EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

GRAZIANO CRASTA

Note per il corso di *Analisi Matematica I*, a.a. 2016/17
(versione preliminare del 23 maggio 2017)

Indice

1. Introduzione

Un'equazione differenziale è una relazione del tipo

$$F(t, x, x', x'', \dots, x^{(k)}) = 0, \qquad F\colon A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}, \tag{1}$$

che lega una funzione incognita ad alcune sue derivate.

Più precisamente, diremo che la funzione $u\colon I \to \mathbb{R}$, dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo non banale, è una soluzione dell'equazione differenziale (1) se

(a) u è derivabile almeno k volte nell'intervallo I;
(b) $(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(k)}(t)) \in A$ per ogni $t \in I$;
(c) $F(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(k)}(t)) = 0$ per ogni $t \in I$.

Si chiama **ordine** di un'equazione differenziale l'ordine massimo k delle derivate di u che vi compaiono. Diremo inoltre che l'equazione è in **forma normale** se la derivata di ordine massimo può essere esplicitata, cioè se l'equazione può essere scritta come

$$x^{(k)} = f(t, x, x', \dots, x^{(k-1)}), \qquad f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}. \tag{2}$$

Nel seguito tratteremo solo equazioni differenziali in forma normale.

Prima di procedere oltre vediamo qualche esempio.

Esempio 1.1 (Primitive)**.** Assegnata una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ definita in un certo intervallo I, le soluzioni dell'equazione differenziale

$$x' = f(t)$$

sono le primitive della funzione f. In particolare, se f è una funzione continua in I, allora l'equazione differenziale ammette infinite soluzioni (che differiscono una dall'altra per una costante additiva). Se invece, ad esempio, f è una funzione con una discontinuità di tipo salto, allora essa non ammette primitive (dal momento che una derivata soddisfa la proprietà di Darboux). Già questo semplice esempio ci mostra che, se il secondo membro f dell'equazione in forma normale (2) non è una funzione continua, non possiamo in generale aspettarci che l'equazione abbia soluzioni. $\triangleleft$

Esempio 1.2. Consideriamo l'equazione differenziale del primo ordine

$$x' = x. \tag{3}$$

Le soluzioni, per definizione, sono funzioni derivabili su un intervallo con derivata coincidente con la funzione stessa. È facile quindi immaginare che le funzioni del tipo $u(t) = c\,e^t$, $t \in \mathbb{R}$, sono soluzioni di (3) per ogni scelta della costante $c \in \mathbb{R}$.

In questo caso è anche facile dimostrare che queste sono le uniche soluzioni (a meno del dominio, si veda la seguente Osservazione 1.3). Se infatti $v\colon I \to \mathbb{R}$ è una qualsiasi soluzione di (3), abbiamo che

$$\frac{d}{dt}(e^{-t}v(t)) = -e^{-t}v(t) + e^{-t}v'(t) = -e^{-t}v(t) + e^{-t}v(t) = 0, \qquad \forall t \in I.$$

Poiché I è un intervallo, deduciamo che la funzione $e^{-t}v(t)$ è costante in I, cioè esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $v(t) = c\,e^t$ per ogni $t \in I$. $\triangleleft$

Osservazione 1.3. La funzione $v(t) = e^t$, $t \in (-1, 1)$, è per definizione una soluzione dell'equazione differenziale $x' = x$. Tuttavia, osserviamo che v è la restrizione all'intervallo $(-1, 1)$ della funzione $u(t) = e^t$, $t \in \mathbb{R}$, che è anch'essa soluzione della medesima equazione differenziale. Diremo, in questo caso, che u è un **prolungamento** di v; diremo anche

che u è una **soluzione massimale**, poiché non può essere ulteriormente prolungata (dal momento che è già definita su tutto $\mathbb{R}$).

Esempio 1.4 (Crescita delle popolazioni)**.** Indichiamo con $u(t)$ la popolazione di una data specie al tempo $t \geq 0$. Si chiama *tasso di crescita* r della popolazione il rapporto fra la variazione della popolazione e la popolazione stessa, vale a dire

$$\text{tasso di crescita} = \frac{u'(t)}{u(t)} = r.$$

In generale r dipenderà dal tempo t e dalla popolazione stessa.

Il caso più semplice è quello in cui $r \equiv \alpha$ è costante. In tal caso l'andamento nel tempo della popolazione è una soluzione dell'equazione differenziale $x' = \alpha\, x$. Inoltre, se è nota la popolazione x_0 al tempo $t = 0$, avremo che u è una soluzione del **Problema di Cauchy**

$$\begin{cases} x' = \alpha\, x, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{4}$$

Risolvere tale problema consiste nel determinare le soluzioni u dell'equazione differenziale, definite in un intervallo contenente il punto $t_0 = 0$, tali che $u(t_0) = x_0$. Vediamo subito che una tale soluzione è $u(t) = x_0\, e^{\alpha t}$, $t \in \mathbb{R}$. Ragionando come nell'Esempio 1.2 possiamo inoltre dimostrare che questa è l'unica soluzione del Problema di Cauchy (4). $\lhd$

Esempio 1.5 (Equazione logistica)**.** Il modello di crescita trattato nell'Esempio 1.4 prevede che una popolazione cresca indefinitamente in maniera esponenziale. In natura questo non è verosimile (se non per tempi brevi), dal momento che entrerà in gioco il fatto che le risorse (cibo, spazio vitale, etc.) sono limitate.

A tale proposito, nei modelli ecologici si introduce la *capacità portante dell'ambiente* (*carrying capacity*), che è un valore $C_0 > 0$ tale per cui il tasso di crescita r diventa negativo quando la popolazione supera questo valore.

Il caso più semplice consiste nel prendere $r = \beta(C_0 - x)$ affine, con $\beta > 0$. Se poniamo $\alpha := \beta\, C_0$ otteniamo quindi l'equazione differenziale

$$x' = \alpha\, x - \beta\, x^2$$

che è detta **equazione logistica**. Studieremo esplicitamente le soluzioni di questa equazione nel Paragrafo 4. Vedremo, in particolare, che la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = \alpha\, x - \beta\, x^2, \\ x(0) = x_0 > 0, \end{cases}$$

tende sempre monotonamente a C_0 per $t \to +\infty$, in maniera crescente se $x_0 < C_0$, decrescente se $x_0 > C_0$. È inoltre immediato verificare che la funzione costante $u(t) \equiv C_0$ è la soluzione relativa al dato iniziale $x_0 = C_0$, in quanto $\alpha - \beta\, C_0 = 0$ (dunque il secondo membro dell'equazione è nullo quando calcolato in $u(t)$). Una soluzione costante è detta anche *equilibrio* dell'equazione. $\lhd$

