = K^2 \lambda^2, \qquad \mathrm{Tr} H = -K(1 + \lambda^2),$$

e quindi (III) e (IV) sono stabili.

4) Il caso $\lambda = 0$ presenta una degenerazione. Per $\lambda = 0$ la lagrangiana L_2 si riduce a

$$L_2 = \frac{I}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{m}{2} (x^2 \dot{\phi}^2 + \dot{x}^2) - \frac{K}{2} x^2$$

e quindi

$$\dot{\phi} = \frac{c}{I + m x^2}$$

essendo c la costante asssegnata dalle condizioni iniziali L'evoluzione della coordinata x è assegnata dalla legge di conservazione

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{m} \Big(E - \frac{K x^2}{2} + \frac{c^2}{2(I + m x^2)} \Big)$$

essendo E l'energia del sistema di lagrangiana L_2. Si ha quindi per $I < \sqrt{\frac{mc^2}{K}}$ una doppia buca di potenziale, mentre per $I \geq \sqrt{\frac{mc^2}{K}}$ una buca con un solo minimo. Si completi tracciando il grafico delle curve integrali nello spazio delle fasi.

2.9 Soluzione Compito 9

1) Fissato un riferimento cartesiano sul piano Π di origine O ed asse verticale ascendente, i punti P e G hanno rispettivamente coordinate $(\ell\cos\varphi, \ell\sin\varphi)$ ed $(s\cos\varphi, s\sin\varphi)$. Quindi, detto I il momento di inerzia del disco rispetto all'asse ortogonale al piano Π e passante per il baricentro, la lagrangiana del sistema è $L = L_1 + L_2$ con

$$L_1 = \frac{1}{2}\big[(Ms^2 + m\ell^2)\dot{\varphi}^2 + M\dot{s}^2\big] - \frac{K}{2}(s-\ell)^2 - g\sin\varphi(Ms + m\ell)$$

ed

$$L_2 = \frac{I}{2}\dot{\psi}^2.$$

Il moto di ψ è quindi $\psi(t) = \psi(0) + \omega_0 t$ con $\omega_0 = \dot{\psi}(0)$ la velocita angolare iniziale del disco.

2) Le posizioni di equilibrio per la lagrangiana L_1 sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -g\cos\varphi(Ms + m\ell) = 0, \\ -K(s-\ell) - Mg\sin\varphi = 0. \end{cases}$$

Per ogni valore del parametro $\lambda > 0$ si hanno le soluzioni

$$(\varphi_1, s_1) = \left(\frac{\pi}{2}, \ell - \frac{Mg}{K}\right), \qquad (\varphi_2, s_2) = \left(\frac{3\pi}{2}, \ell + \frac{Mg}{K}\right).$$

Quando $\lambda \in (0,1]$ si hanno inoltre le soluzioni

$$(\varphi_3, s_3) = \left(\arcsin\lambda, -\frac{m\ell}{M}\right), \qquad (\varphi_4, s_4) = \left(\pi - \arcsin\lambda, -\frac{m\ell}{M}\right)$$

(se $\lambda = 1$ allora $(\varphi_1, s_1) = (\varphi_3, s_3) = (\varphi_4, s_4)$). Studiamone la stabilità; la matrice hessiana del potenziale è

$$\mathcal{H}(\varphi, s) = \begin{pmatrix} g\sin\varphi(Ms + m\ell) & -Mg\cos\varphi \\ -Mg\cos\varphi & -K \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\mathcal{H}(\varphi_1, s_1) = \begin{pmatrix} -\frac{M^2g^2(1-\lambda)}{K} & 0 \\ 0 & -K \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{H}(\varphi_2, s_2) = \begin{pmatrix} -\frac{M^2g^2(1+\lambda)}{K} & 0 \\ 0 & -K \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}(\varphi_i, s_i) = \begin{pmatrix} 0 & -Mg\cos\varphi_i \\ -Mg\cos\varphi_i & -K \end{pmatrix}, \qquad i = 3, 4.$$

Ricaviamo quindi che (φ_1, s_1) è stabile se $\lambda \in (0, 1)$ ed instabile se $\lambda > 1$, (φ_2, s_2) è stabile per ogni $\lambda > 0$, mentre (φ_i, s_i), $i = 3, 4$, sono instabili per $\lambda \in (0, 1)$.

3) La matrice dell'energia cinetica relativa ad L_1 è

$$A(\varphi, s) = \begin{pmatrix} Ms^2 + m\ell^2 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}.$$

Consideriamo l'equilibrio stabile (φ_1, s_1), $\lambda \in (0, 1)$; le matrici $A(\varphi_1, s_1)$ ed $\mathcal{H}(\varphi_1, s_1)$ sono diagonali e quindi calcoliamo subito le frequenze,

$$\omega_1^{(1)} = \sqrt{\frac{M^2g^2(1-\lambda)}{K(Ms_1^2 + m\ell^2)}}, \qquad \omega_1^{(2)} = \sqrt{\frac{K}{M}}.$$

Analogamente, per l'equilibrio stabile (φ_2, s_2), $\lambda > 0$, otteniamo

$$\omega_2^{(1)} = \sqrt{\frac{M^2g^2(1+\lambda)}{K(Ms_2^2 + m\ell^2)}}, \qquad \omega_2^{(2)} = \sqrt{\frac{K}{M}}.$$

2.10 Soluzione Compito 10

1) Sia $\{O; x, y, z\}$ un sistema solidale a Π, tale che $z = Z$ e l'asse delle ascisse x è diretto lungo V. Si ha allora

$$\begin{cases} X = x\cos\phi - y\sin\phi \\ Y = x\sin\phi + y\cos\phi \\ Z = z \end{cases}$$

Poiché le coordinate di P nel sistema solidale sono $x = R + r\cos\theta$, $y = 0$ e $z = r\sin\theta$, ne consegue che le coordinate inerziali di P sono

$$\begin{cases} X = (R + r\cos\theta)\cos\phi \\ Y = (R + r\cos\theta)\sin\phi \\ Z = r\sin\theta \end{cases}$$

Di qui si ricava subito che l'energia cinetica è

$$T = \frac{m}{2}\left[(R + r\cos\theta)^2\dot{\phi}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right].$$

Il potenziale dovuto alla molla è

$$U_{\text{molla}} = -kRr\cos\theta + kdr\sin\theta,$$

mentre quello dovuta alla forza peso è

$$U_{\text{peso}} = -mgY = -mgr\sin\theta.$$

Con le richieste fatte su d ($kd = mg$) si ha allora

$$U = U_{\text{molla}} + U_{\text{peso}} = -kRr\cos\theta.$$

Quindi la lagrangiana è

$$L = T + U = \frac{m}{2}\left[(R + r\cos\theta)^2\dot{\phi}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right] - kRr\cos\theta.$$

2) Si vede che resta conservato l'impulso coniugato a ϕ,

$$p = m(R + r\cos\theta)^2\dot{\phi},$$

per cui ϕ è ciclica. Sostituendo nell'integrale primo dell'energia,

$$E = T - U = \frac{m}{2}\left[(R + r\cos\theta)^2\dot{\phi}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right] + kRr\cos\theta,$$

troviamo

$$E = \frac{m}{2}r^2\dot{\theta}^2 + kRr\cos\theta + \frac{p^2}{2m(R + r\cos\theta)^2},$$

da cui ricaviamo che la lagrangiana ridotta è

$$L_{\text{ridotta}} = \frac{m}{2}r^2\dot{\theta}^2 - kRr\cos\theta - \frac{p^2}{2m(R + r\cos\theta)^2}.$$

3) Denotando con U_{eff} il potenziale efficace,

$$U_{\text{eff}} = -kRr\cos\theta - \frac{p^2}{2m(R + r\cos\theta)^2},$$

si ha

$$\frac{dU_{\mathrm{eff}}}{d\theta} = \left[kRr - \frac{rp^2}{m(R + r\cos\theta)^3} \right] \sin\theta.$$

Si hanno sempre i punti critici

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \pi.$$

Gli altri punti critici sono le soluzioni di

$$\cos\theta = \frac{1}{r}\left[\left(\frac{p^2}{mkR} \right)^{1/3} - R \right],$$

ovvero

$$\theta_3 = \arccos\left[\frac{1}{r}\left(\frac{p^2}{mkR} \right)^{1/3} - \frac{R}{r} \right], \qquad \theta_4 = 2\pi - \theta_3,$$

che esistono se e solo se $A_1 \leq |p| \leq A_2$ dove

$$A_1 = \sqrt{mkR(R-r)^3}, \qquad A_2 = \sqrt{mkR(R+r)^3}.$$

(in particolare, se $|p| = A_1$ allora $\theta_2 = \theta_3 = \theta_4$, mentre se $|p| = A_2$ allora $\theta_1 = \theta_3 = \theta_4$). Infine si ha

$$\frac{d^2U_{\mathrm{eff}}}{d\theta^2}(\theta_1) = kR - \frac{p^2}{m(R+r)^3},$$

$$\frac{d^2U_{\mathrm{eff}}}{d\theta^2}(\theta_2) = \frac{p^2}{m(R-r)^3} - kR$$

e, se $A_1 \leq |p| \leq A_2$,

$$\frac{d^2U_{\mathrm{eff}}}{d\theta^2}(\theta_3) = \frac{d^2U_{\mathrm{eff}}}{d\theta^2}(\theta_4) = -\frac{3r^2p^2\sin^2\theta_3}{m(R + r\cos\theta_3)^4}.$$

Quindi

i) se $|p| \leq A_1$ allora θ_1 è instabile e θ_2 è stabile.

ii) se $|p| \geq A_2$ allora θ_1 è stabile e θ_2 è instabile.

iii) se $A_1 < |p| < A_2$ allora θ_1 e θ_2 sono instabili mentre θ_3 e θ_4 sono stabili.

Si osservi che nel caso critico $|p| = A_1$ (rispettivamente $|p| = A_2$) si ha $U''_{\mathrm{eff}}(\theta_2) = 0$ (rispettivamente $U''_{\mathrm{eff}}(\theta_1) = 0$). Possiamo comunque affermare che il punto θ_2 (rispettivamente θ_1) è stabile poichè si vede facilmente che è un punto di massimo proprio del potenziale, per cui siamo nelle ipotesi del Teorema di Lagrange-Dirichlet.

4) Ovviamente, in corrispondenza ai punti critici θ_i, $i = 1, 2, 3, 4$, del potenziale efficace troviamo le soluzioni periodiche $(\theta_i, \phi_i(t))$ del sistema completo con

$$\phi_i(t) = \frac{p}{m(R + r\cos\theta_i)^2} t + \phi_0.$$

2.11 Soluzione Compito 11

1) Siano e_1 ed e_2 i versori degli assi coordinati x ed y rispettivamente. Si ha

$$\overrightarrow{OC} = xe_1 - x^2 e_2, \quad \overrightarrow{QC} = xe_1 - (1 + x^2)e_2,$$

$$\overrightarrow{OP_1} = (x+\cos\varphi)e_1 + (-x^2+\sin\varphi)e_2, \quad \overrightarrow{OP_2} = (x-\cos\varphi)e_1 - (x^2+\sin\varphi)e_2,$$

e quindi

$$\overrightarrow{v_{P_1}} = (\dot{x} - \dot{\varphi}\sin\varphi)e_1 + (-2x\dot{x} + \dot{\varphi}\cos\varphi)e_2,$$
$$\overrightarrow{v_{P_2}} = (\dot{x} + \dot{\varphi}\sin\varphi)e_1 - (2x\dot{x} + \dot{\varphi}\cos\varphi)e_2.$$

L'energia cinetica è

$$T = \frac{m}{2}\big(\overrightarrow{v_{P_1}}^2 + \overrightarrow{v_{P_2}}^2\big) = m\big[(1 + 4x^2)\dot{x}^2 + \dot{\varphi}^2\big]$$

L'energia potenziale dovuta alla molla è

$$U_{\text{molla}} = \frac{K}{2}|\overrightarrow{QC}|^2 = \frac{K}{2}\big[x^2 + (1 + x^2)^2\big],$$

mentre quella dovuta alla forza peso è

$$U_{\text{peso}} = mg\big(y_{P_1} + y_{P_2}\big) = mg\big(- x^2 + \sin\varphi - x^2 - \sin\varphi\big) = -2mgx^2,$$

Quindi, a meno di una costante additiva, l'energia potenziale totale $U = U_{\text{molla}} + U_{\text{peso}}$ è

$$U = U(x) = \frac{K}{2}\big[(3 - 4\lambda)x^2 + x^4\big].$$

La lagrangiana $L = T - U$ si decompone come richiesto essendo

$$L^{(1)}(x, \dot{x}) = m(1 + 4x^2)\dot{x}^2 - U(x), \qquad L^{(2)}(\varphi, \dot{\varphi}) = m\dot{\varphi}^2.$$

2) L'equazione di Lagrange per φ è quella di un moto libero ($\ddot{\varphi} = 0$), da cui

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \dot{\varphi}(0)t.$$

3) Il moto della variabile x si determina qualitativamente utilizzando l'integrale primo dell'energia generalizzata

$$E(x,\dot{x}) = \dot{x}\frac{\partial L^{(1)}}{\partial \dot{x}}(x,\dot{x}) - L^{(1)}(x,\dot{x}) = m(1+4x^2)\dot{x}^2 + U(x).$$

Osserviamo che $U(x) \to +\infty$ se $|x| \to +\infty$, cosicchè tutti i moti sono limitati. Distinguiamo due casi:

i) $\lambda \leq 3/4$. L'energia potenziale U possiede un unico punto di minimo in $x = 0$. Esiste quindi un unico insieme di livello critico, quello di energia $E_0 = U(0) = 0$, costituito dal singolo punto $(0,0)$, che rappresenta la curva di fase della soluzione stazionaria $x(t) \equiv 0$. Ogni insieme di livello di energia $E > E_0$ è costituito da una curva di fase chiusa che corrisponde ad un moto periodico.

ii) $\lambda > 3/4$. L'energia potenziale U possiede un punto di massimo relativo in $x = 0$ e due punti di minimo assoluto in

$$x_\pm = \pm\sqrt{\frac{4\lambda - 3}{2}}.$$

Si hanno due insiemi di livello critici di energia $E_1 = U(x_-) = U(x_+) < 0$ ed $E_0 = U(0) = 0$. Il primo è costituito dall'unione dei punti $(x_-, 0)$ ed $(x_+, 0)$, curve di fase delle soluzioni stazionarie $x_-(t) \equiv x_-$ ed $x_+(t) \equiv x_+$ rispettivamente. Gli insiemi di livello di energia $E_1 < E < E_0$ sono l'unione di due curve di fase chiuse corrispondenti a soluzioni periodiche attorno alle posizioni di equilibrio $x_\pm$. L'insieme di livello critico di energia $E = E_0$ è invece l'unione di tre curve di fase, il punto $(0,0)$, relativo alla soluzione stazionaria $x(t) \equiv 0$, e le due curve aperte corrispondenti ai moti a meta asintotica verso $x = 0$. Infine gli insiemi di livello di energia $E > E_0$ sono costituiti da un'unica curva di fase chiusa, corrispondente ad un moto periodico.

