ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA

GRAZIANO CRASTA

Notazioni. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ = insieme dei numeri naturali, $\mathbb{N}^+ = \mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}\setminus\{0\}$ = insieme dei numeri naturali positivi, $\mathbb{Z}$ = insieme degli interi relativi.
= esercizio difficile, = esercizio molto difficile.

Esercizio 1. Sia (x_n) una successione a termini positivi. Dimostrare che

$$\liminf_n \frac{x_{n+1}}{x_n} \le \liminf_n \sqrt[n]{x_n} \le \limsup_n \sqrt[n]{x_n} \le \limsup_n \frac{x_{n+1}}{x_n}\,.$$

Concludere che, se esiste $\lim_n \frac{x_{n+1}}{x_n} = L$, allora esiste anche $\lim_n \sqrt[n]{x_n} = L$.

Esercizio 2. Dimostrare che

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = e\,.$$

Esercizio 3 (Teorema di Cesaro–Stolz)**.** Siano (x_n) e (y_n) due successioni di numeri reali, con (y_n) strettamente monotona crescente e divergente a $+\infty$. Dimostrare che valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\liminf \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \le \liminf \frac{x_n}{y_n} \le \limsup \frac{x_n}{y_n} \le \limsup \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

Concludere che, se esiste $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = L$, allora esiste anche $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$ e vale L.

Esercizio 4. Dimostrare che

$$\lim_n \left[\prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\right]^{\frac{1}{n(n+1)}} = \sqrt{e}\,.$$

Esercizio 5 (Iterate di Gauss)**.** Siano $a_0, b_0 \ge 0$, e si considerino le successioni definite per ricorrenza da

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}\,, \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n\, b_n}\,, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Dimostrare che le due successioni convergono allo stesso limite; inoltre, con l'eventuale eccezione del primo termine, la successione (a_n) è monotona decrescente, mentre (b_n) è monotona crescente.

Esercizio 6 (Lemma di sub-additività)**.** Sia $(x_n)_n$ una successione tale che $x_{m+n} \le x_m + x_n$ per ogni $n, m \in \mathbb{N}$. Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n} = \inf_{n\ge1} \frac{x_n}{n}\,.$$

(In particolare il limite esiste finito oppure vale $-\infty$.)

Date: 11 febbraio 2014.

Esercizio 7. Sia $\sum a_n$ una serie convergente a termini non negativi.

(a) Dimostrare che, se esiste $\lim_n na_n$, allora tale limite è nullo.
(b) Mostrare, con un esempio, che può succedere che la successione (na_n) non ammetta limite.

Esercizio 8 (Criterio di convergenza di Raabe)**.** Sia data una serie $\sum a_n$ a termini positivi. Si dimostri che:

(a) se $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\le 1$ definitivamente, allora $\sum a_n$ è divergente;
(b) se esiste $c>1$ tale che $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\ge c$ definitivamente, allora $\sum a_n$ è convergente.

Esercizio 9. Determinare il carattere della serie $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}$ al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$, dove

$$\binom{\alpha}{n}:=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\,,\qquad n\in\mathbb{N},$$

sono i coefficienti binomiali generalizzati.

Esercizio 10 (Criterio di convergenza di Kummer)**.** Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi. Si dimostri che:

(a) se esistono una successione di numeri positivi (t_n) ed un numero $c>0$ tali che:
$$t_n\,\frac{a_n}{a_{n+1}}-t_{n+1}\ge c$$
definitivamente, allora la serie $\sum a_n$ converge;
(b) se esiste una successione di numeri positivi (t_n) tale che:
$$t_n\,\frac{a_n}{a_{n+1}}-t_{n+1}\le 0$$
definitivamente e $\sum 1/t_n$ diverge, allora la serie $\sum a_n$ diverge.

Osservazione: per $t_n=n$ si ha il criterio di Raabe enunciato nell'Esercizio 8.