Esempio 1.6 (Oscillatore armonico)**.** Supponiamo che una particella vincolata a muoversi lungo una retta sia soggetta a una forza esterna F (diretta come la retta stessa) dipendente solo dalla posizione x della particella. Per il secondo principio della dinamica ($F = m\, a$), avremo che la posizione soddisfa l'equazione differenziale del secondo ordine

$$x'' = f(x), \qquad \text{con } f(x) := \frac{1}{m}\, F(x)\,.$$

Un caso piuttosto semplice è quello della forza elastica che, secondo la legge di Hooke, è data da $F = -k\,x$, dove $k > 0$ è la costante elastica della molla. L'equazione diviene dunque $x'' = -(k/m)x$ che, ponendo $\omega^2 = k/m$, può essere riscritta nella forma

$$x'' + \omega^2 x = 0. \tag{5}$$

(La quantità positiva $\omega := \sqrt{k/m}$ è detta *pulsazione* del moto.) È facile verificare che le funzioni $u_1(t) = \sin(\omega t)$ e $u_2(t) = \cos(\omega t)$, $t \in \mathbb{R}$, siano entrambe soluzioni di (5). Inoltre, sfruttando la linearità dell'equazione rispetto a x e x'', si vede subito che anche le combinazioni lineari del tipo

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

sono soluzioni di (5). (Vedremo nel Paragrafo 5 che queste sono anche le uniche soluzioni dell'equazione.) In particolare le soluzioni sono periodiche di periodo $T = 2\pi/\omega$. $\lhd$

Un'osservazione fondamentale sull'equazione (5), che in generale riguarda tutte le equazioni del secondo ordine, è la seguente. Se indichiamo con x_1 la posizione e con x_2 la velocità della particella, ovvero se poniamo $x_1 = x$ e $x_2 = x'$, l'equazione (5) si può riscrivere come

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -\omega^2 x_1, \end{cases} \tag{6}$$

vale a dire come un sistema di due equazioni differenziali, nelle due funzioni incognite x_1 e x_2.

Nel caso di sistemi autonomi (cioè tali che le funzioni a secondo membro non dipendono esplicitamente dal tempo) in due incognite le soluzioni vengono spesso disegnate nel **piano delle fasi** (x_1, x_2), ovvero (x, x') nelle notazioni originali. (Nel piano delle fasi sarà ovviamente possibile disegnare solo l'immagine delle soluzioni.) La rappresentazione geometrica delle traiettorie nel piano delle fasi è detto **ritratto di fase** (*phase portrait*) dell'equazione.

Ad esempio, nel caso del sistema (6) il ritratto di fase è costituito dalle ellissi di equazione

$$\omega^2 x_1^2 + x_2^2 = k$$

al variare di $k \geq 0$ (si veda la Figura 1 a sinistra). Infatti, se $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t))$ è una soluzione del sistema, abbiamo che

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[\omega^2 u_1^2(t) + u_2^2(t)\right] &= 2\omega^2 u_1(t) u_1'(t) + 2u_2(t) u_2'(t) \\ &= 2\omega^2 u_1(t) u_2(t) + 2u_2(t)[-\omega^2 u_1(t)] = 0, \end{aligned}$$

dunque la funzione di due variabili $V(x_1, x_2) := \omega^2 x_1^2 + x_2^2$ è costante lungo le traiettorie. (Naturalmente occorre dimostrare che queste ellissi vengono completamente percorse dalle soluzioni del sistema, ma di questo ci occuperemo in seguito.) Come abbiamo già detto, le soluzioni di (6) sono periodiche; questo si traduce nel fatto che nel ritratto di fase le orbite sono chiuse.

Più in generale, se partiamo da un'equazione del secondo ordine del tipo $x'' = f(t, x, x')$, con la medesima posizione otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -f(t, x_1, x_2). \end{cases}$$

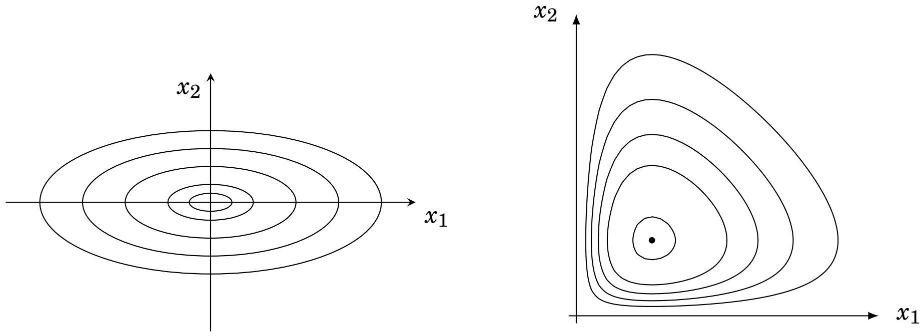

FIGURA 1. Ritratto di fase per l'oscillatore armonico e il sistema di Lotka–Volterra

Se sono note la posizione x_0 e la velocità v_0 al tempo iniziale t_0, ci riconduciamo allo studio del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -f(t, x_1, x_2), \\ x_1(t_0) = x_0, \\ x_2(t_0) = v_0. \end{cases}$$

Come vediamo, nella formulazione del Problema di Cauchy dobbiamo assegnare una condizione iniziale, a un prefissato tempo t_0, per ogni funzione incognita.

I sistemi che si ottengono in questo modo da equazioni del secondo ordine sono molto particolari, dal momento che la prima equazione è sempre $x_1' = x_2$. Più in generale, si possono considerare sistemi di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine del tipo

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ x_2' = f_2(t, x_1, \dots, x_n), \\ \dots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \dots, x_n), \end{cases} \tag{7}$$

con $f_1, \dots, f_n \colon \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Con notazione vettoriale, possiamo scrivere

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \qquad \mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n) \colon \Omega \to \mathbb{R}^n,$$

cosicché il sistema (7) verrà scritto semplicemente come

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \qquad \mathbf{f} \colon \Omega \to \mathbb{R}^n.$$

(Osserviamo che può essere conveniente pensare i vettori $\mathbf{x}$ ed $\mathbf{f}$ come vettori colonna.)

In particolare, i sistemi in cui le funzioni $f_1, \dots, f_n$ sono tutte lineari nelle variabili $x_1, \dots, x_n$ vengono detti *sistemi lineari (omogenei) di equazioni differenziali*. Ad esempio, il sistema (6) può essere riscritto come

$$\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x}, \qquad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Concludiamo questa presentazione con un sistema in dimensione 2 che non si ottiene a partire da un'equazione del secondo ordine.

Esempio 1.7 (Modello di Lotka–Volterra)**.** Il modello di Lotka–Volterra costituisce uno dei primi tentativi per descrivere la dinamica di sistemi biologici in cui c'è l'interazione fra due specie, una di prede e una di predatori.