4) Se $\lambda = 1$ le posizioni di equilibrio stabili sono $x_\pm = \pm\sqrt{1/2}$. Per simmetria la frequenza è la stessa per entrambe; per fissare la notazione consideriamo la posizione x_+. Posto $(\xi, \dot{\xi}) = (x - x_+, \dot{x})$, la lagrangiana quadratica attorno a x_+ è

$$\mathcal{L}(\xi,\dot{\xi}) = m(1+4x_+^2)\dot{\xi}^2 - \frac{1}{2}U''(x_+)\xi^2 = 3m\dot{\xi}^2 - K\xi^2$$

da cui

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{3m}}.$$

5) Se si esclude la molla l'energia potenziale si riduce ad $U(x) = -2mgx^2$, cosicchè, a parte la soluzione stazionaria $x(t) \equiv 0$, tutti gli altri moti di x sono illimitati (il punto C "cade" lungo la guida. Per stabilire se tali moti sono soluzioni globali dobbiamo stimare il tempo necessario per la caduta. Restringiamoci al caso in cui una soluzione $x(t)$ tende a $+\infty$ (per la simmetria di U non è limitativo). Dopo una prima eventuale fase di moto retrogrado il moto diventa progressivo, e durante tale fase il tempo necessario ad andare da una posizione $\bar{x}$ a $+\infty$ è

$$t(\bar{x} \to +\infty) = \int_{\bar{x}}^{+\infty} dx \sqrt{\frac{m(1+4x^2)}{E+2mgx^2}}$$

con $E = E(x(0), \dot{x}(0))$ l'energia del moto considerato. Poichè la funzione integranda converge al valore positivo $\sqrt{2/g}$ per $x \to +\infty$, l'integrale improprio diverge. Quindi $t(\bar{x} \to +\infty) = +\infty$ e tutte le soluzioni sono globali.

6) La risposta è affermativa. Consideriamo un qualsiasi moto periodico della variabile x; se $x_1 < x_2$, sono i punti di arresto di tale moto allora il periodo è

$$T_x = 2\int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{\frac{m(1+4x^2)}{E-U(x)}},$$

essendo $E = U(x_1) = U(x_2)$. D'altra parte il moto della variabile angolare φ è uniforme con periodo $T_\varphi = 2\pi/\dot{\varphi}(0)$. È sufficiente quindi scegliere la velocità iniziale $\dot{\varphi}(0)$ tale che il rapporto T_x/T_φ sia razionale perchè la soluzione $t \mapsto (x(t), \varphi(t))$ sia periodica.

2.12 Soluzione Compito 12

1) Il punto Q ha coordinate $(x, 0)$, mentre il punto P ha coordinate $(x + \ell\sin\theta, -\ell\cos\theta)$. L'energia cinetica è

$$T = \frac{m}{2}\big(|\overrightarrow{v_Q}|^2 + |\overrightarrow{v_P}|^2\big) = \frac{m}{2}\big(2\dot{x}^2 + 2\ell\cos\theta\,\dot{x}\dot{\theta} + \ell^2\dot{\theta}^2\big).$$

L'energia potenziale dovuta alla molla è

$$U_{\text{molla}} = \frac{k}{2}|\overrightarrow{CP}|^2 = \frac{k}{2}x^2 + k\ell x\sin\theta + k\ell^2\cos\theta + k\ell^2,$$

mentre quella dovuta alla forza peso è

$$U_{\text{peso}} = -mg\ell\cos\theta.$$

Quindi (a meno di una costante additiva) la lagrangiana è $L = L_2 + L_0$ con

$$L_2 = \frac{m}{2}\big(2\dot{x}^2 + 2\ell\cos\theta\,\dot{x}\dot{\theta} + \ell^2\dot{\theta}^2\big), \quad L_0 = -\frac{k}{2}x^2 - k\ell x\sin\theta + (mg\ell - k\ell^2)\cos\theta.$$

2) Le posizioni di equilibrio sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_0}{\partial x} = -kx - k\ell\sin\theta = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L_0}{\partial \theta} = -k\ell x\cos\theta - (mg\ell - k\ell^2)\sin\theta = 0 \end{cases}$$

La prima equazione implica $x = -\ell\sin\theta$; sostituendo nella seconda e ricordando la definizione di λ troviamo

$$\begin{cases} x = -\ell\sin\theta \\ (\cos\theta - \lambda + 1)\sin\theta = 0 \end{cases}$$

Quindi per tutti i valori di $\lambda > 0$ si hanno le soluzioni

$$(x_1, \theta_1) = (0, 0), \qquad (x_2, \theta_2) = (0, \pi).$$

Inoltre, nel caso in cui $0 < \lambda \leq 2$ si hanno anche le soluzioni

$$(x_3, \theta_3) = (-\ell\sin\theta_\lambda, \theta_\lambda), \qquad (x_4, \theta_4) = (\ell\sin\theta_\lambda, -\theta_\lambda),$$

essendo $\theta_\lambda = \arccos(\lambda - 1)$, ovvero l'angolo tale che

$$\cos\theta_\lambda = \lambda - 1, \qquad \sin\theta_\lambda = \sqrt{1 - (\lambda - 1)^2}.$$

Chiaramente se $\lambda = 2$ allora $(x_1, \theta_1) = (x_3, \theta_3) = (x_4, \theta_4)$, ovvero $\lambda = 2$ è un punto di biforcazione della soluzione (x_1, θ_1). Studiamo la stabilità degli equilibri trovati. La matrice hessiana di L_0 è

$$H(x, \theta) = \begin{pmatrix} -k & -k\ell\cos\theta \\ -k\ell\cos\theta & k\ell x\sin\theta - (mg\ell - k\ell^2)\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Poniamo $H_i := H(x_i, \theta_i)$ per $i = 1, 2, 3, 4$. Quindi

$$H_1 = \begin{pmatrix} -k & -k\ell \\ -k\ell & -(mg\ell - k\ell^2) \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \det H_1 = k\ell^2(\lambda - 2) \\ \operatorname{Tr} H_1 = -k - k\ell^2(\lambda - 1) \end{cases}$$

da cui ricaviamo che (x_1, θ_1) è stabile per $\lambda > 2$ ed instabile per $0 < \lambda < 2$.

$$H_2 = \begin{pmatrix} -k & k\ell \\ k\ell & (mg\ell - k\ell^2) \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \det H_2 = -k\ell^2\lambda \\ \operatorname{Tr} H_2 = -k + k\ell^2(\lambda - 1) \end{cases}$$

da cui ricaviamo che (x_2, θ_2) è instabile per ogni $\lambda > 0$. Infine, per $i = 3, 4$ si ha

$$H_i = \begin{pmatrix} -k & -k\ell(\lambda - 1) \\ -k\ell(\lambda - 1) & -k\ell^2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \det H_i = k^2\ell^2[1 - (\lambda - 1)^2] \\ \operatorname{Tr} H_i = -k(1 + \ell^2) \end{cases}$$

da cui ricaviamo che (x_i, θ_i) sono stabili per $0 < \lambda < 2$.

3) Se $\lambda > 2$ l'unica posizione di equilibrio stabile è $(x_1, \theta_1) = (0, 0)$. Sia A la matrice dell'energia cinetica $A(x, \theta)$ calcolata in $(0, 0)$, ovvero

$$A = \begin{pmatrix} 2m & m\ell \\ m\ell & m\ell^2 \end{pmatrix}.$$

Detto $H = H(0, 0)$ l'hessiano di L_0 in $(0, 0)$, le frequenze delle piccole oscillazioni sono $\omega_\pm = \sqrt{-\mu_\pm}$, essendo $\mu_\pm$ le radici dell'equazione caratteristica

$$\det(H - \mu A) = \det \begin{pmatrix} -k - 2m\mu & -k\ell - m\ell\mu \\ -k\ell - m\ell\mu & -(mg\ell - k\ell^2) - m\ell^2\mu \end{pmatrix} = 0,$$

ovvero, ricordando la definizione di λ,

$$m^2\mu^2 + mk(2\lambda - 3)\mu + k^2(\lambda - 2) = 0,$$

da cui

$$\omega_\pm = \sqrt{\frac{2\lambda - 3 \pm \sqrt{4\lambda^2 - 16\lambda + 17}}{2}} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

2.13 Soluzione Compito 13

1) Nelle coordinate polari (r, φ), $r > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, l'equazione della superficie è

$$x_3 = \log r.$$

Siano inoltre

$$\vec{e}_r \doteq \cos\varphi\, \vec{e}_1 + \sin\varphi\, \vec{e}_2, \qquad \vec{e}_\varphi \doteq -\sin\varphi\, \vec{e}_1 + \cos\varphi\, \vec{e}_2.$$

essendo $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ i versori degli assi coordinati. Si ha allora

$$\overrightarrow{OP} = r\, \vec{e}_r + \log r\, \vec{e}_3, \qquad \overrightarrow{v_P} = \dot{r}\, \vec{e}_r + r\dot{\varphi}\, \vec{e}_\varphi + \frac{\dot{r}}{r}\, \vec{e}_3.$$

da cui ricaviamo che l'energia cinetica è

$$T = \frac{m}{2}|\overrightarrow{v_P}|^2 = \frac{m}{2}\left[\left(1 + \frac{1}{r^2}\right)\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right],$$

mentre l'energia potenziale è

$$V = mgx_3 = mg \log r.$$

Concludiamo che la lagrangiana è

$$L = \frac{m}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{r^2} \right) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right] - mg \log r.$$

2) La lagrangiana è indipendente dal tempo ed inoltre la variabile φ è ciclica. Sussistono quindi gli integrali primi

$$E = \frac{m}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{r^2} \right) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right] + mg \log r,$$

$$P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi}.$$

3) Le equazioni del moto si riducono a quadratura mediante gli integrali primi. Più precisamente si ha

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t ds \, \frac{P_\varphi}{mr(s)^2},$$

con $t \mapsto r(t)$ soluzione due volte differenziabile di

$$E = \frac{m}{2} \left(1 + \frac{1}{r^2} \right) \dot{r}^2 + V_{\mathrm{eff}}(r),$$

avendo posto

$$V_{\mathrm{eff}}(r) \doteq \frac{P_\varphi^2}{2mr^2} + mg \log r.$$

Osserviamo che $\dot{\varphi}(0) \neq 0$ se e solo se $P_\varphi \neq 0$. Consideriamo allora il potenziale efficace V_{eff} per $P_\varphi \neq 0$: essendo $V_{\mathrm{eff}}'(r) = -P_\varphi^2/(mr^3) + mg/r$, il potenziale possiede un unico punto critico in $r_0 = |P_\varphi|/\sqrt{m^2 g}$; inoltre $V_{\mathrm{eff}}(r) \to +\infty$ per $r \to 0^+$ oppure $r \to +\infty$. Posto allora $E_0 = V_{\mathrm{eff}}(r_0)$ ed osservato che

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2\left[E - V_{\mathrm{eff}}(r)\right] r^2}{m(1 + r^2)}},$$

concludiamo che tutti i moti possibili $t \mapsto r(t)$ sono limitati (l'insieme $\{r : V_{\mathrm{eff}}(r) \leq E\}$ è un intervallo chiuso e limitato per ogni $E \geq E_0$). In particolare l'insieme di livello critico $E = E_0$ si compone del singolo punto $\{(r_0, 0)\}$, che è l'orbita nello spazio delle fasi della soluzione stazionaria $r(t) \equiv r_0$. Se invece $E > E_0$ l'insieme di livello è costituito da una curva regolare chiusa, orbita nello spazio delle fasi di un moto periodico $t \mapsto r(t)$.

4) Una soluzione periodica per il moto complessivo $t \mapsto (r(t), \varphi(t))$ è

$$r(t) = r_0, \qquad \varphi(t) = \varphi(0) + \frac{P_\varphi}{mr_0^2} t$$

(quindi si ottengono infinite soluzioni periodiche variando il parametro $P_\varphi \neq 0$).

5) Se $\dot{\varphi}(0) = 0$ allora $P_\varphi = 0$, cosicchè $\varphi(t) \equiv \varphi(0)$ mentre $t \mapsto r(t)$ è soluzione due volte differenziabile di

$$E = \frac{m}{2}\left(1 + \frac{1}{r^2}\right)\dot{r}^2 + mg\log r,$$

ovvero

$$\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2(E - mg\log r)r^2}{m(1 + r^2)}}.$$

Quindi per ogni valore di $E \in \mathbb{R}$ si hanno cadute nel centro (se $\dot{r}(0) > 0$ la caduta nel centro è preceduta da una fase di moto progressivo fino al punto di arresto $r_E \doteq -\exp[-E/mg]$). Infine il tempo necessario alla caduta è

$$t(\overline{r} \to 0) = \int_0^{\overline{r}} dr \sqrt{\frac{m(1 + r^2)}{2(E - mg\log r)r^2}} = +\infty,$$

per cui tutte le soluzioni sono globali.

2.14 Soluzione Compito 14

1) Le coordinate cartesiane di P_1 [risp. P_2] sono (x_1, ax_1^2) [risp. (x_2, ax_2^2)]. Quindi le velocità di P_1 e P_2 hanno componenti $(\dot{x}_1, 2ax_1\dot{x}_1)$ e $(\dot{x}_2, 2ax_2\dot{x}_2)$ rispettivamente. L'energia cinetica è dunque

$$T = \frac{m}{2}\left[(1 + 4a^2x_1^2)\,\dot{x}_1^2 + (1 + 4a^2x_2^2)\,\dot{x}_2^2\right].$$

L'energia potenziale è invece

$$U = U_{\text{in}} + U_{\text{peso}} = \frac{k}{4}(x_1 - x_2)^4 + mga(x_1^2 + x_2^2).$$

Quindi la lagrangiana è

$$L = T - U = \frac{m}{2}\left[(1+4a^2x_1^2)\,\dot{x}_1^2 + (1+4a^2x_2^2)\,\dot{x}_2^2\right] - \frac{k}{4}(x_1 - x_2)^4 - mga(x_1^2 + x_2^2).$$

2) Le posizioni di equilibrio del sistema sono i punti critici di $L_0 = -U$, ovvero le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_0}{\partial x_1} = -k(x_1 - x_2)^3 - 2mga\,x_1 = 0 \\ \\ \dfrac{\partial L_0}{\partial x_2} = k(x_1 - x_2)^3 - 2mga\,x_2 = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1^3 + \frac{mga}{4k} x_1 = 0 \end{cases}$$

Concludiamo che per ogni $a \neq 0$ esiste la posizione di equilibrio $(x_1, x_2) = (0, 0)$, mentre se $a < 0$ si hanno inoltre le posizioni

$$(x_1, x_2) = (A, -A), \quad (x_1, x_2) = (-A, A), \qquad \text{essendo} \quad A = \sqrt{\frac{mg|a|}{4k}}.$$

Calcoliamo l'hessiano di L_0

$$H(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -3k(x_1 - x_2)^2 - 2mga & 3k(x_1 - x_2)^2 \\ 3k(x_1 - x_2)^2 & -3k(x_1 - x_2)^2 - 2mga \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$H(0, 0) = -2mga \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

cosicché la posizione $(0, 0)$ è stabile se $a > 0$ ed instabile se $a < 0$. Se $a < 0$ si ha inoltre

$$H(\pm A, \mp A) = \begin{pmatrix} -12kA^2 - 2mga & 12kA^2 \\ 12kA^2 & -12kA^2 - 2mga \end{pmatrix} = mg|a| \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

cosicché le soluzioni $(\pm A, \mp A)$ sono instabili (l'ultima matrice possiede autovalori $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 2$).

