Prefazione

Questo libro si basa su un'ormai ventennale esperienza didattica in vari Corsi di Studio delle Facoltà di Ingegneria, Architettura e Scienze Matematiche Fisiche e Naturali ed è una nuova stesura, completamente rinnovata nella veste grafica e significativamente modificata e ampliata nei contenuti, del volume *Matematica 1 – Teoria ed esercizi* che era dedicato a corsi di base di matematica del primo anno di università. Questa nuova versione può coprire anche le esigenze didattiche di corsi che prevedono uno studio più approfondito dei concetti di base dell'Analisi Matematica.

L'obiettivo è quello di proporre, in un unico volume, tutti gli strumenti necessari per supportare lo studente nel suo passaggio dalle competenze della scuola superiore alla preparazione di un esame universitario del primo anno: prerequisiti, teoria svolta durante il corso ed esercizi relativi.

Per quanto riguarda i contenuti teorici, la proposta è quella di un "percorso base" sugli argomenti che vengono tipicamente trattati in qualsiasi corso istituzionale, corredato da diverse direzioni di approfondimento (in paragrafi autonomi riconoscibili grazie al simbolo ✂).

Il "percorso base" è completamente autocontenuto e autoreferenziale ed è così strutturato: i primi due capitoli sono dedicati, oltre che agli usuali richiami sugli insiemi numerici e alla definizione astratta di funzione, a un dettagliato studio delle funzioni di base e alle tecniche di risoluzione delle equazioni o disequazioni a esse associate. I contenuti di questi capitoli hanno lo scopo di mettere in grado ogni studente, indipendentemente dagli studi superiori di provenienza, di comprendere gli argomenti successivi. I capitoli 3, 4, 5 e 6 contengono la parte classica dell'analisi matematica per funzioni di una variabile reale (limiti, derivate, integrali). Gli ultimi due capitoli propongono una trattazione sintetica degli strumenti di algebra lineare e di geometria analitica usualmente trattati nei corsi base di Matematica.

Gli argomenti dei paragrafi indicati con il simbolo ✂ sono quelli che, in genere, vengono svolti in corsi più approfonditi di Analisi Matematica del primo anno: numeri complessi, successioni e serie numeriche, funzioni uniformemente continue, integrale di Riemann e integrali impropri. Questi paragrafi possono essere saltati senza conseguenze sulla completezza del programma di base e permettono una certa libertà di scelta per il docente, in funzione delle proprie preferenze ed esigenze didattiche.

Per facilitare la comprensione dei concetti e dei risultati che, di norma, sono presentati in maniera rigorosa, la trattazione è corredata da numerosi esempi, controesempi, commenti e figure. Vengono inoltre illustrate alcune semplici applicazioni alla meccanica, alla statica, alla chimica e alla biologia.

I capitoli si concludono con una sezione di esercizi, tutti corredati di soluzione e in buona parte completamente svolti (questi ultimi sono segnalati dal simbolo ✍ di fianco al testo dell'esercizio).

Indice

1 Numeri e piano cartesiano **1**

1.1 Insiemi e numeri 1
1.2 Operazioni e ordinamento 4
1.3 I numeri reali e l'asse reale 5
1.4 ✂ Estremo superiore e inferiore 9
1.5 Il piano cartesiano 10
1.6 Coefficienti binomiali e binomio di Newton 15
1.7 ✂ Il Principio di induzione 18
1.8 ✂ I numeri complessi 21
1.9 Esercizi 25
1.10 Svolgimento degli esercizi 27

2 Funzioni **33**

2.1 Definizioni e primi esempi 33
2.2 Operazioni tra funzioni; composizione 39
2.3 Funzioni limitate, funzioni monotone 40
2.4 Funzioni pari, dispari, periodiche 43
2.5 Iniettività, suriettività, funzioni invertibili 44
2.6 Equazioni e disequazioni 49
2.7 Traslazioni e dilatazioni 51
2.8 Le funzioni elementari 53
2.8.1 Funzioni affini 53
2.8.2 La funzione valore assoluto 55
2.8.3 Polinomi di secondo grado 57
2.8.4 Potenze e radici ennesime 60
2.8.5 Potenze con esponente reale 62