Le ipotesi di base dei modelli predatore–preda sono le seguenti:

(a) in assenza di predatori, le prede hanno un tasso di crescita costante $\alpha > 0$;
(b) in assenza di prede, i predatori hanno un tasso di crescita costante negativo, o meglio un tasso di mortalità costante $\gamma > 0$;
(c) la presenza contemporanea delle due specie comporta una riduzione delle prede proporzionale al numero di incontri fra le due specie, e una crescita dei predatori sempre proporzionale al numero di incontri.

Indicate con x_1 e x_2, rispettivamente, la popolazione delle prede e dei predatori, il numero di incontri fra le due specie è proporzionale a $x_1 x_2$; otteniamo dunque un sistema autonomo del tipo

$$\begin{cases} x_1' = \alpha x_1 - \beta x_1 x_2, \\ x_2' = -\gamma x_2 + \delta x_1 x_2, \end{cases}$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$. Si verifica immediatamente che, nel quadrante $x_1 > 0, x_2 > 0$, i secondi membri delle due equazioni si annullano rispettivamente per $x_2 = \alpha/\beta$ e $x_1 = \gamma/\delta$; ne segue che la funzione

$$\mathbf{u}(t) := \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right), \qquad t \in \mathbb{R},$$

è una soluzione costante (cioè un equilibrio) del sistema. Con un calcolo analogo a quello fatto per l'oscillatore armonico si può inoltre dimostrare che, nel quadrante $x_1 > 0, x_2 > 0$, la funzione

$$V(x_1, x_2) = \gamma \log x_1 - \beta\, x_2 - \delta\, x_1 + \alpha \log x_2$$

è costante lungo le soluzioni. In particolare si può dimostrare che le soluzioni sono periodiche; il ritratto di fase è illustrato in Figura 1 a destra. $\lhd$

2. Definizioni

Nel seguito Ω denoterà un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Un generico punto di Ω verrà indicato con $(t, \mathbf{x})$, dove $t \in \mathbb{R}$ rappresenta una variabile temporale mentre $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ rappresenta una variabile spaziale.

Definizione 2.1. Sia $\mathbf{f} \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ e sia $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$. Diremo che una funzione $\mathbf{u} \colon I \to \mathbb{R}^n$, dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo non banale, è una soluzione dell'equazione differenziale $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ se

(a) $(t, \mathbf{u}(t)) \in \Omega$ per ogni $t \in I$;
(b) $\mathbf{u}$ è derivabile in I;
(c) $\mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t))$ per ogni $t \in I$.

Inoltre, diremo che $\mathbf{u}$ è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \tag{9}$$

se è una soluzione dell'equazione differenziale $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ e, in aggiunta, soddisfa la **condizione iniziale**

(d) $t_0 \in I$ e $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

In maniera più esplicita, posto $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$, l'equazione $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ si scrive come

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ x_2' = f_2(t, x_1, \dots, x_n), \\ \dots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

Per questo motivo, spesso parleremo di equazione differenziale scalare nel caso $n = 1$, mentre parleremo di sistema di equazioni differenziali se $n \geq 2$.

Se il secondo membro $\mathbf{f}$ dell'equazione non dipende esplicitamente dal tempo, diremo che l'equazione differenziale è autonoma.

Osservazione 2.2. Abbiamo già visto, nell'Esempio 1.1, che se la funzione $\mathbf{f}$ non è continua non possiamo aspettarci in generale che l'equazione differenziale $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ abbia soluzioni. Vedremo, quando discuteremo il Teorema 6.1 di Peano, che la continuità di $\mathbf{f}$ è una condizione sufficiente per garantire l'esistenza di soluzioni per il Problema di Cauchy (9).

Esempio 2.3 (Non unicità)**.** Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = 2\sqrt{|x|}\,, \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Si verifica immediatamente che la funzione identicamente nulla $u(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, è soluzione del problema (10). D'altra parte, anche la funzione derivabile $v(t) = t|t|$, $t \in \mathbb{R}$, è soluzione del problema (10); si ha infatti che $v'(t) = 2|t|$ e $2\sqrt{|v(t)|} = 2|t|$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Vedremo fra poco, nell'Esempio 2.5, che il problema di Cauchy (10) ammette infinite soluzioni. $\triangleleft$

Se $\mathbf{u}\colon I \to \mathbb{R}^n$ è una soluzione del problema di Cauchy (9), è chiaro che anche qualsiasi sua restrizione $\mathbf{v}\colon I_1 \to \mathbb{R}^n$, definita in un intervallo $I_1 \subseteq I$ contenente t_0, è anch'essa una soluzione. Poiché siamo interessati, oltre che all'esistenza di soluzioni, anche alla loro eventuale unicità, dovremo tenere conto di questa molteplicità in qualche modo artificiale.

Definizione 2.4. Sia $\mathbf{u}\colon I \to \mathbb{R}^n$ una soluzione del problema di Cauchy (9).

Diremo che $\mathbf{u}$ è l'unica soluzione locale di (9) se, data qualsiasi altra soluzione $\mathbf{v}\colon I_v \to \mathbb{R}^n$ di (9), si ha $\mathbf{v}(t) = \mathbf{u}(t)$ per ogni $t \in I \cap I_v$.

Diremo che $\mathbf{v}\colon I_v \to \mathbb{R}^n$ è un prolungamento di $\mathbf{u}$ se $\mathbf{v}$ è soluzione di (9), $I_v \supseteq I$ e $\mathbf{v}(t) = \mathbf{u}(t)$ per ogni $t \in I$; diremo inoltre che è un prolungamento non banale se I_v contiene propriamente I.

Diremo che $\mathbf{u}$ è una soluzione massimale di (9) se $\mathbf{u}$ non ammette alcun prolungamento non banale.

Chiameremo **integrale generale** dell'equazione differenziale $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ la famiglia di tutte le soluzioni massimali dei problemi di Cauchy (9) a essa associati, al variare di $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$.

Esempio 2.5. Consideriamo nuovamente il problema di Cauchy (10) discusso nell'Esempio (2.3). Le funzioni $u(t) = 0$ e $v(t) = t|t|$, $t \in \mathbb{R}$ sono entrambe soluzioni massimali (dal momento che sono definite su tutto $\mathbb{R}$). È possibile dimostrare che anche le funzioni sotto riportate sono tutte soluzioni massimali di (10), per ogni scelta di $a \leq 0$ e $b \geq 0$:

$$w(t) = \begin{cases} (t-a)|t-a|, & \text{se } t < a, \\ 0, & \text{se } a \leq t \leq b, \\ (t-b)|t-b|, & \text{se } t > b. \end{cases}$$

$$w(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq b, \\ (t-b)|t-b|, & \text{se } t > b, \end{cases} \qquad w(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \geq a, \\ (t-a)|t-a|, & \text{se } t < a, \end{cases} \qquad \triangleleft$$

3. Equazioni differenziali a variabili separabili

Le equazioni differenziali a variabili separabili sono equazioni differenziali scalari del tipo

$$x' = g(t)\, h(x),$$

dove $g\colon I \to \mathbb{R}$ e $h\colon J \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue, rispettivamente, negli intervalli $I, J \subset \mathbb{R}$, con I aperto. In particolare, il secondo membro dell'equazione $f(t,x) := g(t)\, h(x)$ è una funzione continua nel rettangolo $I \times J$.