3)Se $a > 0$ abbiamo l'unica posizione di equilibrio stabile è $(x_1, x_2) = (0, 0)$. La matrice dell'energia cinetica è

$$A(x_1, x_2) = m \begin{pmatrix} 1 + 4a^2x_1^2 & 0 \\ 0 & 1 + 4a^2x_2^2 \end{pmatrix},$$

cosicché

$$A = A(0,0) = m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo già calcolato l'hessiano $H = H(0,0)$, anch'esso proporzionale alla matrice identità. Le frequenze sono quindi

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{2ga}.$$

4) Se $a = 0$ l'equazione del vincolo diventa $y = 0$, ovvero i due punti sono vincolati a scorrere lungo l'asse coordinato orizzontale. La lagrangiana del sistema è allora

$$L = \frac{m}{2}\big(x_1^2 + \dot{x}_2^2\big) - \frac{k}{4}(x_1 - x_2)^4.$$

Poichè l'interazione dipende solo dalla differenza delle coordinate dei due punti, conviene utilizzare le coordinate del loro centro di massa e della loro posizione relativa, ovvero

$$x_G \doteq \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad x \doteq x_1 - x_2.$$

In tali coordinate la lagrangiana si scrive

$$L = m\dot{x}_G^2 + \frac{m}{4}\dot{x}^2 - \frac{k}{4}x^4.$$

Osserviamo che essa non dipende esplicitamente dal tempo e che la variabile x_G è ciclica. Quindi si conservano l'energia meccanica ed il momento associato a x_G:

$$E = m\dot{x}_G^2 + \frac{m}{4}\dot{x}^2 + \frac{k}{4}x^4, \qquad P = 2m\dot{x}_G.$$

Dalla conservazione di P ricaviamo che il baricentro si muove di moto rettilineo uniforme:

$$x_G(t) = x_G(t_0) + \frac{P}{2m}(t - t_0).$$

Sostituendo $\dot{x}_G = P/(2m)$ nell'integrale primo dell'energia possiamo infine determinare i moti della variabile x quali soluzioni due volte differenziabili dell'equazione

$$\bar{E} = \frac{m}{4}\dot{x}^2 + \frac{k}{4}x^4,$$

essendo $\bar{E} \doteq E - P^2/(4m)$ l'energia meccanica dei due punti in un riferimento inerziale solidale al baricentro. Chiaramente il livello di energia $\bar{E} = 0$ si compone del singolo punto $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ che corrisponde alla soluzione stazionaria $x(t) \equiv 0$. I livelli di energia $\bar{E} > 0$ sono invece delle curve regolari chiuse che corrispondono a moti periodici di x.

2.15 Soluzione Compito 15

1) Siano $\vec{e}_1$ ed $\vec{e}_2$ i versori degli assi coordinati x ed y rispettivamente. Si ha

$$\overrightarrow{OC} = x\vec{e}_1 - x\vec{e}_2, \qquad \overrightarrow{v_C} = \dot{x}\vec{e}_1 - \dot{x}\vec{e}_2.$$

Il momento di inerzia della sbarretta AB rispetto a C è $I = \frac{m}{2}\int_{-1}^{1} ds\, s^2 = \frac{m}{3}$. Quindi l'energia cinetica del sistema è

$$T = \frac{m}{2}|\overrightarrow{v_C}|^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{m}{2}\left(2\dot{x}^2 + \frac{1}{3}\dot{\theta}^2\right).$$

Essendo

$$\overrightarrow{OA} = (x+\cos\theta)\vec{e}_1 + (-x+\sin\theta)\,\vec{e}_2, \quad \overrightarrow{OB} = (x-\cos\theta)\vec{e}_1 + (-x-\sin\theta)\,\vec{e}_2,$$

l'energia potenziale è

$$U = U_{\text{molle}} + U_{\text{peso}} = \frac{k}{2}\left[(x+\cos\theta)^2 + (-x+\sin\theta)^2 + (x-\cos\theta)^2\right] - mgx,$$

ovvero, a meno di una costante additiva,

$$U = \frac{k}{2}\left(3x^2 - 2x\sin\theta + \cos^2\theta - 8\lambda x\right), \qquad \lambda \doteq \frac{mg}{4k}.$$

La lagrangiana $L = T - U = L_2 + L_0$ è dunque

$$L(x,\theta,\dot{x},\dot{\theta}) = \frac{m}{2}\left(2\dot{x}^2 + \frac{1}{3}\dot{\theta}^2\right) - \frac{k}{2}\left(3x^2 - 2x\sin\theta + \cos^2\theta - 8\lambda x\right).$$

Le posizioni di equilibrio sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_0}{\partial x} = -k\big(3x - \sin\theta - 4\lambda\big) = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial L_0}{\partial \theta} = k\big(x + \sin\theta\big)\cos\theta = 0. \end{cases}$$

Per ogni valore dei parametri si hanno le due soluzioni

$$(x_1,\theta_1) = \left(\frac{4\lambda+1}{3}, \frac{\pi}{2}\right), \qquad (x_2,\theta_2) = \left(\frac{4\lambda-1}{3}, \frac{3\pi}{2}\right).$$

Se $\lambda \in (0,1)$ si hanno le altre due soluzioni

$$(x_3,\theta_3) = (\lambda, -\arcsin\lambda), \qquad (x_4,\theta_4) = (\lambda, \pi + \arcsin\lambda).$$

Studiamone la stabilità; la matrice hessiana di L_0 è

$$\mathcal{H}(x,\theta) = k \begin{pmatrix} -3 & \cos\theta \\ \cos\theta & -x\sin\theta + \cos(2\theta) \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\mathcal{H}(x_1,\theta_1) = k \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -\frac{4(\lambda+1)}{3} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{H}(x_2,\theta_2) = k \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & \frac{4(\lambda-1)}{3} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{H}(x_3,\theta_3) = k \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{1-\lambda^2} \\ \sqrt{1-\lambda^2} & 1-\lambda^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{H}(x_4,\theta_4) = k \begin{pmatrix} -3 & -\sqrt{1-\lambda^2} \\ -\sqrt{1-\lambda^2} & 1-\lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Chiaramente (x_1,θ_1) è stabile per ogni valore del parametro $\lambda > 0$ mentre (x_2,θ_2) è stabile per $\lambda \in (0,1)$ ed instabile per $\lambda > 1$. Infine, essendo

$$\det \mathcal{H}(x_3,\theta_3) = \det \mathcal{H}(x_4,\theta_4) = -4(1-\lambda^2),$$

le posizioni (x_3,θ_3) ed (x_4,θ_4) sono instabili per $\lambda \in (0,1)$, ovvero quando esistono distinte da (x_2,θ_2).

Calcoliamo infine le frequenze delle piccole oscillazioni attorno alla posizione stabile (x_1,θ_1). La matrice dell'energia cinetica in (x_1,θ_1) è

$$A = \begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & \frac{m}{3} \end{pmatrix}.$$

Essendo diagonale anche la matrice hessiana $\mathcal{H}(x_1,\theta_1)$, le frequenze delle piccole oscillazioni si calcolano immediatamente,

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{2m}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{4(\lambda+1)k}{m}}.$$

2) Con l'ulteriore vincolo $x = 0$ si giunge al problema unidimensionale di lagrangiana

$$L(x,\dot{x}) = \frac{m}{6}\dot{\theta}^2 - \frac{k}{2}\cos^2\theta.$$

che si integra mediante l'integrale primo dell'energia,

$$H(\theta,\dot{\theta}) = \frac{m}{6}\dot{\theta}^2 + \frac{k}{2}\cos^2\theta.$$

Il livello critico $E = 0$ si compone delle orbite corrispondenti alle soluzioni stazionarie $(\theta, \dot\theta) = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$. I livelli $0 < E < \frac{k}{2}$ si compongono delle orbite corrispondenti ai moti periodici attorno alle posizioni di equilibrio $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. Il livello critico $E = \frac{k}{2}$ si compone delle orbite corrispondenti alle soluzioni stazionarie $(\theta, \dot\theta) = (0,0), (\pi, 0)$ ed ai relativi moti a meta asintotica. Infine i livelli $E > \frac{k}{2}$ si compongono di moti progressivi o retrogradi corrispondenti a rotazioni complete della sbarretta attorno al suo baricentro.

2.16 Soluzione Compito 16

Siano $\vec{e}_1$ ed $\vec{e}_2$ i versori degli assi coordinati x ed y rispettivamente ed indichiamo con G il baricentro della sbarretta. Si ha

$$\overrightarrow{OQ} = \vec{e}_2, \qquad \overrightarrow{OA} = x\,\vec{e}_1, \qquad \overrightarrow{OB} = (x + \cos\theta)\,\vec{e}_1 + \sin\theta\,\vec{e}_2,$$

$$\overrightarrow{OG} = \left(x + \frac{1}{2}\cos\theta\right)\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\sin\theta\,\vec{e}_2, \qquad \overrightarrow{v_G} = \left(\dot x - \frac{1}{2}\dot\theta\sin\theta\right)\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\dot\theta\cos\theta\,\vec{e}_2.$$

Il momento di inerzia della sbarretta AB rispetto a G è $I = 2m\int_{-1/2}^{1/2} ds\, s^2 = \frac{m}{6}$. Quindi l'energia cinetica del sistema è

$$T = \frac{2m}{2}|\overrightarrow{v_G}|^2 + \frac{1}{2}I\dot\theta^2 = \frac{m}{2}\left(2\,\dot x^2 + \frac{2}{3}\,\dot\theta^2 - 2\sin\theta\,\dot x\,\dot\theta\right).$$

L'energia potenziale è

$$U = U_{\text{peso}} + U_{\text{molla}} = 2mgy_G + \frac{k}{2}\left|\overrightarrow{QB}\right|^2 = \frac{k}{2}x^2 + k\,x\cos\theta + (mg - k)\sin\theta + k.$$

La lagrangiana $L = L_2 + L_0$ è dunque

$$L(x, \theta, \dot x, \dot\theta) = \frac{m}{2}\left(2\,\dot x^2 + \frac{2}{3}\,\dot\theta^2 - 2\sin\theta\,\dot x\,\dot\theta\right) - \frac{k}{2}x^2 - k\,x\cos\theta - (mg - k)\sin\theta.$$

Le posizioni di equilibrio sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_0}{\partial x} = -kx - k\cos\theta = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial L_0}{\partial \theta} = kx\sin\theta - (mg - k)\cos\theta = 0. \end{cases}$$

Per ogni valore dei parametri si hanno le due soluzioni

$$(x_1, \theta_1) = \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \qquad (x_2, \theta_2) = \left(0, \frac{3\pi}{2}\right).$$

Se $|\lambda| < 1$ si hanno le altre due soluzioni

$$(x_3, \theta_3) = \left(-\sqrt{1-\lambda^2}, \arcsin\lambda\right), \qquad (x_4, \theta_4) = \left(\sqrt{1-\lambda^2}, \pi - \arcsin\lambda\right).$$

Studiamone la stabilità; la matrice hessiana di L_0 è

$$\mathcal{H}(x, \theta) = k \begin{pmatrix} -1 & \sin\theta \\ \sin\theta & x\cos\theta - \lambda\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\mathcal{H}(x_1, \theta_1) = k \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{H}(x_2, \theta_2) = k \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{H}(x_3, \theta_3) = \mathcal{H}(x_4, \theta_4) = k \begin{pmatrix} -1 & \lambda \\ \lambda & -1 \end{pmatrix},$$

Chiaramente (x_1, θ_1) è instabile per ogni valore del parametro $\lambda < 1$ mentre (x_2, θ_2) è stabile per $\lambda < -1$ ed instabile per $|\lambda| < 1$. Infine, le posizioni (x_3, θ_3) ed (x_4, θ_4) sono stabili per $|\lambda| < 1$, ovvero quando esistono distinte da (x_2, θ_2).