Esercizio 11. Sia (p_n) una successione a termini positivi, strettamente crescente e divergente a $+\infty$. Dimostrare che, se $\sum a_n$ è una serie convergente, allora

$$\lim_n\frac{1}{p_n}\sum_{k=1}^{n}p_ka_k=0.$$

Esercizio 12. Dimostrare che, per ogni $n\ge 1$, esiste $\theta_n\in(0,1)$ tale che

$$e=s_n+\frac{\theta_n}{n!\cdot n}\,,\qquad \text{con } s_n:=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\,.$$

Dimostrare inoltre che $\lim_n\theta_n=1$.

Esercizio 13. Dimostrare che

$$\lim_n n\sin(2\pi en!)=2\pi.$$

Esercizio 14. Dimostrare che la successione

$$a_n:=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n$$

è monotona decrescente e positiva. (Di conseguenza (a_n) è convergente; il suo limite viene indicato con $\gamma = 0.5772156649\ldots$ ed è detto *Costante di Eulero–Mascheroni*.)

Esercizio 15. Sia (x_n) una successione di numeri non negativi, tali che

$$x_{n+1} \le x_n + \frac{1}{n^2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Dimostrare che tale successione è convergente.

Esercizio 16 (Densità naturale)**.** Sia $A \subset \mathbb{N}^+$ un sottoinsieme dei numeri naturali positivi. Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ indichiamo con $|A_n|$ la cardinalità dell'insieme $A_n := A \cap [1, n]$. Diremo che A ha *densità naturale* pari a $d(A) \in [0, 1]$ se esiste il limite

$$d(A) = \lim_n \frac{|A_n|}{n}.$$

Dimostrare che, se $\sum_{k \in A} \frac{1}{k}$ è convergente, allora $d(A) = 0$.

Esercizio 17. Sia $\alpha > 0$ un numero irrazionale. Dimostrare che l'insieme

$$P := \{\alpha n \bmod 1 : \ n \in \mathbb{N}\}$$

è denso in $[0, 1]$ (si ricordi che $x \bmod 1$ è la parte frazionaria del numero reale x).

In realtà vale un risultato più forte (che richiede una dimostrazione che va oltre gli strumenti di Analisi I): la successione $(\alpha n \bmod 1)$ è *equidistribuita* in $[0, 1]$, vale a dire, per ogni $[a, b] \subseteq [0, 1]$ si ha

$$\lim_n \frac{|\{k \in \{1, \ldots, n\} : \ \alpha k \bmod 1 \in [a, b]\}|}{n} = b - a$$

(si veda [1]).

Esercizio 18. Dimostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\cos n}}$$

è divergente.

Suggerimento: l'insieme $P := \{\lfloor (2n+1)\pi \rfloor : \ n \in \mathbb{N}^+\}$ ha densità naturale positiva (qui $\lfloor x \rfloor$ denota la parte intera del numero reale x).

Esercizio 19. Sia A il sottoinsieme di $\mathbb{N}^+$ di tutti gli interi positivi non contenenti la cifra 9 nella loro rappresentazione decimale. Dimostrare che la serie $\sum_{a \in A} \frac{1}{a}$ è convergente.

Esercizio 20. Dimostrare che gli intervalli $[0, 1]$ e $(0, 1)$ sono equipotenti, costruendo una biiezione $f \colon [0, 1] \to (0, 1)$.

Esercizio 21. Sia (X, d) uno spazio metrico ed S un sottoinsieme connesso di X contenente almeno due punti. Dimostrare che S è più che numerabile.

Esercizio 22 (Lemma di Baire)**.** Sia data una famiglia $C_n \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, di sottoinsiemi chiusi di $\mathbb{R}$ a interno vuoto (vale a dire senza punti interni). Posto $C = \bigcup_n C_n$, dimostrare che anche C ha interno vuoto. Dedurre anche che, se $A_n \subset \mathbb{R}$ è aperto e denso per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $\bigcap A_n$ è un insieme denso in $\mathbb{R}$ (in particolare non è vuoto).

Esercizio 23 (Insiemi G_δ)**.** Un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è detto *insieme* G_δ se è l'intersezione di una famiglia numerabile di insiemi aperti. Dimostrare che Q non è un insieme G_δ.