Sia dunque $(t_0, x_0) \in I \times J$ e consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = g(t)\, h(x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \qquad g \in C(I),\ h \in C(J). \tag{11}$$

Se $h(x_0) = 0$, è immediato verificare che la funzione costante $u(t) = x_0$, $t \in I$, è una soluzione del problema di Cauchy. Infatti, si ha che $u'(t) = 0$ e $g(t)h(u(t)) = 0$ per ogni $t \in I$. Come abbiamo già osservato nell'Esempio 2.3, non è detto che questa soluzione costante sia l'unica soluzione del problema di Cauchy; vedremo più avanti come individuare eventuali altre soluzioni.

Consideriamo ora il caso $h(x_0) \neq 0$. Sia $\widetilde{J} \subseteq J$ la componente connessa dell'insieme $\{x \in J :\ h(x) \neq 0\}$ contenente x_0; in altri termini, $\widetilde{J}$ è il più grande intervallo contenuto in J tale che $x_0 \in \widetilde{J}$ e $h(x) \neq 0$ per ogni $x \in \widetilde{J}$.

Cominciamo dimostrando il seguente risultato.

Proposizione 3.1. *Sia $u\colon I_u \to \mathbb{R}$ una soluzione del problema di Cauchy (11), e supponiamo $h(x_0) \neq 0$. Allora esiste un intervallo $\widetilde{I} \subseteq I_u$ contenente t_0 tale che $u(t) \in \widetilde{J}$ per ogni $t \in \widetilde{I}$ e*

$$H(u(t)) = G(t), \qquad \forall t \in \widetilde{I}, \tag{12}$$

dove $H\colon \widetilde{J} \to \mathbb{R}$ e $G\colon I \to \mathbb{R}$ sono le funzioni definite da

$$H(x) := \int_{x_0}^{x} \frac{1}{h(\xi)}\, d\xi, \quad x \in \widetilde{J}, \qquad G(t) := \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds, \quad t \in I. \tag{13}$$

Inoltre, se $v\colon I_v \to \mathbb{R}$ è un'altra soluzione del problema di Cauchy (11), si ha

$$u(t) = v(t), \qquad \forall t \in \widetilde{I} \cap I_v. \tag{14}$$

Dimostrazione. Poiché $h(u(t_0)) = h(x_0) \neq 0$ e le funzioni h e u sono entrambe continue, per il teorema della permanenza del segno esiste un intervallo $\widetilde{I} \subseteq I_u$ contenente t_0 tale che $h(u(t)) \neq 0$ per ogni $t \in \widetilde{I}$; questo implica, in particolare, che $u(t) \in \widetilde{J}$ per ogni $t \in \widetilde{I}$.

Di conseguenza, u soddisfa l'equazione

$$\frac{1}{h(u(t))}\, u'(t) = g(t), \qquad \forall t \in \widetilde{I}.$$

Integrando ambo i membri si ottiene

$$\int_{t_0}^{t} \frac{1}{h(u(s))}\, u'(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds, \qquad \forall t \in \widetilde{I}.$$

Per il teorema di integrazione per sostituzione, il primo integrale è

$$\int_{x_0}^{u(t)} \frac{1}{h(\xi)}\, d\xi.$$

Di conseguenza, la soluzione u soddisfa l'equazione implicita (12).

Dimostriamo che u è l'unica soluzione in $\widetilde{I}$ del problema di Cauchy (11). Sia $v\colon I_v \to \mathbb{R}$ un'altra soluzione del problema di Cauchy (11) e mostriamo che vale (14). Supponiamo per assurdo che tale uguaglianza sia falsa; per fissare le idee, supponiamo che esista $\tau \in \widetilde{I} \cap I_v$, $\tau > t_0$, tale che $u(\tau) \neq v(\tau)$. Definiamo

$$t_1 := \sup\{t \in [t_0, \tau] :\ u(s) = v(s)\ \forall s \in [0, t]\}. \tag{15}$$

Chiaramente, $t_1 \geq t_0$ e, per continuità, $u(t_1) = v(t_1)$. Poiché $t_1 \in \widetilde{I}$ avremo che $x_1 := u(t_1) \in \widetilde{J}$. In particolare, u e v sono entrambe soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = g(t)\, h(x), \\ x(t_1) = x_1, \end{cases}$$

con $h(x_1) \neq 0$. Per quanto dimostrato nella prima parte, esiste un intervallo $I_1 \subseteq I_v \cap \widetilde{I}$ contenente t_1 tale che $v(t) \in \widetilde{J}$ e $H(v(t)) = G(t)$ per ogni $t \in I_1$. Ma allora $H(v(t)) = H(u(t))$ per ogni $t \in I_1$; poiché H è iniettiva, questo implica che $v(t) = u(t)$ per ogni $t \in I_1$, in contraddizione con la definizione (15) di t_1. □

Vediamo ora come sia possibile individuare esplicitamente un intervallo $\widetilde{I}$ nel quale è definita la soluzione.

Osserviamo che $H \in C^1(\widetilde{J})$ e che H è strettamente monotona (crescente se $h > 0$ in $\widetilde{J}$, decrescente se $h < 0$ in $\widetilde{J}$). Inoltre, $H(x_0) = 0$, quindi $0 \in H(\widetilde{J})$. Di conseguenza, la funzione

$$H\colon \widetilde{J} \to H(\widetilde{J})$$

è biiettiva, con inversa $H^{-1}\colon H(\widetilde{J}) \to \widetilde{J}$, con $0 \in H(\widetilde{J})$ e $H^{-1}(0) = x_0$. Poiché $G(t_0) = 0$, l'insieme

$$\{t \in I :\ G(t) \in H(\widetilde{J})\}$$

contiene almeno il punto t_0. Indichiamo con $\widetilde{I}$ la componente connessa di tale insieme contenente t_0.

Per $t \in \widetilde{I}$ possiamo esplicitare u dalla relazione (12), ottenendo che la funzione

$$u(t) := H^{-1}(G(t)), \qquad t \in \widetilde{I}, \tag{16}$$

è soluzione del problema di Cauchy (11).

Possiamo dimostrare questo fatto anche in maniera diretta. Infatti, $u(t_0) = H^{-1}(G(t_0)) = H^{-1}(0) = x_0$, quindi la condizione iniziale è soddisfatta. Inoltre, utilizzando i teoremi di derivazione della funzione composta e della funzione inversa abbiamo che

$$u'(t) = \frac{d}{dt} H^{-1}(G(t)) = \frac{1}{H'(H^{-1}(G(t))} G'(t) = h(u(t))\, g(t),$$

dunque u è soluzione dell'equazione differenziale.