Calcoliamo infine le frequenze delle piccole oscillazioni attorno alla posizione stabile (x_2, θ_2) per $\lambda < -1$. La matrice dell'energia cinetica in (x_1, θ_1) è

$$A = \begin{pmatrix} 2m & m \\ m & \frac{2m}{3} \end{pmatrix}.$$

Posto $H = \mathcal{H}(x_2, \theta_2)$, le frequenze delle piccole oscillazioni sono $\omega_\pm = \sqrt{-\mu_\pm}$, essendo $\mu_\pm$ le radici dell'equazione caratteristica

$$\det(H - \mu A) = \det \begin{pmatrix} -k - 2m\mu & -k - m\mu \\ -k - m\mu & k\lambda - \frac{2m}{3}\mu \end{pmatrix} = 0,$$

ovvero

$$\frac{m^2}{3}\mu^2 - \frac{2mk}{3}(2 + 3\lambda)\mu - k^2(\lambda + 1) = 0,$$

da cui

$$\omega_\pm = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{-2 - 3\lambda \pm \sqrt{9\lambda^2 + 15\lambda + 7}}.$$

2.17 Soluzione Compito 17

1) La lagrangiana $L = L_2 + L_0$ è

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2}\big(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\big) - \lambda x^2 - \frac{1}{2}y^2 + \log(1 + x^2 + y^2).$$

Le posizioni di equilibrio sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_0}{\partial x} = -2\lambda x + \dfrac{2x}{1 + x^2 + y^2} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial L_0}{\partial y} = -y + \dfrac{2y}{1 + x^2 + y^2} = 0, \end{cases}$$

ovvero del sistema

$$\begin{cases} x\Big(x^2 + y^2 - \dfrac{1-\lambda}{\lambda}\Big) = 0, \\[2ex] y\big(x^2 + y^2 - 1\big) = 0. \end{cases}$$

Per ogni valore di $\lambda \neq \frac{1}{2}$ si hanno le soluzioni $(0, 0)$ e $(0, \pm 1)$. Se $\lambda \in (0, 1)$ si hanno le ulteriori soluzioni $\left(\pm\sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda}}, 0\right)$. Infine, se $\lambda = \frac{1}{2}$ si ha un continuo di soluzioni, precisamente tutti i punti sulla circonferenza unitaria. Studiamone la stabilità; la matrice hessiana di L_0 è

$$\mathcal{H}(x, y) = 2\begin{pmatrix} -\lambda + \dfrac{1 - x^2 + y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} & -\dfrac{2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2} \\[3ex] -\dfrac{2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2} & -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1 + x^2 - y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\mathcal{H}(0, 0) = \begin{pmatrix} 2(1-\lambda) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{H}\,(0, \pm 1) = \begin{pmatrix} 1 - 2\lambda & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{H}\left(\pm\sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda}}, 0\right) = \begin{pmatrix} 4\lambda(\lambda - 1) & 0 \\ 0 & 2\lambda - 1 \end{pmatrix}.$$

Si deduce che l'equilibrio $(0, 0)$ è instabile, gli equilibri $(0, \pm 1)$ sono stabili se $\lambda > \frac{1}{2}$ ed instabili se $\lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, gli equilibri $\left(\pm\sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda}}, 0\right)$ sono stabili se

$\lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ ed instabili se $\lambda \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Le frequenze delle piccole oscillazioni attorno alle posizioni $(0, \pm 1)$ per $\lambda > \frac{1}{2}$ sono

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2\lambda - 1}{m}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{1}{m}}.$$

2) Se $\lambda = \frac{1}{2}$ il campo di forze è centrale, ovvero l'energia potenziale è funzione della sola distanza del punto dall'origine O delle coordinate. In tale caso, oltre all'integrale primo dell'energia meccanica,

$$H(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) - \log(1 + x^2 + y^2),$$

è integrale primo del moto anche il momento della quantità di moto rispetto al centro O, ovvero la grandezza

$$P(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = m(x\dot{y} - \dot{x}y).$$

Per determinare una soluzione periodica conviene utilizzare le coordinate polari (r, θ), nelle quali gli integrali primi si scrivono

$$H(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{r^2}{2} - \log(1 + r^2), \qquad P(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = mr^2\dot{\theta}.$$

Quindi, fissati i livelli E ed M di tali integrali, il moto della variabile angolare è

$$\theta(t) = \theta(0) + \int_0^t ds\, \frac{M}{mr(s)^2},$$

dove $r(t)$ è una soluzione due volte differenziabile del problema del prim'ordine

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 + U_M(r) = E, \qquad \text{dove} \quad U_M(r) := \frac{r^2}{2} - \log(1 + r^2) + \frac{M^2}{2mr^2}.$$

Possiamo facilmente determinare diverse soluzioni periodiche. Una prima classe di queste è costituita dai moti circolari uniformi che si ottengono fissando $M \neq 0$ e scegliendo $r(t) = r_M^*$, con r_M^* un punto critico della funzione $U_M(r)$, che esiste sicuramente poiché, se $M \neq 0$,

$$\lim_{r \to 0^+} U_M(r) = \lim_{r \to +\infty} U_M(r) = +\infty.$$

È facile determinare anche un'altra classe di soluzioni periodiche. Infatti se $M = 0$ la funzione $U_M(r)$ ha un minimo in $r = \frac{1}{2}$. Quindi, fissando $M = 0$ ed indicando con $\bar{r}(t)$ un qualsiasi moto periodico attorno alla posizione $r = \frac{1}{2}$, la coppia $(r(t), \theta(t)) = (\bar{r}(t), \theta(0))$ fornisce una soluzione periodica del sistema.

2.18 Soluzione Compito 18

1) Il punto P ha coordinate $(x, \frac{1}{2}x^4 - x^2)$ e quindi velocità $\vec{v}_P$ di componenti $(\dot{x}, 2x(x^2-1)\,\dot{x})$. Poiché $U(x,y) := -\frac{x^2}{2} - y$ è l'energia potenziale associata al campo di forza $F(x,y)$ la lagrangiana del sistema si scrive

$$L(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}|\vec{v}_P|^2 - U\Big(x, \frac{1}{2}x^4 - x^2\Big) = \frac{1}{2}\big[1 + 4x^2(x^2-1)^2\big]\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(x^4 - x^2).$$

2) L'analisi qualitativa si realizza utilizzando l'integrale primo dell'energia generalizzata

$$H(x,\dot{x}) = \dot{x}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x,\dot{x}) - L(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\big[1 + 4x^2(x^2-1)^2\big]\,\dot{x}^2 - \frac{1}{2}(x^4 - x^2).$$

L'insieme di livello E dell'energia è l'unione dei grafici delle funzioni $\dot{x} = \pm f_E(x)$ con

$$f_E(x) = \pm\sqrt{\frac{2E + x^4 - x^2}{1 + 4x^2(x^2-1)^2}}.$$

I livelli critici dell'energia sono $E = 0$ ed $E = \frac{1}{8}$. Su ogni livello $E < 0$ si hanno due moti illimitati, ciascuno con un punto di inversione del moto; sul livello $E = 0$ si hanno due moti illimitati, ciascuno con un punto di inversione del moto, e la soluzione stazionaria corrispondente all'equilibrio $x = 0$; su ogni livello $0 < E < \frac{1}{8}$ si hanno due moti illimitati, ciascuno con un punto di inversione del moto, ed un moto periodico attorno ad $x = 0$; sul livello $E = \frac{1}{8}$ si hanno le due soluzioni stazionarie corrispondenti agli equilibri $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$, due moti a meta asintotica, uno progressivo ed uno retrogrado, che connettono tali equilibri tra loro, e quattro moti a meta asintotica, due progressivi e due retrogradi, che connettono gli stessi equilibri a $\pm\infty$ rispettivamente; sul ogni livello $E > \frac{1}{8}$ si hanno due moti illimitati, uno progressivo ed uno retrogrado, che connettono $-\infty$ a $+\infty$. Asseriamo infine che tutti moti sono definiti globalmente nel tempo. Infatti, essendo $f_E(x) \to 0$ per $x \to \pm\infty$, si ha in particolare che tutti i moti illimitati raggiungono l'infinito in un tempo infinito.

3) L'unica posizione di equilibrio stabile è $x = 0$. La parte quadratica dello sviluppo della lagrangiana attorno a $(0,0)$ è $\mathcal{L}(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}x^2$, che descrive un moto armonico di frequenza $\omega = 1$.

4) L'energia corrispondente ai dati iniziali $(x(0), \dot{x}(0)) = (0,1)$ è $E_0 = \frac{1}{2} > \frac{1}{8}$, quindi il moto $x(t)$ è progressivo illimitato. Pertanto

$$\lim_{t\to+\infty} \dot{x}(t) = \lim_{x\to+\infty} f_{E_0}(x) = 0.$$

2.19 Soluzione Compito 19

1) Il punto P ha coordinate $(\cos\theta, \sin\theta, z)$, da cui

$$\overrightarrow{v_P} = \begin{pmatrix} -\dot\theta\sin\theta \\ \dot\theta\cos\theta \\ \dot z \end{pmatrix}, \qquad T = \frac{m}{2}|\overrightarrow{v_P}|^2 = \frac{m}{2}\big(\dot z^2 + \dot\theta^2\big).$$

L'energia potenziale è

$$U = \frac{k}{2}|\overrightarrow{OP}|^2 + U_{\text{peso}} + U_\alpha$$

ovvero, a meno di una costante additiva,

$$U = \frac{k}{2}z^2 + mgz - \alpha z\sin\theta.$$

Concludiamo che la lagrangiana $L = T - U = L_2 + L_0$ è

$$L = \frac{m}{2}\big(\dot z^2 + \dot\theta^2\big) - \frac{k}{2}z^2 - mgz + \alpha z\sin\theta$$

e le relative equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\begin{cases} m\ddot z = -kz - mg + \alpha\sin\theta, \\[2ex] m\ddot\theta = \alpha z\cos\theta. \end{cases}$$

2) Le posizioni di equilibrio sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_0}{\partial z} = -kz - mg + \alpha\sin\theta = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial L_0}{\partial \theta} = \alpha z\cos\theta = 0, \end{cases}$$

ovvero le soluzioni di almeno uno dei sistemi

$$\begin{cases} -kz - mg + \alpha\sin\theta = 0, \\ \cos\theta = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} -kz - mg + \alpha\sin\theta = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Ricordando che $\lambda = \frac{mg}{\alpha}$, il primo ha soluzioni

$$(z_1, \theta_1) = \left(\frac{\alpha}{k}(1-\lambda), \frac{\pi}{2}\right), \qquad (z_2, \theta_2) = \left(-\frac{\alpha}{k}(\lambda+1), -\frac{\pi}{2}\right).$$

Il secondo ammette soluzioni solo per $\lambda \leq 1$, precisamente

$$(z_3, \theta_3) = (0, \arcsin \lambda), \qquad (z_4, \theta_4) = (0, \pi - \arcsin \lambda).$$

Studiamone la stabilità; la matrice hessiana di L_0 è

$$\mathcal{H}(z, \theta) = \begin{pmatrix} -k & \alpha \cos \theta \\ \alpha \cos \theta & -\alpha z \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\mathcal{H}(z_1, \theta_1) = \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & \frac{\alpha^2}{k}(\lambda - 1) \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{H}(z_2, \theta_2) = \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha^2}{k}(\lambda + 1) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{H}(z_3, \theta_3) = \begin{pmatrix} -k & \alpha\sqrt{1-\lambda^2} \\ \alpha\sqrt{1-\lambda^2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{H}(z_4, \theta_4) = \begin{pmatrix} -k & -\alpha\sqrt{1-\lambda^2} \\ -\alpha\sqrt{1-\lambda^2} & 0 \end{pmatrix},$$

da cui si ricava che (z_1, θ_1) è stabile se $\lambda < 1$ ed instabile se $\lambda > 1$, (z_2, θ_2) è sempre stabile, mentre le posizioni (z_3, θ_3), (z_4, θ_4) sono instabili se $\lambda < 1$ (ovvero quando esistono distinte da (z_1, θ_1)).

Il caso $\lambda = 1$, in cui la soluzione (z_1, θ_1) biforca, è critico, ovvero la stabilità non viene riconosciuta dalla parte lineare (la matrice hessiana possiede un autovalore negativo ed uno nullo).

3) Calcoliamo le frequenze delle piccole oscillazioni attorno alla posizione stabile (z_2, θ_2). La matrice dell'energia cinetica è costante e diagonale,

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}.$$

Essendo diagonale anche $\mathcal{H}(z_2, \theta_2)$ le frequenze delle piccole oscillazioni si deducono immediatamente,

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{\alpha^2}{km}(\lambda + 1)}.$$

3) Se $\alpha = 0$ le equazioni di Eulero-Lagrange diventano

$$\begin{cases} m\ddot{z} = -kz - mg, \\ \\ m\ddot{\theta} = 0. \end{cases}$$

La prima descrive un oscillatore armonico nella variabile $\zeta = z + \frac{mg}{k}$, la seconda un moto uniforme della variabile angolare θ. I dati iniziali per la variabile z corrispondono alla soluzione stazionaria dell'oscillatore, pertanto

$$z(t) = -\frac{mg}{k}, \qquad \theta(t) = 1 + t.$$

2.20 Soluzione Compito 20

1) Il punto P ha coordinate $(x, y, -x - y^2)$, da cui

$$\overrightarrow{v_P} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ -\dot{x} - 2y\dot{y} \end{pmatrix}, \qquad T = \frac{m}{2}|\overrightarrow{v_P}|^2 = \frac{m}{2}\left[2\dot{x}^2 + (1 + 4y^2)\dot{y}^2 + 4y\dot{x}\dot{y}\right].$$

L'energia potenziale è

$$U = \frac{k}{2}|\overrightarrow{OP}|^2 + U_{\text{peso}}$$

ovvero

$$U = \frac{k}{2}\left[x^2 + y^2 + (x + y^2)^2\right] - mg(x + y^2).$$

Concludiamo che la lagrangiana $L = T - U = L_2 + L_0$ è

$$L = \frac{m}{2}\left[2\dot{x}^2 + (1 + 4y^2)\dot{y}^2 + 4y\dot{x}\dot{y}\right] - \frac{k}{2}y^4 - \frac{1}{2}(k - 2mg)y^2 - kxy^2 - kx^2 + mgx$$

e le relative equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\begin{cases} 2m\ddot{x} + 2my\ddot{y} = -2m\dot{y}^2 - ky^2 - 2kx + mg, \\ \\ 2my\ddot{x} + m(1 + 4y^2)\ddot{y} = -2m\dot{x}\dot{y} - 8my\dot{y}^2 - 2ky^3 - (k - 2mg)y - 2kxy, \end{cases}$$

che possono successivamente essere poste in forma normale.

2) Le posizioni di equilibrio sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_0}{\partial x} = -ky^2 - 2kx + mg = 0, \\ \\ \dfrac{\partial L_0}{\partial y} = -2ky^3 - (k - 2mg)y - 2kxy = 0, \end{cases}$$

ovvero le soluzioni di almeno uno dei sistemi

$$\begin{cases} -ky^2 - 2kx + mg = 0, \\ y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} -ky^2 - 2kx + mg = 0, \\ -2ky^2 - k + 2mg - 2kx = 0. \end{cases}$$

Ricordando che $\lambda = \frac{mg}{k}$, il primo ha soluzione

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{\lambda}{2}, 0\right).$$

Il secondo ammette soluzioni solo per $\lambda \geq 1$, precisamente

$$(x_2, y_2) = \left(\frac{1}{2}, \sqrt{\lambda - 1}\right), \qquad (x_3, y_3) = \left(\frac{1}{2}, -\sqrt{\lambda - 1}\right).$$

Studiamone la stabilità; la matrice hessiana di L_0 è

$$\mathcal{H}(x, y) = \begin{pmatrix} -2k & -2ky \\ -2ky & -6ky^2 - k + 2mg - 2kx \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\mathcal{H}(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} -2k & 0 \\ 0 & k(\lambda - 1) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{H}(x_2, y_2) = \begin{pmatrix} -2k & -2k\sqrt{\lambda - 1} \\ -2k\sqrt{\lambda - 1} & 4k(1 - \lambda) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{H}(x_3, y_3) = \begin{pmatrix} -2k & 2k\sqrt{\lambda - 1} \\ 2k\sqrt{\lambda - 1} & 4k(1 - \lambda) \end{pmatrix},$$

da cui si ricava che (x_1, y_1) è stabile se $\lambda < 1$ ed instabile se $\lambda > 1$, mentre le posizioni (x_2, y_2), (x_3, y_3) sono stabili se $\lambda > 1$ (ovvero quando esistono distinte da (x_1, y_1)).