Esercizio 24. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$ definiamo

$$\omega_\delta(x) := \sup\{|f(y) - f(z)| : \ y, z \in (x-\delta, x+\delta)\}$$

e l'*oscillazione di f in x*

$$\omega(x) := \inf_{\delta>0} \omega_\delta(x) = \lim_{\delta\to 0+} \omega_\delta(x).$$

Dimostrare che:

(a) f è continua in x se e solo se $\omega(x) = 0$;
(b) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, il sottolivello $\{x \in \mathbb{R} : \ \omega(x) < \alpha\}$ è aperto (in altri termini, la funzione ω è semicontinua superiormente);
(c) l'insieme $\mathrm{cont}(f)$ dei punti di continuità di f è un insieme G_δ (vale a dire, è l'intersezione di una famiglia numerabile di aperti);
(d) non si può avere $\mathrm{cont}(f) = \mathbb{Q}$;
(e) esiste $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\mathrm{cont}(f) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Esercizio 25. Siano $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Dimostrare che

$$(a) \quad \sum_{i=1}^n |x_i| \le \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\,, \qquad (b) \quad \sum_{i=1}^n |x_i| \le \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^{2/3}} \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^{4/3}}\,.$$

Esercizio 26. Siano $x_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, tali che $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Dimostrare che

$$\sum_{i=1}^n \left(x_i + \frac{1}{x_i}\right)^2 \ge n^3 + 2n + \frac{1}{n}\,.$$

Esercizio 27. Un uomo in bicicletta percorre un tragitto di 77km in 7h; dimostrare che esiste un intervallo di un'ora dove ha percorso esattamente 11km.

Esercizio 28. Un uomo percorre un tragitto di T km in T ore. Dimostrare che, per ogni $\tau \in (0, T/2]$, esiste un intervallo di τ ore durante il quale ha percorso esattamente τ km. Mostrare, con un esempio, che se invece $\tau \in (T/2, T)$ non è detto che questo avvenga.

Esercizio 29. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua additiva, cioè tale che

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Dimostrare che f è una funzione lineare.

Esercizio 30 (Difficile)**.** Dimostrare che esistono funzioni non lineari $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $f(x+y) = f(x) + f(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.
Suggerimento: si usi il fatto che $\mathbb{R}$ può essere visto come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$, e che come tale ammette una base di Hamel.

Esercizio 31. Caratterizzare le funzioni continue $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

(a) $f(x)f(-x) = 1$;
(b) $\lim_{h\to+\infty} f(x+h)f(x-h) = f(x)^2$.

Esercizio 32 (Congettura di Toeplitz)**.** Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in (0,1)$ e $f(0) = f(1) = 0$. Diremo che un quadrato è inscritto nel grafico di f se esso ha due vertici sull'asse delle x e gli altri due sul grafico di f. Dimostrare che esiste almeno un quadrato inscritto nel grafico di f.

Esercizio 33. Dimostrare che una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$, con I intervallo, è uniformemente continua se e solo se esiste una funzione (detta *modulo di continuità*) $\omega\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ tale che

$$\lim_{r\to 0+} \omega(r) = 0 = \omega(0), \qquad |f(x) - f(y)| \le \omega(|x-y|) \quad \forall x, y \in I.$$

Si dimostri che, in tal caso, la funzione ω può essere scelta continua e monotona non decrescente.

Esercizio 34. Dati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, si dimostri che la funzione

$$f(x) := \begin{cases} \exp(1/[(x-a)(x-b)]), & \text{se } x \in (a,b), \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus (a,b), \end{cases}$$

ammette derivate di ogni ordine.

Esercizio 35 (Prodotto di convoluzione)**.** Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione localmente integrabile (cioè integrabile su ogni intervallo compatto), e sia $\rho\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 a supporto compatto (per un esempio di funzione di questo tipo si veda l'Esercizio 34). Definiamo il *prodotto di convoluzione*

$$(f * \rho)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\rho(y)\,dy, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Si dimostri che la funzione $f * \rho$ è derivabile e che $(f * \rho)' = f * \rho'$.
(Suggerimento: osservare che ρ' è uniformemente continua.)