Osserviamo esplicitamente che il fatto che la soluzione u sia unica in $\widetilde{I}$ non esclude che u possa essere estesa, al di fuori di $\widetilde{I}$, in modo non unico. In altri termini, può succedere che esistano due funzioni distinte $u_1 \colon I_1 \to \mathbb{R}$ e $u_2 \colon I_2 \to \mathbb{R}$, definite su due intervalli contenenti $\widetilde{I}$, entrambe soluzioni del problema di Cauchy (11), come mostrato nell'Esempio 2.5. In tal caso, ciò che possiamo dire è che $u_1(t) = u_2(t) = u(t)$ per ogni $t \in \widetilde{I}$.

Esempio 3.2. Determiniamo le soluzioni massimali del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = 2t\sqrt{1-x^2}, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

L'equazione è a variabili separabili, con $g(t) = 2t$, $t \in I := \mathbb{R}$, e $h(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in J := [-1, 1]$. Poiché $h(-1) = h(1) = 0$, vediamo subito che le funzioni costanti $u_1(t) = -1$, $u_2(t) = 1$, $t \in \mathbb{R}$, sono soluzioni dell'equazione differenziale ma, ovviamente, non sono soluzioni del problema di Cauchy dal momento che non soddisfano la condizione iniziale.

Cominciamo a individuare la soluzione del problema di Cauchy nella componente connessa $\widetilde{J} = (-1, 1)$ dell'insieme $\{x \in J : \ h(x) \neq 0\}$ contenente il dato iniziale $x_0 = 0$. Determiniamo dunque le funzioni H e G definite in (13):

$$H(x) := \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\, d\xi = \arcsin(x), \quad x \in (-1, 1), \qquad G(t) = \int_0^t 2s\, ds = t^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Consideriamo ora l'insieme

$$\{t \in \mathbb{R} : \ G(t) \in H(\widetilde{J})\} = \{t \in \mathbb{R} : \ t^2 \in \arcsin((-1, 1))\} = \left\{t \in \mathbb{R} : \ t^2 < \frac{\pi}{2}\right\}$$
$$= \left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right).$$

Poiché tale insieme è già un intervallo, la componente connessa $\widetilde{I}$ contenente $t_0 = 0$ coincide con l'intervallo stesso. Di conseguenza, la soluzione del problema di Cauchy nella regione $\{-1 < x < 1\}$ è definita implicitamente da

$$\arcsin(u(t)) = t^2, \qquad t \in \widetilde{I} = \left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right),$$

cioè

$$u(t) = \sin(t^2), \qquad t \in \widetilde{I}.$$

Vediamo che la soluzione può essere raccordata in modo C^1 a sinistra di $T^- := -\sqrt{\pi/2}$ e a destra di $T^+ := \sqrt{\pi/2}$ con la soluzione costante $u_2(t) = 1$, ottenendo la soluzione massimale

$$v(t) := \begin{cases} \sin(t^2), & \text{se } T^- < t < T^+, \\ 1, & \text{se } t \in (-\infty, T^-] \cup [T^+, +\infty). \end{cases}$$

Che tale v sia di classe C^1 si verifica facilmente senza particolari calcoli; ad esempio, tenendo conto del fatto che h e v sono continue, con $h(1) = 0$ e $v(T^+) = 1$, in T^+ si ha che

$$\lim_{t\to(T^+)-} v'(t) = \lim_{t\to(T^+)-} h(v(t)) = h(v(T^+)) = h(1) = 0,$$

$$\lim_{t\to(T^+)+} v'(t) = \lim_{t\to(T^+)+} 0 = 0,$$

e analogamente in T^-. Osserviamo che questa soluzione massimale è anche unica. Infatti, poiché $h(x) \geq 0$ per ogni $x \in [-1, 1]$, tutte le soluzioni dell'equazione differenziale sono monotone crescenti per $t \geq 0$ e monotone decrescenti per $t \leq 0$. Dal momento che qualsiasi altra soluzione massimale deve coincidere con v nell'intervallo (T^-, T^+), è chiaro che non è possibile avere prolungamenti diversi da v al di fuori di questo intervallo. ◁

Osservazione 3.3. Per determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $x' = g(t)h(x)$ si può utilizzare il seguente metodo.

In prima battuta si determinano gli zeri della funzione h; a essi corrispondono soluzioni costanti dell'equazione differenziale.

In seguito si determinano i rami di soluzioni che giacciono in regioni dove h non si annulla. A questo proposito, indichiamo con G una *qualsiasi* primitiva di g e procediamo separatamente su ogni fissata componente connessa $\widetilde{J}$ dell'insieme $\{x : h(x) \neq 0\}$. Indicata con H una *qualsiasi* primitiva della funzione $1/h$ in $\widetilde{J}$, i rami delle soluzioni non costanti che hanno immagine in $\widetilde{J}$ sono implicitamente determinati dalla relazione

$$H(u(t)) = G(t) + c, \qquad c \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

Una volta determinati i rami di soluzioni in tutte queste regioni, si controlla se possono essere fatti dei raccordi di classe C^1 con le soluzioni costanti. In questo modo è possibile individuare tutte le soluzioni massimali dell'equazione.

Questo metodo può essere utilizzato anche per risolvere il problema di Cauchy (11) con $h(x_0) \neq 0$. Infatti, una volta arrivati alla relazione implicita (17), basta ricavare c richiedendo che, per $t = t_0$, si debba avere $u(t_0) = x_0$:

$$H(x_0) = G(t_0) + c \quad \Longrightarrow \quad c = H(x_0) - G(t_0).$$

Esempio 3.4. Vogliamo determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$x' = 2tx^2\,,$$

e la soluzione del problema di Cauchy con condizione iniziale $x(0) = 1$.

Procediamo come descritto nell'Osservazione 3.3. Posto $g(t) = 2t$, $h(x) = x^2$, l'unico zero di h è $x = 0$, al quale corrisponde la soluzione costante $u(t) = 0$.

Passiamo ora a determinare le soluzioni che giacciono nel semipiano $\{x > 0\}$ e quelle che giacciono nel semipiano $\{x < 0\}$.