Il caso $\lambda = 1$, in cui i tre equilibri coincidono con il punto $(\frac{1}{2}, 0)$, è critico, ovvero la stabilità non viene riconosciuta dalla parte lineare (la matrice hessiana possiede un autovalore negativo ed uno nullo). D'altra parte, in tal caso si ha

$$\begin{aligned} L_0(x, y) - L_0\left(\frac{1}{2}, 0\right) &= -\frac{k}{2}\left[x^2 + y^2 + (x + y^2)^2 - 2(x + y^2)\right] - \frac{k}{4} \\ &= -\frac{k}{2}\left[\left(x + y^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right], \end{aligned}$$

che è una quantità negativa per ogni $(x, y) \neq (\frac{1}{2}, 0)$. Quindi L_0 possiede un massimo proprio in $(\frac{1}{2}, 0)$ e pertanto tale equilibrio è stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet.

3) Calcoliamo le frequenze delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile (x_1, y_1) per $\lambda < 1$. La matrice dell'energia cinetica è

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} 2m & 2my \\ 2my & m(1+4y^2) \end{pmatrix},$$

pertanto

$$A(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}.$$

Essendo diagonale anche $\mathcal{H}(x_1, y_1)$ le frequenze delle piccole oscillazioni si deducono immediatamente,

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}(1-\lambda)}.$$

2.21 Soluzione Compito 21

1) I baricentri G e G' hanno coordinate $(\cos\theta, \sin\theta)$ e $(2d + \cos\phi, \sin\phi)$ rispettivamente. Pertanto le velocità di tali punti sono

$$\overrightarrow{v_G} = \dot\theta \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{v_{G'}} = \dot\phi \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix}.$$

L'angolo che la direzione $\overrightarrow{AB}$ forma con l'asse delle ascisse è pari a $\theta - \frac{\pi}{2}$, pertanto la velocità angolare della sbarretta AB è $\omega_1 = \dot\theta$. Analogamente la velocità angolare della sbarretta $A'B'$ è $\omega_2 = \dot\phi$. Essendo $I = \frac{m\ell^2}{12} = m$ il momento di inerzia di ciascuna sbarretta rispetto al proprio baricentro, concludiamo che l'energia cinetica totale è

$$T = \frac{m}{2}\big(|\overrightarrow{v_G}|^2 + |\overrightarrow{v_G'}|^2\big) + \frac{1}{2}I\big(\omega_1^2 + \omega_2^2\big) = m(\dot\theta^2 + \dot\phi^2).$$

L'energia potenziale è

$$U = \frac{k}{2}|\overrightarrow{GG'}|^2 = \frac{k}{2}\left[(2d + \cos\phi - \cos\theta)^2 + (\sin\phi - \sin\theta)^2\right],$$

ovvero, a meno di una costante additiva,

$$U = -k\cos(\theta - \phi) - 2kd(\cos\theta - \cos\phi).$$

Concludiamo che la lagrangiana $L = T - U = L_2 + L_0$ è

$$L = m(\dot\theta^2 + \dot\phi^2) + k\cos(\theta - \phi) + 2kd(\cos\theta - \cos\phi)$$

e le relative equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\begin{cases} 2m\ddot{\theta} = -k\sin(\theta-\phi) - 2kd\sin\theta, \\ \\ 2m\ddot{\phi} = k\sin(\theta-\phi) + 2kd\sin\phi. \end{cases}$$

2) Le posizioni di equilibrio sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_0}{\partial\theta} = -k\sin(\theta-\phi) - 2kd\sin\theta = 0, \\ \\ \dfrac{\partial L_0}{\partial\phi} = k\sin(\theta-\phi) + 2kd\sin\phi = 0. \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \sin\theta = \sin\phi, \\ \sin(\theta-\phi) = -2d\sin\phi. \end{cases}$$

La prima equazione implica $\phi = \theta$ oppure $\phi = \pi - \theta$. Pertanto le posizioni di equilibrio sono le soluzioni di almeno uno dei due sistemi

$$\begin{cases} \phi = \theta, \\ \sin\theta = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \phi = \pi - \theta, \\ \sin(2\theta) = 2d\sin\theta. \end{cases}$$

Il primo ha soluzioni $(\theta,\phi) = (0,0), (\pi,\pi)$. Per ogni valore del parametro $d > 0$ il secondo ha soluzioni $(\theta,\phi) = (0,\pi), (\pi,0)$. Se $d < 1$ esso ammette inoltre le soluzioni

$$(\theta_\pm, \phi_\pm) = (\pm\arccos d, \pi \mp \arccos d).$$

Chiaramente $(\theta_+,\phi_+) = (\theta_-,\phi_-) = (0,\pi)$ se $d = 1$.

Studiamo la stabilità di tali equilibri; la matrice hessiana di L_0 è

$$\mathcal{H}(\theta,\phi) = \begin{pmatrix} -k\cos(\theta-\phi) - 2kd\cos\theta & k\cos(\theta-\phi) \\ k\cos(\theta-\phi) & -k\cos(\theta-\phi) + 2kd\cos\phi \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\mathcal{H}(0,0) = \begin{pmatrix} -k-2kd & k \\ k & -k+2kd \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{H}(\pi,\pi) = \begin{pmatrix} -k+2kd & k \\ k & -k-2kd \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{H}(0,\pi) = \begin{pmatrix} k-2kd & -k \\ -k & k-2kd \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{H}(\pi,0) = \begin{pmatrix} k+2kd & -k \\ -k & k+2kd \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{H}(\theta_\pm,\phi_\pm) = \begin{pmatrix} -k & k(1-2d^2) \\ k(1-2d^2) & -k \end{pmatrix},$$

da cui si ricava che $(0,0)$, (π,π), $(\pi,0)$ sono instabili, $(0,\pi)$ è stabile se $d>1$ ed instabile se $d<1$, mentre le posizioni $(\theta_\pm,\phi_\pm)$ sono stabili se $d<1$ (ovvero quando esistono distinte da $(0,\pi)$).

Il caso $d=1$, in cui la soluzione $(0,\pi)$ biforca, è critico, ovvero la stabilità non viene riconosciuta dalla parte lineare (la matrice hessiana possiede un autovalore nullo).

3) Calcoliamo infine le frequenze delle piccole oscillazioni attorno alla posizione stabile $(0,\pi)$ per $d>1$. La matrice dell'energia cinetica è costante e diagonale,

$$A = \begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix}.$$

Posto $H=\mathcal{H}(0,\pi)$, le frequenze delle piccole oscillazioni sono $\omega_\pm = \sqrt{-\mu_\pm}$, essendo $\mu_\pm$ le radici dell'equazione caratteristica,

$$\det(H-\mu A) = \det\begin{pmatrix} k-2kd-2m\mu & -k \\ -k & k-2kd-2m\mu \end{pmatrix} = 0,$$

ovvero

$$(k-2kd-2m\mu)^2 = k^2,$$

da cui

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{k}{m}d}, \qquad \omega_- = \sqrt{\frac{k}{m}(d-1)}.$$

2.22 Soluzione Compito 22

1) Nelle coordinate cilindriche (r,φ,x_3), $r>0$, $\varphi\in[0,2\pi)$, l'equazione della superficie è

$$x_3 = \frac{r^2}{2} - \log r.$$

Siano inoltre

$$\vec{e}_r \doteq \cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2, \qquad \vec{e}_\varphi \doteq -\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2,$$

essendo $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ i versori degli assi coordinati. Si ha allora

$$\overrightarrow{OP} = r\,\vec{e}_r + \left(\frac{r^2}{2} - \log r\right)\vec{e}_3, \qquad \vec{v}_P = \dot r\,\vec{e}_r + r\dot\varphi\,\vec{e}_\varphi + \left(r - \frac{1}{r}\right)\dot r\,\vec{e}_3,$$

da cui ricaviamo l'energia cinetica

$$T = \frac{m}{2}|\overrightarrow{v_P}|^2 = \frac{m}{2}\left[\left(r^2 + \frac{1}{r^2} - 1\right)\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right],$$

mentre l'energia potenziale è

$$U = U_{\text{peso}} + U_{\vec{F}} = mgx_3 - fx_1 = mg\left(\frac{r^2}{2} - \log r\right) - fr\cos\varphi,$$

cosicché la lagrangiana $L = T - U = T + L_0$ si scrive

$$L = \frac{m}{2}\left[\left(r^2 + \frac{1}{r^2} - 1\right)\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right] - mg\left(\frac{r^2}{2} - \log r\right) + fr\cos\varphi.$$

Le posizioni di equilibrio sono le soluzioni del seguente sistema,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_0}{\partial r} = -mg\left(r - \dfrac{1}{r}\right) + f\cos\varphi = 0, \\ \\ \dfrac{\partial L_0}{\partial \varphi} = -fr\sin\varphi = 0. \end{cases}$$

Posto $\lambda = \frac{f}{2mg}$, se il parametro f è non nullo si hanno le due soluzioni

$$(r_1, \varphi_1) = \left(\lambda + \sqrt{\lambda^2+1}, 0\right), \qquad (r_2, \varphi_2) = \left(-\lambda + \sqrt{\lambda^2+1}, \pi\right).$$

Se invece $f = 0$ si ha l'insieme continuo di soluzioni $\{(1, \varphi)\,;\ \varphi \in [0, 2\pi)\}$.

Studiamone la stabilità nel caso $f \neq 0$; la matrice hessiana di L_0 si scrive

$$\mathcal{H}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} -mg\left(1 + r^{-2}\right) & -f\sin\varphi \\ -f\sin\varphi & -fr\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\mathcal{H}(r_1, \varphi_1) = \begin{pmatrix} -mg\left(1 + r_1^{-2}\right) & 0 \\ 0 & -fr_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{H}(r_2, \varphi_2) = \begin{pmatrix} -mg\left(1 + r_2^{-2}\right) & 0 \\ 0 & fr_2 \end{pmatrix}.$$

da cui si ricava che (r_1, φ_1) è stabile [risp. instabile] se $f > 0$ [risp. $f < 0$] mentre (r_2, φ_2) è instabile [risp. stabile] se $f > 0$ [risp. $f < 0$].

2) Nel caso $f = 0$ la lagrangiana è indipendente dal tempo ed inoltre la variabile φ è ciclica. Sussistono quindi gli integrali primi

$$E = \frac{m}{2}\left[\left(r^2 + \frac{1}{r^2} - 1\right)\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right] + mg\left(\frac{r^2}{2} - \log r\right),$$

$$P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}.$$

Le equazioni del moto si riducono a quadratura mediante gli integrali primi. Più precisamente si ha

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t ds\, \frac{P_\varphi}{mr(s)^2},$$

con $t \mapsto r(t)$ soluzione due volte differenziabile di

$$E = \frac{m}{2}\left(r^2 + \frac{1}{r^2} - 1\right)\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r),$$

avendo posto

$$U_{\text{eff}}(r) \doteq \frac{P_\varphi^2}{2mr^2} + mg\left(\frac{r^2}{2} - \log r\right).$$

Osserviamo che $\dot{\varphi}(0) \neq 0$ se e solo se $P_\varphi \neq 0$. Consideriamo il potenziale efficace U_{eff}: essendo $U'_{\text{eff}}(r) = -P_\varphi^2/(mr^3) + mgr - mg/r$, esso possiede un unico punto critico in

$$r_0 = \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{P_\varphi^2}{m^2 g}}};$$

inoltre $U_{\text{eff}}(r) \to +\infty$ per $r \to 0^+$ e per $r \to +\infty$. Posto allora $E_0 = U_{\text{eff}}(r_0)$ ed osservato che

$$\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2\big[E - U_{\text{eff}}(r)\big]r^2}{m(r^4 + 1 - r^2)}},$$

concludiamo che tutti i moti possibili $t \mapsto r(t)$ sono limitati (l'insieme $\{r : U_{\text{eff}}(r) \leq E\}$ è un intervallo chiuso e limitato per ogni $E \geq E_0$). In particolare l'insieme di livello critico $E = E_0$ si compone del singolo punto $\{(r_0, 0)\}$, che è l'orbita nello spazio delle fasi della soluzione stazionaria $r(t) \equiv r_0$. Se invece $E > E_0$ l'insieme di livello è costituito da una curva regolare chiusa, orbita nello spazio delle fasi di un moto periodico $t \mapsto r(t)$.

Una soluzione periodica per il moto complessivo $t \mapsto (r(t), \varphi(t))$ è

$$r(t) = r_0, \qquad \varphi(t) = \varphi(0) + \frac{P_\varphi}{mr_0^2} t$$

(si ottengono pertanto infinite soluzioni periodiche variando il parametro $P_\varphi \neq 0$).