Esercizio 36. Sia $\rho\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ una funzione continua, non negativa, con supporto contenuto in $[-1,1]$ e $\int_{-1}^{1} \rho = 1$. Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ si definisca $\rho_n(x) := n\,\rho(nx)$, $x \in \mathbb{R}$. Dimostrare che, per ogni funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} (f * \rho_n)(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(y)\,\rho_n(x-y)\,dy = f(x) \qquad \forall x \in (a,b).$$

Cosa succede per $x = a$ o $x = b$?

Esercizio 37. Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1/q, & \text{se } x = p/q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^+,\ \gcd(p,q) = 1, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si dimostri che f è continua in x se e solo se x è irrazionale oppure $x = 0$.

Esercizio 38. Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, derivabile in (a,b) e tale che $f(a) = f(b) = 0$. Dimostrare che, per ogni $k \in \mathbb{R}$, esiste $\xi = \xi(k) \in (a,b)$ tale che $f'(\xi) = k\,f(\xi)$.

Esercizio 39 (Lemma delle tre corde)**.** Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, una funzione convessa. Si dimostri che, se $x_1, x_2, x_3 \in I$ sono tali che $x_1 < x_2 < x_3$, allora

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

e si dia un'interpretazione geometrica di queste disuguaglianze. Da ciò dedurre che, in particolare, per $x \in I \setminus [x_1, x_2]$ il grafico di f non giace mai al di sotto della retta passante per i punti $P_1 = (x_1, f(x_1))$ e $P_2 = (x_2, f(x_2))$.

Esercizio 40. Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione convessa, con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto.

(a) Dimostrare che f ammette in ogni punto derivata destra e sinistra (dunque, in particolare, è continua) e che, se $x, y \in I$, $x < y$, allora

$$f'_-(x) \le f'_+(x) \le \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le f'_-(y) \le f'_+(y)\,. \tag{2}$$

(b) Dimostrare che, se $x \in I$ e $p \in [f'_-(x), f'_+(x)]$, allora $f(y) \ge f(x) + p(y-x)$ per ogni $y \in I$.

Esercizio 41 (Disuguaglianza di Jensen)**.** Sia $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Dimostrare che

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(x))\,dx\,.$$

Esercizio 42. Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e siano $f, g\colon I \to [0,+\infty)$ due funzioni convesse, non negative, entrambe monotone crescenti (oppure entrambe monotone decrescenti). Dimostrare che la funzione $h := f \cdot g$ è convessa.

Esercizio 43. Sia $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2, tale che $f, f', f'' \ge 0$ e $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f'(2) = 4$. Dimostrare che

$$[f(x)f(x+1)+8]\cdot[f(x)f(2x)+12] \ge 192x^2 \qquad \forall x \in (0,+\infty).$$

Esercizio 44. Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $[a,b] \subset (0,+\infty)$, una funzione concava, tale che

$$\lambda := \frac{f(a)}{a} = \frac{f(b)}{b} \ge 0.$$

Dimostrare che

$$\frac{f(b)-f(a)}{\log b - \log a} \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Esercizio 45. Sia $f \in C^2([0,1])$ tale che $\int_0^1 f(x)dx = 2\int_{1/4}^{3/4} f(x)dx$. Dimostrare che esiste un punto $x_0 \in (0,1)$ tale che $f''(x_0) = 0$.

Esercizio 46. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suriettiva e tale che per ogni $(x_n) \subset \mathbb{R}$ non convergente, $(f(x_n))$ sia non convergente. Provare che f è continua.

Esercizio 47. Siano $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni continue e almeno due volte derivabili che godano delle seguenti proprietà:

(a) $f'(x) = g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
(b) $g'(x) = -f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
(c) $f(0) = 0$, $g(0) = 1$.

Mostrare, senza fare uso della teoria delle equazioni differenziali, che:

(i) $f(x)^2 + g(x)^2 = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
(ii) detto $\alpha > 0$ un numero reale tale che $g(x) > 0$ in $[0,\alpha)$, si ha che

$$f(x) \le x \le \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \forall x \in [0,\alpha).$$

Esercizio 48. Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione monotona crescente [risp. decrescente]. Dimostrare che la funzione integrale $F(x) := \int_a^x f$ è convessa [risp. concava] in $[a,b]$.