Una primitiva di g è $G(t) := t^2$; in entrambi gli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$ una primitiva di $1/h$ è $H(x) = -1/x$. Di conseguenza, sia le soluzioni positive che quelle negative soddisfano l'equazione implicita

$$-\frac{1}{u(t)} = t^2 + c, \qquad (c \in \mathbb{R}). \tag{18}$$

Per ogni $c > 0$ tale relazione fornisce un'unica soluzione negativa:

$$u(t) = -\frac{1}{t^2 + c}\,, \qquad t \in \mathbb{R} \quad (c > 0). \tag{19}$$

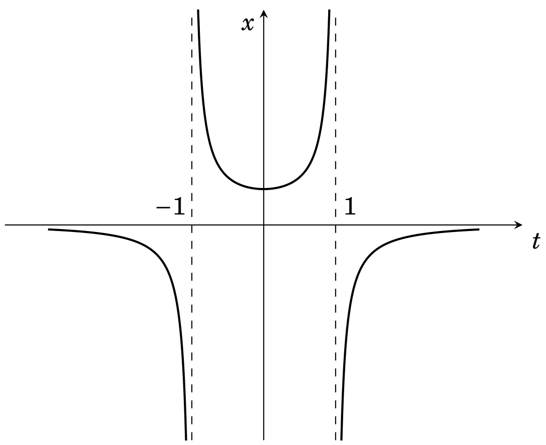

Figura 2. Soluzioni di (18) per $c = -1$

Se $c = 0$ otteniamo le due soluzioni

$$u(t) = -\frac{1}{t^2}\,, \quad t \in (-\infty, 0), \qquad u(t) = -\frac{1}{t^2}\,, \quad t \in (0, +\infty). \tag{20}$$

Per ogni $c < 0$ otteniamo tre soluzioni:

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{1}{t^2 + c}\,, \qquad t \in (-\infty, -\sqrt{-c}), \\ u(t) &= -\frac{1}{t^2 + c}\,, \qquad t \in (-\sqrt{-c}, \sqrt{-c}), \\ u(t) &= -\frac{1}{t^2 + c}\,, \qquad t \in (\sqrt{-c}, +\infty). \end{aligned} \tag{21}$$

Osserviamo che nessuna delle soluzioni indicate in (19), (20), (21) può essere raccordata in modo C^1 con la soluzione identicamente nulla. Quelle indicate (e la soluzione nulla) sono dunque tutte e sole le soluzioni massimali dell'equazione differenziale.

Risolviamo ora problema di Cauchy con condizione iniziale $x(0) = 1$. Sostituendo il dato iniziale nella relazione (18) otteniamo

$$-\frac{1}{1} = 0^2 + c \quad \Longrightarrow \quad c = -1.$$

La relazione implicita fornisce, per tale valore di c, tre soluzioni, indicate in (21) (per $c = -1$; si veda la Figura 2). Chiaramente, la soluzione del problema di Cauchy sarà quella definita nell'intervallo contenente il tempo iniziale $t_0 = 0$, vale a dire $u(t) = -1/(t^2 - 1)$, $t \in (-1, 1)$. $\triangleleft$

4. Equazioni scalari autonome

Un caso particolare delle equazioni a variabili separabili si ha quando il secondo membro non dipende esplicitamente da t, cioè l'equazione è del tipo $x' = h(x)$, con $h\colon J \to \mathbb{R}$ funzione continua. Osserviamo che, in tal caso, le soluzioni dell'equazione sono invarianti per traslazioni temporali. In particolare, $u\colon I_u \to \mathbb{R}$ è una soluzione del problema di

Cauchy

$$\begin{cases} x' = h(x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{22}$$

se e solo se la funzione

$$v(t) := u(t + t_0), \qquad t \in I_v := \{t - t_0 : \ t \in I\}$$

è una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = h(x), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{23}$$

Infatti, se u è soluzione di (22) e v è definita come sopra, avremo che $v(0) = u(t_0) = x_0$ e

$$v'(t) = u'(t + t_0) = h(u(t + t_0)) = h(v(t)), \qquad \forall t \in I_v,$$

dunque v è soluzione di (23). L'implicazione contraria si dimostra in maniera analoga.

Non è quindi restrittivo considerare solo le soluzioni di (23) relative al tempo iniziale $t_0 = 0$. Per quanto abbiamo già visto nel Paragrafo 3, l'unica soluzione locale del problema di Cauchy (23), nel caso $h(x_0) \neq 0$, è data implicitamente dalla relazione

$$H(u(t)) = t, \qquad H(x) := \int_{x_0}^{x} \frac{1}{h(\xi)}\, d\xi, \quad x \in \widetilde{J}, \tag{24}$$

dove $\widetilde{J}$ è il più grande intervallo contenente x_0 tale che $h(x) \neq 0$ per ogni $x \in \widetilde{J}$. Osserviamo che, per ogni $x \in \widetilde{J}$, $H(x)$ indica a quale tempo t la soluzione di (23) passa per x.

Per semplicità, supponiamo $J = \mathbb{R}$, cioè $h \in C(\mathbb{R})$, in modo tale che $\widetilde{J}$ sia un intervallo aperto del tipo $\widetilde{J} = (a, b)$, dove a può essere anche $-\infty$ e $b > a$ può essere $+\infty$. Osserviamo inoltre che, se $a \in \mathbb{R}$, allora dalla continuità di h segue che $h(a) = 0$; analogamente, se $b \in \mathbb{R}$, allora $h(b) = 0$.

Anche l'intervallo $\widetilde{I} := H(\widetilde{J})$, grazie a (24), sarà un intervallo aperto:

$$\widetilde{I} = (T^-, T^+) := H(\widetilde{J}) = H((a, b)).$$

Per fissare le idee, supponiamo che $h(x_0) > 0$ (in modo analogo si potrà trattare il caso $h(x_0) < 0$); poiché, in tal caso, H è strettamente monotona crescente (essendo $h > 0$ in $\widetilde{J}$), avremo che

$$\begin{aligned} T^- &= \lim_{x \to a+} H(x) = \int_{x_0}^{a} \frac{1}{h(\xi)}\, d\xi \in [-\infty, 0), \\ T^+ &= \lim_{x \to b-} H(x) = \int_{x_0}^{b} \frac{1}{h(\xi)}\, d\xi \in (0, +\infty]. \end{aligned} \tag{25}$$

Osserviamo che gli integrali che compaiono in (25) saranno tipicamente integrali impropri. Ad esempio, nel primo integrale si può avere $a = -\infty$ (nel qual caso abbiamo un integrale esteso a una semiretta) oppure, se $a \in \mathbb{R}$, allora si ha $h(a) = 0$ e dunque la funzione integranda $1/h$ è illimitata in un intorno destro di a.

Per quanto detto nel paragrafo precedente, è possibile definire in maniera univoca una soluzione u nell'intervallo $\widetilde{I}$:

$$u(t) = H^{-1}(t), \qquad t \in \widetilde{I} := H(\widetilde{J}) = (T^-, T^+)\,.$$

Discuteremo ora la possibilità di estendere questa soluzione oltre l'intervallo (T^-, T^+). È chiaro che, se $T^- = -\infty$ e $T^+ = +\infty$, allora la soluzione non è ulteriormente estendibile (si dice in questo caso che la soluzione è globale) e, di conseguenza, è l'unica soluzione del problema di Cauchy.