2.23 Soluzione Compito 23

Le coordinate solidali e le coordinate assolute sono correlate nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ Z \end{pmatrix}.$$

Le coordinate solidali di P_1 sono:

$$x_1 = 0, y_1 = \cos\theta, Z_1 = \sin\theta.$$

Pertanto le coordinate di P_1 e P_2 nel sistema assoluto sono:

$$\begin{aligned} P_1 &\equiv (-\sin\phi\cos\theta, \cos\phi\cos\theta, \sin\theta), \\ P_2 &\equiv (-\sin\phi, \cos\phi, 0). \end{aligned}$$

I corrispondenti vettori velocità:

$$\begin{aligned} v_{P_1} &\equiv \dot\phi(-\cos\phi\cos\theta, -\sin\phi\cos\theta, 0) + \dot\theta(\sin\phi\sin\theta, -\cos\phi\sin\theta, \cos\theta), \\ v_{P_2} &\equiv -\dot\phi(\cos\phi, \sin\phi, 0). \end{aligned}$$

L'energia potenziale U:

$$U = -kL\cos\phi + m_1 g\sin\theta.$$

La lagrangiana è quindi:

$$L = \frac{1}{2}(m_2 + m_1\cos^2\theta)\dot\phi^2 + \frac{m_1}{2}\dot\theta^2 + kL\cos\phi - m_1 g\sin\theta.$$

Le equazioni di Lagrange sono:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[(m_2 + m_1\cos^2\theta)\dot\phi] &= -kL\sin\phi \\ \ddot\theta &= -\frac{m_1}{2}\sin 2\theta\dot\phi^2 + m_1 g\cos\theta. \end{aligned} \qquad (1)$$

I punti stazionari dell'energia potenziale sono individuati da:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial \phi} &= kL\sin\phi = 0,\\ \frac{\partial U}{\partial \theta} &= m_1 g\cos\theta = 0.\end{aligned}$$

Si hanno gli equilibri:

$$\begin{aligned}(1) : (\phi_1, \theta_1) &= (0, \frac{\pi}{2})\\ (2) : (\phi_2, \theta_2) &= (0, -\frac{\pi}{2})\\ (3) : (\phi_3, \theta_3) &= (\pi, \frac{\pi}{2})\\ (4) : (\phi_4, \theta_4) &= (-\pi, -\frac{\pi}{2})\end{aligned}$$

La matrice hessiana di U in una generica posizione è:

$$H(\phi, \theta) = \begin{pmatrix} kL\cos\phi & 0 \\ 0 & -m_1 g\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Si vede quindi che l'unica posizione di equilibrio stabile è la (2). La matrice dell'energia cinetica corrispondente è:

$$A := \begin{pmatrix} m_2 & 0 \\ 0 & m_1 \end{pmatrix}.$$

Gli zeri del polinomio caratteristico:

$$\det(\mu A + H(0, -\frac{\pi}{2})) = 0.$$

sono:

$$\mu_1 = -\frac{kL}{m_2}, \quad \mu_2 = -g.$$

Infine dalle (1) si vede che alle condizioni iniziali $\phi_0 = \pi$, $\dot{\phi}_0 = 0$ corrisponde il moto $\phi(t) \equiv \pi$, mentre la variabile θ è governata dall'equazione:

$$\ddot{\theta} = m_1 g\cos\theta.$$

2.24 Soluzione Compito 24

1) Le coordinate del baricentro G sono

$$x_G = \frac{\ell}{2}\sin\theta, \quad y_G = -\frac{\ell}{2}\cos\theta.$$

Il versore $\hat{n}$ ha componenti $(\cos\theta, \sin\theta)$, pertanto le coordinate del punto P sono

$$x_P = \frac{\ell}{2}\sin\theta + s\cos\theta, \quad y_P = -\frac{\ell}{2}\cos\theta + s\sin\theta.$$

Essendo $I = M\ell^2/3$ il momento d'inerzia dell'asta rispetto al suo estremo fisso, l'energia cinetica dell'asta è

$$T_{\text{asta}} = \frac{M\ell^2}{6}\dot{\theta}^2.$$

Il punto P ha velocità di componenti

$$\dot{x}_P = \left(\dot{s} + \frac{\ell}{2}\dot{\theta}\right)\cos\theta - s\dot{\theta}\sin\theta, \quad \dot{y}_P = \left(\dot{s} + \frac{\ell}{2}\dot{\theta}\right)\sin\theta + s\dot{\theta}\cos\theta,$$

pertanto la sua energia cinetica è

$$T_P = \frac{m}{2}\left[\dot{s}^2 + \ell\dot{s}\dot{\theta} + \left(\frac{\ell^2}{4} + s^2\right)\dot{\theta}^2\right].$$

L'energia potenziale del sistema è

$$U = U_{\text{molla}} + U_{\text{peso}} = \frac{k}{2}\left|\overrightarrow{GP}\right|^2 + mg\, y_P + Mg\, y_G,$$

dunque

$$U = \frac{k}{2}s^2 + mg\left(s\sin\theta - \frac{\ell}{2}\cos\theta\right) - Mg\frac{\ell}{2}\cos\theta.$$

La lagrangiana è $L = T - U = T_{\text{asta}} + T_P - U$, dunque $L = L_2 + L_0$ con

$$L_2 = \frac{1}{2}\left\{m\dot{s}^2 + m\ell\dot{s}\dot{\theta} + \left[\left(\frac{M}{3} + \frac{m}{4}\right)\ell^2 + ms^2\right]\dot{\theta}^2\right\},$$

$$L_0 = -\frac{k}{2}s^2 - mgs\sin\theta + (M+m)g\frac{\ell}{2}\cos\theta.$$

2) Le posizioni di equilibrio sono le soluzioni del seguente sistema,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_0}{\partial s} = -ks - mg\sin\theta = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial L_0}{\partial \theta} = -mgs\cos\theta - (M+m)g\dfrac{\ell}{2}\sin\theta = 0. \end{cases}$$

Esplicitando la variabile s nella prima equazione e sostituendo nella seconda si ricava subito che per ogni $\lambda > 0$ si hanno le soluzioni

$$(s_1, \theta_1) = (0, 0), \quad (s_2, \theta_2) = (0, \pi),$$

e che, se $\lambda < 1$, si hanno le due ulteriori soluzioni

$$(s_\pm, \theta_\pm) = \left(\mp\frac{mg}{k}\sqrt{1-\lambda^2}, \pm\arccos\lambda\right)$$

(coincidenti con (s_1, θ_1) per $\lambda = 1$). Studiamone la stabilità nel caso non critico $\lambda \neq 1$. La matrice hessiana di L_0 si scrive

$$\mathcal{H}(s, \theta) = \begin{pmatrix} -k & -mg\cos\theta \\ -mg\cos\theta & mgs\sin\theta - (M+m)g\frac{\ell}{2}\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\mathcal{H}(s_1, \theta_1) = \begin{pmatrix} -k & -mg \\ -mg & -(M+m)g\frac{\ell}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}(s_2, \theta_2) = \begin{pmatrix} -k & mg \\ mg & (M+m)g\frac{\ell}{2} \end{pmatrix}.$$

Poiché $\mathcal{H}(s_1, \theta_1)$ ha traccia negativa e determinante positivo [risp. negativo] se $\lambda > 1$ [risp. $\lambda < 1$], deduciamo che (s_1, θ_1) è stabile se $\lambda > 1$ ed instabile se $\lambda < 1$; invece, poiché $\mathcal{H}(s_2, \theta_2)$ ha determinante sempre negativo, (s_2, θ_2) è instabile per ogni $\lambda > 0$. Infine, se $\lambda < 1$, si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(s_\pm, \theta_\pm) &= \begin{pmatrix} -k & -mg\lambda \\ -mg\lambda & -\frac{m^2g^2}{k}(1-\lambda^2) - (M+m)g\frac{\ell}{2}\lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -k & -mg\lambda \\ -mg\lambda & -\frac{m^2g^2}{k} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Poiché $\mathcal{H}(s_\pm, \theta_\pm)$ ha traccia negativa e determinante positivo, deduciamo che $(s_\pm, \theta_\pm)$ sono stabili se $\lambda < 1$, ovvero quando esistono distinti da (s_1, θ_1).

3) Il sistema senza molla ha lagrangiana $L = L_2 + L_0$ con

$$L_0 = -mgs\sin\theta + (M+m)g\frac{\ell}{2}\cos\theta.$$

Gli equilibri sono assegnati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_0}{\partial s} = -mg\sin\theta = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial L_0}{\partial \theta} = -mgs\cos\theta - (M+m)g\dfrac{\ell}{2}\sin\theta = 0. \end{cases}$$

Quindi essi sono (solo) $(s_1, \theta_1) = (0,0)$ e $(s_2, \theta_2) = (0, \pi)$. Le rispettive matrici jacobiane,

$$\mathcal{H}(s_1,\theta_1) = \begin{pmatrix} 0 & -mg \\ -mg & -(M+m)g\frac{\ell}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}(s_2,\theta_2) = \begin{pmatrix} 0 & mg \\ mg & (M+m)g\frac{\ell}{2} \end{pmatrix},$$

sono a determinante negativo. Quindi entrambi gli equilibri sono instabili.

2.25 Soluzione Compito 25

1) Le coordinate dei tre punti materiali sono rispettivamente,

$$P_1 = (0,0,z), \quad P_2 = (\cos\theta, \sin\theta, 0), \quad P_3 = (x,0,0).$$

L'energia cinetica è pertanto

$$T = \frac{m_1}{2}\dot{z}^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{m_3}{2}\dot{x}^2,$$

mentre, essendo $\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|^2 = 1 + z^2$ e $\left|\overrightarrow{P_2P_3}\right|^2 = x^2 - 2x\cos\theta + 1$, l'energia potenziale è

$$U = U_{\text{molle}} + U_{\text{peso}} = \frac{k}{2}z^2 + \frac{k'}{2}(x^2 - 2x\cos\theta) + m_1 g z.$$

Pertanto la lagrangiana è $L = T - U = L_1 + L_2$ con

$$L_1(z,\dot{z}) = \frac{m_1}{2}\dot{z}^2 - \frac{k}{2}z^2 - m_1 g z,$$

$$L_2(\theta, x, \dot{\theta}, \dot{x}) = \frac{m_2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{m_3}{2}\dot{x}^2 + \frac{k'}{2}(2x\cos\theta - x^2).$$

2) La lagrangiana $L_1(z,\dot{z})$ è quella di un oscillatore armonico con posizione a riposo in $\bar{z} = -m_1 g/k$ e frequenza $\omega_1 = \sqrt{k/m_1}$. Quindi la soluzione generale del problema è $z(t) = \bar{z} + A\cos(\omega_1 t) + B\sin(\omega_1 t)$ con A, B costanti fissate dalle condizioni iniziali, e la posizione di equilibrio (unica) è $z = \bar{z}$.

3) Le posizioni di equilibrio sono le soluzioni del seguente sistema,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_2}{\partial \theta}(\theta, x, 0, 0) = -k' x \sin\theta = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial L_2}{\partial x}(\theta, x, 0, 0) = k' \cos\theta - k' x = 0. \end{cases}$$

Si hanno quindi le seguenti quattro posizioni di equilibrio,

$$(\theta_1, x_1) = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \qquad (\theta_2, x_2) = \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right),$$

$$(\theta_3, x_3) = (0, 1), \qquad (\theta_4, x_4) = (\pi, -1).$$

La matrice hessiana di $L_2(\theta, x, 0, 0)$ è

$$\mathcal{H}(\theta, x) = \begin{pmatrix} -k' x \cos\theta & -k' \sin\theta \\ -k' \sin\theta & -k' \end{pmatrix},$$

da cui si deduce immediatamente che (θ_i, x_i), $i = 1, 2$, sono instabili e (θ_i, x_i), $i = 3, 4$, sono stabili.

4) Essendo

$$\mathcal{H}(\theta_3, x_3) = \mathcal{H}(\theta_4, x_4) = \begin{pmatrix} -k' & 0 \\ 0 & -k' \end{pmatrix},$$

le posizioni di equilibrio stabile (θ_i, x_i), $i = 3, 4$, hanno uguali frequenze dei modi normali, $\omega_2 = \sqrt{k'/m_2}$ e $\omega_3 = \sqrt{k'/m_3}$.

2.26 Soluzione Compito 26

1) Siano $\vec{e}_1$ ed $\vec{e}_2$ i versori degli assi coordinati orizzontale e verticale ascendente. L'angolo che la direzione $\overrightarrow{AB}$ forma con l'asse delle ascisse è uguale a $\theta - \frac{\pi}{2}$, pertanto $\vec{e} = \sin\theta\, \vec{e}_1 - \cos\theta\, \vec{e}_2$. Si ha allora

$$\overrightarrow{OG} = \ell \cos\theta\, \vec{e}_1 + \ell \sin\theta\, \vec{e}_2,$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OG} + \xi\, \vec{e} = (\ell\cos\theta + \xi \sin\theta)\, \vec{e}_1 + (\ell \sin\theta - \xi\cos\theta)\, \vec{e}_2.$$

Pertanto le velocità di tali punti sono

$$\overrightarrow{v_G} = \ell\dot\theta \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{v_P} = \xi\dot\theta \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + (\dot\xi - \ell\dot\theta) \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Essendo $I = \dfrac{m(2\ell)^2}{12} = \dfrac{m\ell^2}{3}$ il momento di inerzia della sbarretta rispetto al baricentro ed $\omega = \dot\theta$ la velocità angolare della sbarretta, concludiamo che l'energia cinetica di quest'ultima è

$$T_{\text{sbarretta}} = \frac{m}{2}\left|\overrightarrow{v_G}\right|^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{m}{2}\ell^2\dot\theta^2 + \frac{m}{6}\ell^2\dot\theta^2 = \frac{2m}{3}\ell^2\dot\theta^2.$$

L'energia cinetica totale è quindi

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}|\overrightarrow{v_P}|^2 + T_{\text{sbarretta}} = \frac{m}{2}\left[\xi^2\dot\theta^2 + (\dot\xi - \ell\dot\theta)^2\right] + \frac{2m}{3}\ell^2\dot\theta^2 \\ &= \frac{m}{2}\left[\dot\xi^2 + \left(\frac{7\ell^2}{3} + \xi^2\right)\dot\theta^2 - 2\ell\dot\xi\dot\theta\right]. \end{aligned}$$

L'energia potenziale è invece

$$U = \frac{k}{2}|\overrightarrow{GP}|^2 + mg\,(y_G + y_P) = \frac{k}{2}\xi^2 + mg\,(2\ell\sin\theta - \xi\cos\theta)\,.$$

Concludiamo che la lagrangiana $L = T - U = L_2 + L_0$ è

$$L = \frac{m}{2}\left[\dot\xi^2 + \left(\frac{7\ell^2}{3} + \xi^2\right)\dot\theta^2 - 2\ell\dot\xi\dot\theta\right] - \frac{k}{2}\xi^2 + mg\xi\cos\theta - 2mg\ell\sin\theta.$$

2) Le posizioni di equilibrio sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_0}{\partial \xi} = -k\xi + mg\cos\theta = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial L_0}{\partial \theta} = -mg\xi\sin\theta - 2mg\ell\cos\theta = 0, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{mg}{k}\cos\theta, \\[2ex] \left(\dfrac{mg}{k}\sin\theta + 2\ell\right)\cos\theta = 0. \end{cases}$$

Per ogni valore del parametro $\alpha = \dfrac{2k\ell}{mg} > 0$ si hanno le soluzioni

$$(\xi_1, \theta_1) = \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \qquad (\xi_2, \theta_2) = \left(0, -\frac{\pi}{2}\right).$$

Nel caso $\alpha \in (0,1)$ si hanno le due ulteriori soluzioni,

$$(\xi_3, \theta_3) = \left(\frac{mg}{k}\sqrt{1-\alpha^2}, -\arcsin\alpha\right),$$

$$(\xi_4, \theta_4) = \left(-\frac{mg}{k}\sqrt{1-\alpha^2}, \pi + \arcsin\alpha\right).$$

Studiamone la stabilità; la matrice hessiana di L_0 è

$$\mathcal{H}(y,\theta) = \begin{pmatrix} -k & -mg\sin\theta \\ -mg\sin\theta & -mg\xi\cos\theta + 2mg\ell\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\mathcal{H}(\xi_1,\theta_1) = \begin{pmatrix} -k & -mg \\ -mg & 2mg\ell \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{H}(\xi_2,\theta_2) = \begin{pmatrix} -k & mg \\ mg & -2mg\ell \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{H}(\xi_3,\theta_3) = \mathcal{H}(\xi_4,\theta_4) = \begin{pmatrix} -k & mg\alpha \\ mg\alpha & -\dfrac{(mg)^2}{k}(1-\alpha^2) + 2mg\ell\alpha \end{pmatrix},$$

da cui si ricava che (ξ_1,θ_1) è sempre instabile, (ξ_2,θ_2) è stabile se $\alpha > 1$ ed instabile se $\alpha \in (0,1)$, mentre le posizioni (ξ_3,θ_3), (ξ_4,θ_4) sono stabili se $\alpha \in (0,1)$ (ovvero quando esistono distinte da (ξ_2,θ_2)).