Esercizio 49. Sia $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ una funzione tale che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty.$$

Si dimostri che f non è convessa.

Esercizio 50. Siano date due funzioni $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, con f monotona decrescente e g monotona crescente. Si assuma inoltre che $\int_0^1 f = \int_0^1 g$. Dimostrare che

$$y\int_0^x f \geq x\int_0^y g \qquad \forall x, y \in [0,1].$$

Esercizio 51. Caratterizzare le funzioni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivabili con derivata continua, soddisfacenti

$$(x-y)\,(f(x)-1)^2 = -\,(x+y)\,(f(x)-f(y))\left(e^{f'(x)}-1\right) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R},\ |x| < y.$$

Esercizio 52. Caratterizzare le funzioni $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, derivabili con derivata continua, soddisfacenti

$$0 < f'(x) \leq 1, \quad \forall x \in [0,1], \qquad f(0) = 0, \qquad \int_0^1 f^2 = \frac{f(1)^3}{3}.$$

Esercizio 53. Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, derivabile in (a,b), tale che $f(a) \cdot f(b) \neq 0$. Sia $Z := \{x \in (a,b) :\ f(x) = 0\}$ l'insieme degli zeri di f, e supponiamo che $f'(z) \neq 0$ per ogni $z \in Z$. Si dimostri che:

(a) Z è un insieme finito (eventualmente vuoto);
(b) se $Z = \{z_1, \dots, z_n\}$, con $z_1 < z_2 < \cdots < z_n$ ed $n \geq 2$, allora $f'(z_j) \cdot f'(z_{j+1}) < 0$ per ogni $j = 1, \dots, n-1$;
(c) posto
$$d := \sum_{z\in Z} \operatorname{sign} f'(z) \qquad (d := 0 \text{ se } Z = \emptyset)$$
si ha $d \in \{-1, 0, 1\}$;
(d) se $d \neq 0$, allora f ha almeno uno zero, cioè $Z \neq \emptyset$.

Esercizio 54. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile, soddisfacente

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{|x|} = +\infty. \tag{3}$$

Dimostrare che $f'(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (cioè che f' è suriettiva).

Esercizio 55. Stabilire se la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

ammette primitive, vale a dire, se esiste una funzione $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile tale che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 56. Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x^2}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Dopo aver verificato che f è illimitata in ogni intorno dell'origine, si dimostri che f ammette primitive, vale a dire, esiste una funzione $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile tale che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 57. Sia $f \in C^1([0,+\infty))$ e supponiamo che $\int_0^{+\infty} |f'(x)|\,dx < +\infty$. Dimostrare che

(a) esiste finito $\lim_{x\to+\infty} f(x)$;
(b) l'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ è convergente se e solo se la serie numerica $\sum_n f(n)$ è convergente.

Esercizio 58. Sia $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ una funzione continua e decrescente, integrabile in senso generalizzato in $[0,+\infty)$. Si consideri la funzione

$$g(y) := \sum_{n=0}^{\infty} f(y+n), \qquad y \in [0,1].$$

Si dimostri che g è continua e monotona decrescente in $[0,1]$, e che esiste $y \in [0,1]$ tale che $g(y) = \int_0^{+\infty} f$.

Esercizio 59. (a) Dimostrare che la funzione $g(x) := (\sin x)/x$ è integrabile in senso generalizzato in $[1,+\infty)$.

(b) Dimostrare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\sqrt{n}}{n}$ è convergente

Esercizio 60. Fissato $\lambda \in [-1,1]$, sia

$$\mathcal{F}_\lambda := \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} :\ |f(x)-f(y)| \le |x-y|\ \forall x,y \in [0,1],\ f(0)=0,\ f(1)=\lambda\}.$$

Calcolare

$$I_\lambda := \sup\left\{ \int_0^1 f(x)\,dx :\ f \in \mathcal{F}_\lambda \right\}.$$

Esercizio 61. Sia data una successione $f_j\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, di funzioni monotone crescenti. Si supponga che:

(a) la successione sia equilimitata, cioè esiste $M > 0$ tale che $|f_j(x)| \le M$ per ogni $x \in [a,b]$ e per ogni $j \in \mathbb{N}$;
(b) la successione sia monotona crescente, cioè $f_j(x) \le f_{j+1}(x)$ per ogni $x \in [a,b]$ e per ogni $j \in \mathbb{N}$.