Per definizione di T^+ abbiamo che

$$\lim_{t\to(T^+)-} u(t) = \lim_{t\to(T^+)-} H^{-1}(t) = b.$$

Se $T^+ \in \mathbb{R}$ e $b = +\infty$, allora la soluzione u sta "esplodendo" in tempo finito, dunque non è prolungabile oltre T^+. Viceversa, se $T^+ \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ allora la soluzione può essere prolungata a destra con una soluzione costante; è infatti facile verificare che, ad esempio, la funzione

$$v(t) := \begin{cases} u(t), & \text{se } t \in (T^-, T^+), \\ b, & \text{se } t \geq T^+, \end{cases}$$

è di classe C^1 in $(T^-, +\infty)$, dal momento che

$$\lim_{t\to(T^+)-} v'(t) = \lim_{t\to(T^+)-} u'(t) = h(b) = 0, \qquad \lim_{t\to(T^+)+} v'(t) = 0,$$

ed è soluzione del problema di Cauchy (23).

In maniera analoga si può trattare il caso $T^- \in \mathbb{R}$. Se $a = +\infty$, allora la soluzione u esplode quando $t \to (T^-)^+$, dunque non è ulteriormente prolungabile a sinistra di a, mentre se $a \in \mathbb{R}$ la soluzione u può essere prolungata a sinistra di T^- (ad esempio in modo costante).

Non è detto che questi prolungamenti costanti siano gli unici possibili; è infatti facile intuire che, con lo stesso meccanismo, ad una soluzione localmente costante si possa raccordare un altro ramo di soluzione strettamente monotona.

Da quanto discusso sopra, segue in particolare che, se x_0 è uno zero isolato di h e la funzione $1/|h|$ non è localmente integrabile in senso improprio in x_0, allora la funzione costante $u(t) = x_0$, $t \in \mathbb{R}$, è l'unica soluzione del problema di Cauchy (23). Infatti, per ipotesi gli integrali impropri

$$\int_{x_0}^{x_0+\delta} \frac{1}{h(\xi)}\, d\xi, \qquad \int_{x_0-\delta}^{x_0} \frac{1}{h(\xi)}\, d\xi, \tag{26}$$

sono divergenti per ogni $\delta > 0$. Di conseguenza, nessuna soluzione $v(t) > x_0$ oppure $v(t) < x_0$ si può raccordare in tempo finito alla soluzione costante u.

Osserviamo che, se $|h(x)| \sim C|x - x_0|^\alpha$ per $x \to x_0$ (con $\alpha > 0$) e $h(x) \neq 0$ in un intorno di x_0, con l'esclusione del punto x_0 stesso, allora gli integrali in (26) sono divergenti se $\alpha \geq 1$. In particolare, tali integrali sono divergenti se $|h(x)| \leq C\,|x - x_0|$ in un intorno di x_0. Poiché $h(x_0) = 0$, tale condizione si può riscrivere come

$$|h(x) - h(x_0)| \leq C|x - x_0|, \qquad \text{per ogni } x \text{ in un intorno di } x_0. \tag{27}$$

Queste considerazioni continuano a valere anche se x_0 non è uno zero isolato di h. Per non appesantire troppo la trattazione, ci limiteremo a discutere un esempio.

Esempio 4.1. Si vogliono determinare le soluzioni massimali dell'equazione differenziale $x' = h(x)$ con

$$h(x) := \begin{cases} x, & \text{se } x < 0, \\ 0, & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ x - 1, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Poiché l'equazione è autonoma, è sufficiente determinare le soluzioni dei problemi di Cauchy (23) con $t_0 = 0$, al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$, dal momento che tutte le altre soluzioni si possono ottenere per traslazione temporale.

Osserviamo che, se $x_0 \in (0,1)$, allora la funzione costante $u(t) = x_0$ è l'unica soluzione del problema di Cauchy. Infatti, se così non fosse, poiché u è continua esisterebbe un intervallo $[a,b]$ con $u(a) = x_0$, $u(b) \neq x_0$, $u(t) \in (0,1)$ per ogni $t \in [a,b]$ e, per il Teorema di Lagrange, esisterebbe $\tau \in (a,b)$ tale che $0 \neq u(b)-u(a) = (b-a)\,u'(\tau) = (b-a)\,h(u(\tau)) = 0$, assurdo. Se $x_0 = 0$ oppure $x_0 = 1$, la funzione costante è ancora soluzione, ma per dire che è unica dobbiamo escludere la possibilità di raccordi con soluzioni non costanti.

Se $x_0 < 0$, nella regione $x < 0$ la soluzione è definita implicitamente da

$$\int_{x_0}^{u(t)} \frac{1}{\xi}\, d\xi = t,$$

vale a dire

$$\log(u(t)/x_0) = t \qquad \Longrightarrow \qquad u(t) = x_0\, e^t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Queste soluzioni non si raccordano mai alla soluzione identicamente nulla, che quindi sarà l'unica soluzione massimale del problema di Cauchy con $x_0 = 0$.

Analogamente, per $x_0 > 1$ otteniamo le soluzioni massimali

$$u(t) = 1 + (x_0 - 1)e^t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

che non si raccordano mai con la soluzione costante che si ottiene per $x_0 = 1$. In conclusione, tutte le soluzioni sopra riportate (costanti e no) sono definite su tutto $\mathbb{R}$ e rappresentano l'unica soluzione del corrispondente problema di Cauchy. $\lhd$

Se h è localmente Lipschitziana, la condizione (27) è certamente verificata; di conseguenza, i problemi di Cauchy associati all'equazione $x' = h(x)$ hanno tutti un'unica soluzione massimale. Non è difficile verificare che le considerazioni fatte valgono anche per le più generali equazioni a variabili separabili trattate nel precedente paragrafo. Più precisamente, vale il seguente risultato.

Proposizione 4.2 (Esistenza e unicità per le equazioni a variabili separabili)**.** *Siano $g\colon I \to \mathbb{R}$ e $h\colon J \to \mathbb{R}$ due funzioni continue negli intervalli I e J, con J aperto. Allora per ogni $(t_0, x_0) \in I \times J$ il Problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x' = g(t)\, h(x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

ammette almeno una soluzione. Se, in aggiunta, h è localmente Lipschitziana, allora esiste un'unica soluzione massimale. (Quest'ultima condizione è verificata, ad esempio, se h è di classe C^1.)

Vedremo che questo è un caso particolare di risultati più generali che dimostreremo nei Paragrafi 5 e 6. Infatti, nel caso problemi di Cauchy generali del tipo (9), associati all'equazione differenziale $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, la continuità di $\mathbf{f}$ è sufficiente a garantire l'esistenza di soluzioni (si veda il Teorema 6.1); se, in aggiunta, $\mathbf{f}$ è localmente Lipschitziana rispetto alle variabili spaziali, allora si ha anche l'unicità delle soluzioni (si veda il Teorema 5.5).