2.8.6 ✂ Definizione delle potenze con esponente reale 64
2.8.7 Esponenziali e logaritmi 65
2.8.8 Funzioni trigonometriche 69
2.9 ✂ La regola di Ruffini 74
2.10 ✂ Ulteriori formule trigonometriche 76
2.11 ✂ Alcune funzioni di variabile complessa 79
2.12 Esercizi 86
2.13 Svolgimento degli esercizi 90

3 Limiti e continuità 101
3.1 Il concetto di limite 101
3.2 Calcolo dei limiti 109
3.3 Estensione del concetto di limite 116
3.4 Asintoti 126
3.5 Continuità 130
3.6 Proprietà delle funzioni continue 134
3.7 Limiti con esponenziali e logaritmi 139
3.8 Infinitesimi, infiniti, confronto 141
3.9 ✂ Complementi sulle successioni numeriche 146
3.10 ✂ Il numero di Nepero 151
3.11 ✂ Successioni definite per ricorrenza 154
3.12 ✂ Complementi sulle funzioni continue 158
3.13 Esercizi 165
3.14 Svolgimento degli esercizi 168

4 Calcolo differenziale 181
4.1 Il concetto di derivata 181
4.2 Calcolo delle derivate 188
4.3 Teoremi fondamentali del calcolo differenziale 199
4.4 Derivate successive e formula di Taylor del secondo ordine . . . 217
4.5 Convessità e concavità 222
4.6 Studio del grafico di una funzione 226
4.7 ✂ Complementi sulle funzioni convesse 229
4.8 ✂ La formula di Taylor di ordine n 235
4.9 ✂ Calcolo dei limiti mediante la formula di Taylor 239
4.10 Esercizi 243
4.10.1 Studi di funzione 245
4.11 Svolgimento degli esercizi 246
4.11.1 Studi di funzione 253

5 Integrali indefiniti **281**
5.1 Primitive 281
5.2 Metodi di integrazione 284
5.3 Integrazione delle funzioni razionali 290
5.4 Integrazione delle funzioni trigonometriche 302
5.5 Integrazione di funzioni irrazionali 306
5.6 ✂ Alcune formule di riduzione 309
5.7 Cenni sulle equazioni differenziali 310
5.7.1 Equazioni differenziali lineari 313
5.7.2 Equazioni differenziali a variabili separabili 315
5.7.3 Alcune applicazioni 318
5.8 Esercizi 323
5.9 Svolgimento degli esercizi 325

6 Integrali definiti **335**
6.1 Definizione di integrale definito 335
6.2 ✂ L'integrale di Riemann 339
6.3 Interpretazione geometrica e calcolo di aree 351
6.4 Il Teorema Fondamentale del calcolo integrale 354
6.5 Applicazioni 361
6.5.1 Volume di un solido di rotazione 362
6.5.2 Lunghezza di un arco di curva 363
6.5.3 Area di una superficie di rotazione 365
6.5.4 Applicazioni fisiche 368
6.6 ✂ Integrali impropri 369
6.7 ✂ Serie numeriche 381
6.7.1 Serie a termini non negativi 384
6.7.2 Convergenza semplice e assoluta 389
6.8 Esercizi 393
6.9 Svolgimento degli esercizi 395

7 Vettori, matrici e sistemi lineari **403**
7.1 Vettori applicati e vettori liberi 403
7.2 Lo spazio vettoriale $\mathbb{V}^n$ 408
7.3 Prodotto scalare e prodotto vettoriale 411
7.4 Spazi e sottospazi vettoriali 419
7.5 Dipendenza e indipendenza lineare 421
7.6 Matrici 428
7.7 Matrici quadrate: determinante e matrice inversa 436
7.8 Rango 446
7.9 Sistemi lineari 451

7.10 ✂ Il metodo di eliminazione di Gauss 459
7.11 ✂ Applicazioni lineari 463
7.12 ✂ Cambiamenti di base 470
7.13 ✂ Autovalori e autovettori 472
7.14 ✂ Qualche applicazione 476
7.14.1 Il tensore degli sforzi 476
7.14.2 Problema statico della trave 476
7.15 Esercizi 478
7.16 Svolgimento degli esercizi 483

8 Geometria del piano e dello spazio 497
8.1 Rette del piano 497
8.2 Coniche 501
8.3 Rette e piani dello spazio 506
8.4 Quadriche 512
8.5 Esercizi 520
8.6 Svolgimento degli esercizi 522

Tabelle riassuntive 527
Funzioni di base 527
Trigonometria 532
Limiti 534
Derivate 535
Integrali 536