Il caso $\alpha = 1$, in cui la soluzione (ξ_2,θ_2) biforca, è critico, ovvero la stabilità non viene riconosciuta dalla parte lineare (la matrice hessiana possiede un autovalore nullo).

3) In assenza di forza peso, ovvero ponendo l'accelerazione di gravità $g = 0$, la lagrangiana si riduce a

$$L = \frac{m}{2}\left[\dot\xi^2 + \left(\frac{7\ell^2}{3} + \xi^2\right)\dot\theta^2 - 2\ell\dot\xi\dot\theta\right] - \frac{k}{2}\xi^2.$$

Oltre all'energia si conserva anche il momento cinetico associato alla variabile ciclica θ, pertanto sono costanti del moto

$$E = \frac{m}{2}\left[\dot\xi^2 + \left(\frac{7\ell^2}{3} + \xi^2\right)\dot\theta^2 - 2\ell\dot\xi\dot\theta\right] + \frac{k}{2}\xi^2,$$

$$P = \frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = m\left(\frac{7\ell^2}{3} + \xi^2\right)\dot\theta - m\ell\dot\xi.$$

Dalla seconda relazione di ricava

$$\dot\theta = \frac{3}{3\xi^2 + 7\ell^2}\left(\frac{P}{m} + \ell\dot\xi\right),$$

da cui, sostituendo nella prima relazione,

$$E = \frac{m}{2}\left(1 - \frac{3\ell^2}{3\xi^2 + 7\ell^2}\right)\dot{\xi}^2 + \frac{k}{2}\xi^2 + \frac{3P^2}{2m\,(3\xi^2 + 7\ell^2)}.$$

Quindi, sul livello P del momento cinetico della variabile θ, i moti della variabile ξ sono governati dalla lagrangiana efficace

$$L_P(\xi, \dot{\xi}) = \frac{m}{2}\left(1 - \frac{3\ell^2}{3\xi^2 + 7\ell^2}\right)\dot{\xi}^2 - \frac{k}{2}\xi^2 - \frac{3P^2}{2m\,(3\xi^2 + 7\ell^2)}.$$

2.27 Soluzione Compito 27

1) I baricentri G e G' delle sbarrette AB e BC hanno coordinate

$$G = (x - \ell\cos\theta, \ell\sin\theta), \qquad G' = (x + \ell\cos\theta, \ell\sin\theta),$$

da cui

$$\overrightarrow{v_G} = \begin{pmatrix} \dot{x} + \ell\dot{\theta}\sin\theta \\ \ell\dot{\theta}\cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{v_{G'}} = \begin{pmatrix} \dot{x} - \ell\dot{\theta}\sin\theta \\ \ell\dot{\theta}\cos\theta \end{pmatrix}.$$

L'angolo che la direzione $\overrightarrow{CB}$ forma con l'asse delle ascisse è uguale a $\pi - \theta$, pertanto le velocità angolari delle sbarrette AB e BC sono rispettivamente $\omega = \dot{\theta}$ ed $\omega' = -\omega$. Essendo

$$I = \frac{m(2\ell)^2}{12} = \frac{m\ell^2}{3}$$

il momento di inerzia di ciascuna sbarretta rispetto al proprio baricentro, concludiamo che l'energia cinetica del sistema è

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}\left[|\overrightarrow{v_G}|^2 + |\overrightarrow{v_{G'}}|^2\right] + \frac{1}{2}I\left[\omega^2 + (\omega')^2\right] = \frac{m}{2}\left[2\dot{x}^2 + 2\ell^2\dot{\theta}^2\right] + \frac{m\ell^2}{3}\dot{\theta}^2 \\ &= \frac{m}{2}\left[2\dot{x}^2 + \frac{8\ell^2}{3}\dot{\theta}^2\right]. \end{aligned}$$

Essendo $A = (x - 2\ell\cos\theta, 0)$ e $C = (x + 2\ell\cos\theta, 0)$, l'energia potenziale è

$$U = \frac{k}{2}\left[|\overrightarrow{Q_1A}|^2 + |\overrightarrow{Q_2C}|^2\right] = \frac{k}{2}\left[2x^2 + 2\ell^2 + 8\ell^2\cos^2\theta - 8\ell^2\cos\theta\right].$$

Concludiamo che la lagrangiana $L = L_2 + L_0$ è

$$L = \frac{m}{2}\left[2\dot{x}^2 + \frac{8\ell^2}{3}\dot{\theta}^2\right] - kx^2 - 4k\ell^2\cos^2\theta + 4k\ell^2\cos\theta,$$

da cui le equazioni del moto,

$$\begin{cases} 2m\ddot{x} = -2kx, \\ \\ \dfrac{8m\ell^2}{3}\ddot{\theta} = 4k\ell^2 \sin\theta\,(2\cos\theta - 1)\,. \end{cases}$$

2) Le posizioni di equilibrio sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_0}{\partial x} = -2kx = 0, \\ \\ \dfrac{\partial L_0}{\partial \theta} = 4k\ell^2 \sin\theta\,(2\cos\theta - 1) = 0. \end{cases}$$

Esistono pertanto quattro posizioni di equilibrio,

$$(x_1, \theta_1) = (0, 0), \qquad (x_2, \theta_2) = (0, \pi), \qquad (x_\pm, \theta_\pm) = \Big(0, \pm\frac{\pi}{3}\Big).$$

Studiamone la stabilità; la matrice hessiana di L_0 è

$$\mathcal{H}(x, \theta) = \begin{pmatrix} -2k & 0 \\ 0 & 4k\ell^2[4\cos^2\theta - 2 - \cos\theta] \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\mathcal{H}(x_1, \theta_1) = \begin{pmatrix} -2k & 0 \\ 0 & 4k\ell^2 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{H}(x_2, \theta_2) = \begin{pmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 12k\ell^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{H}(x_\pm, \theta_\pm) = \begin{pmatrix} -2k & 0 \\ 0 & -6k\ell^2 \end{pmatrix},$$

da cui si ricava che (x_1, θ_1) e (x_2, θ_2) sono instabili, mentre le posizioni $(x_\pm, \theta_\pm)$ sono stabili.

3) Calcoliamo le frequenze delle piccole oscillazioni attorno alle posizioni $(x_\pm, \theta_\pm)$. La matrice dell'energia cinetica è costante, precisamente

$$A = \begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 8m\ell^2/3 \end{pmatrix}.$$

Posto $H = \mathcal{H}(x_\pm, \theta_\pm)$, le frequenze delle piccole oscillazioni sono $\omega_i = \sqrt{-\lambda_i}$, essendo λ_i, $i = 1, 2$, le radici dell'equazione caratteristica $\det(H - \lambda A) =$

0. Poiché in questo caso entrambe le matrici sono diagonali, ricaviamo immediatamente

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{9k}{4m}}.$$

4) Dalle equazioni di Eulero-Lagrange si vede che il moto della variabile x è quello di un oscillatore armonico di frequenza $\sqrt{k/m}$. Per ottenere un moto armonico è pertanto sufficiente scegliere i dati iniziali in modo tale che la variabile θ rimanga in quiete, ovvero

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad \theta(0) = \bar{\theta}, \qquad \dot{\theta}(0) = 0,$$

con $x_0, \dot{x}_0$ qualsiasi e $\bar{\theta} = 0, \pi, \pm(\pi/3)$.

2.28 Soluzione Compito 28

1) Sia $\{O; x, y\}$ un sistema di riferimento ortonormale con l'asse y diretto secondo la verticale ascendente. Il baricentro G della sbarra ed il punto P hanno coordinate

$$G = \Big(\frac{\ell}{2}\sin\theta, -\frac{\ell}{2}\cos\theta\Big), \qquad P = (\ell\sin\theta + \xi\cos\theta, -\ell\cos\theta + \xi\sin\theta),$$

da cui

$$\overrightarrow{v_G} = \frac{\ell}{2}\dot{\theta}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{v_P} = (\ell\dot{\theta} + \dot{\xi})\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} + \xi\dot{\theta}\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}.$$

Essendo

$$I = \frac{M\ell^2}{3} = \frac{2m\ell^2}{3}$$

il momento di inerzia della sbarra rispetto all'estremo fisso O ed $\omega = \dot{\theta}$ la sua velocità angolare, concludiamo che l'energia cinetica del sistema è

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}|\overrightarrow{v_P}|^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{m}{2}\Big[(\ell\dot{\theta} + \dot{\xi})^2 + \xi^2\dot{\theta}^2\Big] + \frac{m\ell^2}{3}\dot{\theta}^2 \\ &= \frac{m}{2}\Big[\dot{\xi}^2 + 2\ell\dot{\xi}\dot{\theta} + \Big(\xi^2 + \frac{5}{3}\ell^2\Big)\dot{\theta}^2\Big]. \end{aligned}$$

L'energia potenziale è invece

$$U = \frac{k}{2}|\overrightarrow{OP}|^2 + Mgy_G + mgy_P = \frac{k}{2}(\xi^2 + \ell^2) + mg(\xi\sin\theta - 2\ell\cos\theta).$$

Concludiamo che la lagrangiana $L = L_2 + L_0$ è

$$L = \frac{m}{2}\Big[\dot{\xi}^2 + 2\ell\dot{\xi}\dot{\theta} + \Big(\xi^2 + \frac{5}{3}\ell^2\Big)\dot{\theta}^2\Big] - \frac{k}{2}\xi^2 - mg(\xi\sin\theta - 2\ell\cos\theta).$$

2) Le posizioni di equilibrio sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_0}{\partial \xi} = -k\xi - mg\sin\theta = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial L_0}{\partial \theta} = -mg\xi\cos\theta - 2mg\ell\sin\theta = 0, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \xi = -\dfrac{mg}{k}\sin\theta, \\[2ex] \Big(2\ell - \dfrac{mg}{k}\cos\theta\Big)\sin\theta = 0. \end{cases}$$

Per ogni valore del parametro $\alpha = \dfrac{2k\ell}{mg} > 0$ si hanno le soluzioni

$$(\xi_1, \theta_1) = (0, 0), \qquad (\xi_2, \theta_2) = (0, \pi).$$

Nel caso $\alpha \in (0, 1)$ si hanno le due ulteriori soluzioni,

$$(\xi_\pm, \theta_\pm) = \Big(\mp\frac{mg}{k}\sqrt{1-\alpha^2}, \pm\arccos\alpha\Big).$$

Studiamone la stabilità; la matrice hessiana di L_0 è

$$\mathcal{H}(\xi, \theta) = \begin{pmatrix} -k & -mg\cos\theta \\ -mg\cos\theta & mg\xi\sin\theta - 2mg\ell\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\mathcal{H}(\xi_1, \theta_1) = \begin{pmatrix} -k & -mg \\ -mg & -2mg\ell \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{H}(\xi_2, \theta_2) = \begin{pmatrix} -k & mg \\ mg & 2mg\ell \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{H}(\xi_\pm, \theta_\pm) = \begin{pmatrix} -k & -mg\alpha \\ -mg\alpha & -\dfrac{(mg)^2}{k}(1-\alpha^2) - 2mg\ell\alpha \end{pmatrix},$$

da cui si ricava che (ξ_2, θ_2) è sempre instabile, (ξ_1, θ_1) è stabile se $\alpha > 1$ ed instabile se $\alpha \in (0, 1)$, mentre le posizioni $(\xi_\pm, \theta_\pm)$ sono stabili se $\alpha \in (0, 1)$ (ovvero quando esistono distinte da (ξ_1, θ_1)).

Il caso $\alpha = 1$, in cui la soluzione (ξ_1, θ_1) biforca, è critico, ovvero la stabilità non viene riconosciuta dalla parte lineare (la matrice hessiana possiede un autovalore nullo).

3) Calcoliamo le frequenze delle piccole oscillazioni attorno alla posizione (ξ_1, θ_1) nel caso $\alpha > 1$. La matrice dell'energia cinetica valutata in (ξ_1, θ_1) è

$$A = \begin{pmatrix} m & m\ell \\ m\ell & 5m\ell^2/3 \end{pmatrix}.$$

Posto $H = \mathcal{H}(\xi_1, \theta_1)$, le frequenze delle piccole oscillazioni sono $\omega_\pm = \sqrt{-\lambda_\pm}$, essendo $\lambda_\pm$ le radici dell'equazione caratteristica

$$\det(H - \lambda A) = \det \begin{pmatrix} -k - \lambda m & -mg - \lambda m\ell \\ -mg - \lambda m\ell & -2mg\ell - \lambda 5m\ell^2/3 \end{pmatrix} = 0.$$

Svolgendo i conti si trova

$$\lambda_\pm = -\left[\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6\frac{\alpha - 1}{\alpha^2}}\right] \frac{k}{m},$$

dunque

$$\omega_\pm = \sqrt{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6\frac{\alpha - 1}{\alpha^2}}} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

2.29 Soluzione Compito 29

1) Il punto P ha coordinate (x, y, xy), da cui

$$\overrightarrow{v_P} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ y\dot{x} + x\dot{y} \end{pmatrix}, \quad T = \frac{m}{2}|\overrightarrow{v_P}|^2 = \frac{m}{2}\left[(1 + y^2)\dot{x}^2 + (1 + x^2)\dot{y}^2 + 2xy\dot{x}\dot{y}\right].$$

L'energia potenziale è

$$U = \frac{k}{2}|\overrightarrow{OP}|^2 + U_{\text{peso}}$$

ovvero

$$U = \frac{k}{2}\left(x^2 + y^2 + x^2y^2\right) + mgxy.$$

Concludiamo che la lagrangiana $L = T - U = L_2 + L_0$ è

$$L = \frac{m}{2}\left[(1 + y^2)\dot{x}^2 + (1 + x^2)\dot{y}^2 + 2xy\dot{x}\dot{y}\right] - \frac{k}{2}\left(x^2 + y^2 + x^2y^2\right) - mgxy.$$

2) Le posizioni di equilibrio sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_0}{\partial x} = -kx - kxy^2 - mgy = 0, \\ \\ \dfrac{\partial L_0}{\partial y} = -ky - kx^2y - mgx = 0, \end{cases}$$

ovvero, essendo $\lambda = \dfrac{mg}{k}$,

$$\begin{cases} x = -\dfrac{\lambda y}{1+y^2}\,, \\ \\ y\left[1 + \dfrac{\lambda^2 y^2}{(1+y^2)^2} - \dfrac{\lambda^2}{1+y^2}\right] = 0, \end{cases}$$

Per ogni $\lambda > 0$ si ha la soluzione $(x_1, y_1) = (0, 0)$. Nel caso $\lambda > 1$ sussistono le due ulteriori soluzioni,

$$(x_2, y_2) = \left(\sqrt{\lambda - 1}, -\sqrt{\lambda - 1}\right), \qquad (x_3, y_3) = \left(-\sqrt{\lambda - 1}, \sqrt{\lambda - 1}\right).$$

Studiamone la stabilità; la matrice hessiana di L_0 è

$$\mathcal{H}(x, y) = -k \begin{pmatrix} 1+y^2 & 2xy+\lambda \\ 2xy+\lambda & 1+x^2 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\mathcal{H}(x_1, y_1) = -k \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{H}(x_2, y_2) = \mathcal{H}(x_3, y_3) = -k \begin{pmatrix} \lambda & 2-\lambda \\ 2-\lambda & \lambda \end{pmatrix},$$

da cui si ricava che (x_1, y_1) è stabile se $\lambda < 1$ ed instabile se $\lambda > 1$, mentre le posizioni (x_2, y_2), (x_3, y_3) sono stabili se $\lambda > 1$ (ovvero quando esistono distinte da (x_1, y_1)).