Dimostrare che la successione converge puntualmente in $[a,b]$ ad una funzione f, anch'essa monotona crescente, e che

$$\lim_{j\to+\infty} \int_a^b f_j(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Esercizio 62. Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso e non vuoto. Definiamo la funzione *distanza da* C

$$d_C(x) := \inf_{y\in C} |x-y|, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Si dimostri che l'estremo inferiore nella definizione di d_C è sempre raggiunto; si dimostri inoltre che d_C è una funzione 1-Lipschitziana, cioè che

$$|d_C(x) - d_C(y)| \le |x-y| \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}^n.$$

Esercizio 63. Sia $C \subset \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso e non vuoto, e sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto contenente C, $A \neq \mathbb{R}^n$. Si dimostri che esiste una funzione continua $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$ che vale 0 in C e 1 nel complementare di A, mentre è strettamente compresa fra 0 e 1 negli altri punti (Questo mostra, in particolare, che dato un qualsiasi insieme chiuso $C \subset \mathbb{R}^n$ esiste una funzione continua f tale che C coincide con l'insieme degli zeri di f.)

Esercizio 64. Siano $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni localmente integrabili, con $g(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$. Sia inoltre $\rho\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ una funzione non negativa, a supporto compatto, integrabile con $\int \rho > 0$. Dimostrare che, se esiste $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$, allora esiste anche il limite

$$\lim_{r\to 0} \frac{\int f(ry)\rho(y)dy}{\int g(ry)\rho(y)dy}$$

e vale anch'esso L.

Esercizio 65. Sia $f\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile, tale che

$$f(1) = 1, \qquad f'(x) = \frac{1}{x^2 + f(x)^2} \quad \forall x \geq 1.$$

Dimostrare che esiste finito $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ed è strettamente compreso fra 1 e $1 + \pi/4$.

Esercizio 66. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione non decrescente, non costante. Dimostrare che esistono $a \in \mathbb{R}$ e $c > 0$ tali che

$$f(a + x) - f(a - x) \geq c\, x \qquad \forall x \in [0, 1].$$

Esercizio 67 (Principio del Massimo)**.** Sia $a\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua strettamente positiva, e sia $u\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, di classe C^2 in $(0, 1)$, tale che $u''(x) = a(x)\, u(x)$ per ogni $x \in (0, 1)$. Dimostrare che

(a) se $x_0 \in (0, 1)$ è un punto di massimo relativo di u, allora $u(x_0) \leq 0$; analogamente, se $x_0 \in (0, 1)$ è un punto di minimo relativo di u, allora $u(x_0) \geq 0$;
(b) se $u(0) = u(1) = 0$, allora u è identicamente nulla.

Esercizio 68. Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, derivabile in (a, b), tale che $f(a) = 0$ e $|f'(x)| \leq A|f(x)|$ per ogni $x \in (a, b)$, con A costante positiva. Dimostrare che f è identicamente nulla.

Esercizio 69. Sia $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, tale che

$$D^+ f(x) := \limsup_{y\to x+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0 \qquad \forall x \in [0, 1)\,.$$

Dimostrare che f è monotona non decrescente.

Esercizio 70. Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile, con derivata f' Riemann–integrabile in $[a, b]$. Dimostrare che

$$\int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a)\,.$$

Esercizio 71. Sia $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ una funzione monotona decrescente, integrabile in senso generalizzato. Dimostrare che

$$\lim_{x\to+\infty} x\, f(x) = 0.$$

Esercizio 72 (Funzioni sub-armoniche)**.** Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua, tale che

$$f(x) \leq \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\, dt \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ h > 0.$$

Dimostrare che

(a) il massimo di f in ogni intervallo compatto $[a, b]$ viene raggiunto agli estremi;
(ii) f è convessa.

Riferimenti bibliografici

[1] L. Kuipers and H. Niederreiter, Uniform distribution of sequences, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1974, Pure and Applied Mathematics. MR 0419394 (54 #7415)