3) Calcoliamo le frequenze delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile (x_1, y_1) per $\lambda < 1$. La matrice dell'energia cinetica è

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} m(1+y^2) & mxy \\ mxy & m(1+x^2) \end{pmatrix},$$

pertanto

$$A = A(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}.$$

Posto $H = \mathcal{H}(x_1, y_1)$, le frequenze delle piccole oscillazioni sono $\omega_\pm = \sqrt{-\mu_\pm}$, essendo $\mu_\pm$ le radici dell'equazione caratteristica

$$\det(H - \mu A) = \det \begin{pmatrix} -k - \mu m & -k\lambda \\ -k\lambda & -k - \mu m \end{pmatrix} = 0.$$

Pertanto

$$\omega_\pm = \sqrt{\frac{k}{m}(1 \pm \lambda)}.$$

4) Il caso critico è $\lambda = 1$, in cui i tre equilibri coincidono con il punto $(0,0)$ e la stabilità non viene riconosciuta dalla parte lineare (la matrice hessiana possiede un autovalore negativo ed uno nullo). Osserviamo però che in tal caso, poiché $k = mg$, si ha

$$\begin{aligned} L_0(x,y) - L_0\,(0,0) &= -\frac{k}{2}\left(x^2 + y^2 + x^2y^2 + 2xy\right) \\ &= -\frac{k}{2}\left[(x+y)^2 + x^2y^2\right], \end{aligned}$$

che è una quantità negativa per ogni $(x,y) \neq (0,0)$. Quindi L_0 possiede un massimo proprio in $(0,0)$ e pertanto tale equilibrio è stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet.

2.30 Soluzione Compito 30

1) Siano $\vec{e}_1$ ed $\vec{e}_2$ rispettivamente i versori degli assi coordinati orizzontale e verticale ascendente. Si ha

$$\overrightarrow{OA} = y\,\vec{e}_2\ , \quad \overrightarrow{OB} = 2\ell\cos\theta\,\vec{e}_1 + (y + 2\ell\sin\theta)\,\vec{e}_2\ ,$$

e quindi

$$\overrightarrow{OG} = \ell\cos\theta\,\vec{e}_1 + (y + \ell\sin\theta)\,\vec{e}_2\ ,$$

cosicché

$$\overrightarrow{v_G} = -\ell\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{e}_1 + (\dot{y} + \ell\dot{\theta}\cos\theta)\vec{e}_2\ .$$

Per il teorema di Koenig, l'energia cinetica della sbarra è

$$T = \frac{M}{2}|\overrightarrow{v_G}|^2 + \frac{1}{2}I\omega^2,$$

essendo $I = \frac{M}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} r^2\,\mathrm{d}r = \frac{M\ell^2}{3}$ il momento di inerzia della sbarra rispetto al baricentro ed $\omega = \dot\theta$ la velocità angolare della sbarra. Quindi

$$T = \frac{M}{2}\left[\ell^2\dot\theta^2\sin^2\theta + (\dot y + \ell\dot\theta\cos\theta)^2\right] + \frac{M\ell^2}{6}\dot\theta^2\ ,$$

da cui

$$T = \frac{M}{2}\left[\dot y^2 + \frac{4\ell^2}{3}\dot\theta^2 + 2\ell\cos\theta\,\dot y\dot\theta\right]\ .$$

L'energia potenziale è

$$U = Mg\,\overrightarrow{OG}\cdot\vec e_2 + \frac{k}{2}|\overrightarrow{OG}|^2 = Mg(y+\ell\sin\theta) + \frac{k}{2}\left[\ell^2\cos^2\theta + (y+\ell\sin\theta)^2\right]\ ,$$

ovvero, a meno di una costante additiva,

$$U = \frac{k}{2}y^2 + k\ell y\sin\theta + Mgy + Mg\ell\sin\theta\ .$$

Concludiamo che la lagrangiana $L = T - U = L_2 + L_0$ è

$$L(y,\theta,\dot y,\dot\theta) = \frac{M}{2}\left[\dot y^2 + \frac{4\ell^2}{3}\dot\theta^2 + 2\ell\cos\theta\,\dot y\dot\theta\right] - \frac{k}{2}y^2 - k\ell y\sin\theta - Mgy - Mg\ell\sin\theta\ .$$

2) Le posizioni di equilibrio sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_0}{\partial y} = -ky - Mg - k\ell\sin\theta = 0\ , \\[2ex] \dfrac{\partial L_0}{\partial\theta} = -(k\ell y + Mg\ell)\cos\theta = 0\ . \end{cases}$$

Si ricavano le seguenti quattro posizioni di equilibrio:

$$(y_0,\theta_0) = \Big(-\frac{Mg}{k}, 0\Big)\ ,\quad (y_1,\theta_1) = \Big(-\frac{Mg}{k}, \pi\Big)\ ,$$

$$(y_\pm,\theta_\pm) = \Big(-\frac{Mg}{k} \mp \ell, \pm\frac{\pi}{2}\Big)\ .$$

Studiamone la stabilità. La matrice hessiana di L_0 è

$$\mathcal{H}(y,\theta) = \begin{pmatrix} -k & -k\ell\cos\theta \\ -k\ell\cos\theta & (k\ell y + Mg\ell)\sin\theta \end{pmatrix}\ .$$

Quindi

$$\mathcal{H}(y_0,\theta_0)=\begin{pmatrix} -k & -k\ell \\ -k\ell & 0 \end{pmatrix}\ , \quad \mathcal{H}(y_1,\theta_1)=\begin{pmatrix} -k & k\ell \\ k\ell & 0 \end{pmatrix}\ ,$$

$$\mathcal{H}(y_\pm,\theta_\pm)=\begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & -k\ell^2 \end{pmatrix}\ ,$$

da cui si ricava che (y_0,θ_0) e (y_1,θ_1) sono instabili (poiché il determinante è negativo), mentre le posizioni $(y_\pm,\theta_\pm)$ sono stabili.

3) Calcoliamo le frequenze delle piccole oscillazioni attorno alla posizione stabile (y_+,θ_+). La matrice $A(y,\theta)$ dell'energia cinetica è pari a

$$A(y,\theta)=\begin{pmatrix} M & M\ell\cos\theta \\ M\ell\cos\theta & 4M\ell^2/3 \end{pmatrix}\ ,$$

cosicché

$$A=A(y_+,\theta_+)=\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 4M\ell^2/3 \end{pmatrix}\ .$$

Posto $H=\mathcal{H}(y_+\theta_+)$, le frequenze delle piccole oscillazioni sono $\omega_\pm=\sqrt{-\lambda_\pm}$, essendo $\lambda_\pm$ le radici dell'equazione caratteristica

$$\det(H-\lambda A)=\det\begin{pmatrix} -k-M\lambda & 0 \\ 0 & -k\ell^2-(4M\ell^2/3)\lambda \end{pmatrix}=0\ .$$

Dunque

$$\omega_+=\sqrt{\frac{k}{M}}\ , \qquad \omega_-=\sqrt{\frac{3k}{4M}}\ .$$

4) Il problema modificato ha lagrangiana

$$L(\theta,\dot\theta)=\frac{4M\ell^2}{6}\dot\theta^2-2Mg\ell\sin\theta\ ,$$

che, a meno dei parametri, è la lagrangiana di un pendolo matematico piano (in cui l'angolo viene contato in senso antiorario partendo dalle ascisse). La discussione dettagliata è lasciata al lettore.

2.31 Soluzione Compito 31

1) I baricentri G e G' delle sbarrette AB e BC hanno coordinate

$$G = (x - \ell\cos\theta, \ell\sin\theta), \qquad G' = (x + \ell\cos\theta, \ell\sin\theta) ,$$

da cui

$$\overrightarrow{v_G} = \begin{pmatrix} \dot{x} + \ell\dot{\theta}\sin\theta \\ \ell\dot{\theta}\cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{v_{G'}} = \begin{pmatrix} \dot{x} - \ell\dot{\theta}\sin\theta \\ \ell\dot{\theta}\cos\theta \end{pmatrix} .$$

L'angolo che la direzione $\overrightarrow{CB}$ forma con l'asse delle ascisse è uguale a $\pi - \theta$, pertanto le velocità angolari delle sbarrette AB e BC sono rispettivamente $\omega = \dot{\theta}$ ed $\omega' = -\omega$. Essendo

$$I = \frac{M(2\ell)^2}{12} = \frac{M\ell^2}{3}$$

il momento di inerzia di ciascuna sbarretta rispetto al proprio baricentro, concludiamo che l'energia cinetica del sistema è

$$\begin{aligned} T &= \frac{M}{2}\left[|\overrightarrow{v_G}|^2 + |\overrightarrow{v_{G'}}|^2\right] + \frac{I}{2}\left[\omega^2 + (\omega')^2\right] = \frac{M}{2}\left[2\dot{x}^2 + 2\ell^2\dot{\theta}^2\right] + \frac{M\ell^2}{3}\dot{\theta}^2 \\ &= \frac{M}{2}\left[2\dot{x}^2 + \frac{8\ell^2}{3}\dot{\theta}^2\right] . \end{aligned}$$

Essendo $B = (x, 2\ell\sin\theta)$ ed avendo i baricentri G e G' uguale ordinata $y = \ell\sin\theta$, l'energia potenziale è

$$U = \frac{K}{2}|\overrightarrow{OB}|^2 + 2Mgy = \frac{K}{2}\left(x^2 + 4\ell^2\sin^2\theta\right) + 2Mg\ell\sin\theta .$$

Concludiamo che la lagrangiana $L = L_2 + L_0$ è

$$L = \frac{M}{2}\left[2\dot{x}^2 + \frac{8\ell^2}{3}\dot{\theta}^2\right] - \frac{K}{2}\left(x^2 + 4\ell^2\sin^2\theta\right) - 2Mg\ell\sin\theta .$$

2) Le posizioni di equilibrio sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_0}{\partial x} = -Kx = 0 , \\[2ex] \dfrac{\partial L_0}{\partial \theta} = -4K\ell^2\sin\theta\cos\theta - 2Mg\ell\cos\theta = 0 . \end{cases}$$

Per ogni valore dei parametri si hanno le due posizioni di equilibrio

$$(x_1, \theta_1) = (0, \pi/2) \ , \qquad (x_2, \theta_2) = (0, -\pi/2) \ .$$

Se $\alpha = \dfrac{Mg}{2K\ell} < 1$ si hanno le ulteriori due posizioni di equilibrio

$$(x_3, \theta_3) = (0, -\arcsin\alpha) \ , \qquad (x_4, \theta_4) = (0, \pi + \arcsin\alpha) \ ,$$

che coincidono con (x_2, θ_2) nel caso critico $\alpha = 1$.

Studiamone la stabilità; la matrice hessiana di L_0 è

$$\mathcal{H}(x, \theta) = \begin{pmatrix} -K & 0 \\ 0 & 4K\ell^2(2\sin^2\theta - 1) + 2Mg\ell\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Quindi, ricordando la definizione di α e che $\sin\theta_3 = \sin\theta_4 = -\alpha$,

$$\mathcal{H}(x_1, \theta_1) = \begin{pmatrix} -K & 0 \\ 0 & 4K\ell^2(1+\alpha) \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{H}(x_2, \theta_2) = \begin{pmatrix} -K & 0 \\ 0 & 4K\ell^2(1-\alpha) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{H}(x_3, \theta_3) = \mathcal{H}(x_4, \theta_4) = \begin{pmatrix} -K & 0 \\ 0 & 4K\ell^2(\alpha^2 - 1) \end{pmatrix},$$

da cui si ricava che (x_1, θ_1) è instabile, (x_2, θ_2) è stabile se $\alpha > 1$ ed instabile se $\alpha < 1$, mentre le posizioni (x_3, θ_3) e (x_4, θ_4) sono stabili per $\alpha < 1$.
Nota. Nel caso critico $\alpha = 1$, poiché

$$L_0 = -\frac{K}{2}x^2 - 2K\ell^2(\sin\theta + 1)^2 + 2K\ell^2 \ ,$$

si vede immediatamente che (x_2, θ_2) è un punto di massimo proprio di L_0, dunque stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet.

3) Calcoliamo le frequenze delle piccole oscillazioni attorno alle posizioni (x_2, θ_2) quando $\alpha > 1$. La matrice dell'energia cinetica è costante, precisamente

$$A = \begin{pmatrix} 2M & 0 \\ 0 & 8M\ell^2/3 \end{pmatrix}.$$

Posto $H = \mathcal{H}(x_2, \theta_2)$, le frequenze delle piccole oscillazioni sono $\omega_i = \sqrt{-\lambda_i}$, essendo λ_i, $i = 1, 2$, le radici dell'equazione caratteristica $\det(H - \lambda A) = 0$. Poiché in questo caso entrambe le matrici sono diagonali, ricaviamo immediatamente

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{2M}} \ , \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{3K}{2M}(\alpha - 1)} \ .$$