Osservazione 4.3. Se il Problema di Cauchy (9) ha un'unica soluzione locale per ogni dato iniziale $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$, allora due soluzioni distinte dell'equazione differenziale non possono mai intersecarsi. Siano infatti $\mathbf{u}\colon I_u \to \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{v}\colon I_v \to \mathbb{R}^n$ due soluzioni distinte di $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$; con questo intendiamo che esiste un tempo $t_1 \in I_u \cap I_v$ tale che $\mathbf{u}(t_1) \neq \mathbf{v}(t_1)$. Supponiamo per assurdo che esista $\tau \in I_u \cap I_v$ tale che $\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{v}(\tau)$. Supponiamo, per fissare le idee, che $t_1 > \tau$, e definiamo

$$t_0 := \sup\{t \in [\tau, t_1] : \ \mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(t)\}.$$

Chiaramente avremo che $t_0 \in [\tau, t_1)$ e, per continuità di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{v}(t_0) =: \mathbf{x}_0$. Inoltre, per definizione di t_0, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ non sono identicamente coincidenti in alcun intorno destro di t_0. Da qui segue che il Problema di Cauchy con dato iniziale $(t_0, \mathbf{x}_0)$ ammette due soluzioni locali distinte, in contraddizione con l'ipotesi di locale unicità.

Osservazione 4.4. Consideriamo il caso delle equazioni a variabili separabili discusso nella Proposizione 4.2. Se la funzione h è localmente Lipschitziana, allora si ha unicità locale per i problemi di Cauchy; per quanto detto nell'Osservazione 4.3, le soluzioni costanti associate agli zeri di h sono "invalicabili", nel senso che nessun'altra soluzione le può attraversare.

A titolo di esempio, se $h(x) = x(x-1)(x-2)$ e $g \in C(\mathbb{R})$, allora l'equazione ha tre soluzioni costanti

$$u_1(t) = 0, \quad u_2(t) = 1, \quad u_3(t) = 2, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Se $u\colon I \to \mathbb{R}$ è una qualsiasi altra soluzione, allora necessariamente si deve avere che l'immagine di u deve essere contenuta in uno solo degli intervalli

$$J_1 := (-\infty, 0), \qquad J_2 := (0, 1), \qquad J_3 := (1, 2), \qquad J_4 := (2, +\infty).$$

Quindi, se abbiamo ad esempio $u(t_0) \in (1, 2)$, allora $1 < u(t) < 2$ per ogni $t \in I$.

Analizziamo ora alcuni esempi discussi nell'introduzione.

Esempio 4.5. Vogliamo determinare le soluzioni del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = \alpha\, x, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{28}$$

discusso nell'Esempio 1.4, al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$. La funzione $h(x) := \alpha\, x$ è Lipschitziana, quindi per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ esiste un'unica soluzione di (28). Se $\alpha = 0$ l'unica soluzione è $u(t) = x_0$; consideriamo dunque il caso $\alpha \neq 0$.

La funzione h si annulla solo per $x = 0$; di conseguenza, se $x_0 = 0$, la soluzione di (28) è $u(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$. Per quanto detto nell'Osservazione 4.4, nessun'altra soluzione può intersecare questa soluzione costante; di conseguenza le altre soluzioni sono sempre positive oppure sempre negative.

Procediamo come descritto nell'Osservazione 3.3. Una primitiva della funzione $1/h$, sia nell'intervallo $J_1 := (0, +\infty)$ che nell'intervallo $J_2 := (-\infty, 0)$, è

$$H(x) = \frac{1}{\alpha} \log(|x|),$$

dunque le soluzioni sono definite implicitamente da

$$\frac{1}{\alpha} \log(|u(t)|) = t + c,$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$. Poiché l'immagine degli intervalli J_1 e J_2 attraverso H è tutto $\mathbb{R}$, ne segue che le soluzioni massimali sono globalmente definite (cioè sono definite per ogni $t \in \mathbb{R}$). L'equazione implicita fornisce

$$|u(t)| = e^{\alpha\, t + \alpha\, c}.$$

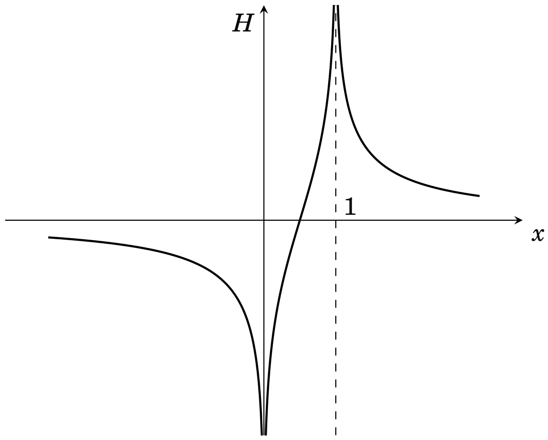

FIGURA 3. Grafico della funzione H definita in (29)

Posto $k := e^{\alpha c} > 0$, avremo dunque che le soluzioni positive sono del tipo

$$u(t) = k\, e^{\alpha t}, \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad (k > 0)$$

mentre quelle negative sono del tipo

$$u(t) = -k\, e^{\alpha t}, \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad (k > 0).$$

Ricordandoci della soluzione costante identicamente nulla, l'integrale generale dell'equazione $x' = \alpha\, x$ è dunque

$$u(t) = C\, e^{\alpha t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

al variare di $C \in \mathbb{R}$.

La soluzione del Problema di Cauchy (28) si ottiene richiedendo che $u(0) = x_0$, cioè che $C\, e^{\alpha \cdot 0} = x_0$, da cui si ricava $C = x_0$. La soluzione di (28) è dunque $u(t) = x_0\, e^{\alpha t}$, $t \in \mathbb{R}$. ◁

Esempio 4.6 (Equazione logistica)**.** Vogliamo determinare le soluzioni dell'equazione logistica descritta nell'Esempio 1.5; scegliendo, per semplicità espositiva, i parametri $\alpha = \beta = 1$, l'equazione in questione è

$$x' = x - x^2.$$

La funzione $h(x) := x - x^2$ è di classe C^1, quindi localmente Lipschitziana, su tutto $\mathbb{R}$, fatto che garantisce la locale unicità delle soluzioni dei problemi di Cauchy e l'invalicabilità delle soluzioni costanti relative ai suoi zeri $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$, come discusso nell'Osservazione 4.4. Di conseguenza, le soluzioni non costanti hanno immagine contenuta in uno solo degli intervalli

$$J_1 := (-\infty, 0), \qquad J_2 := (0, 1), \qquad J_3 := (1, +\infty).$$

Poiché in ciascuno dei tre intervalli si ha

$$\int \frac{1}{x(1-x)}\, dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) dx = \log|x| - \log|1-x| + c,$$

una primitiva di $1/h$ è data da

$$H(x) = \log\left|\frac{x}{1-x}\right| \tag{29}$$

(si veda il grafico in Figura 3). Le soluzioni non costanti soddisfano quindi l'equazione

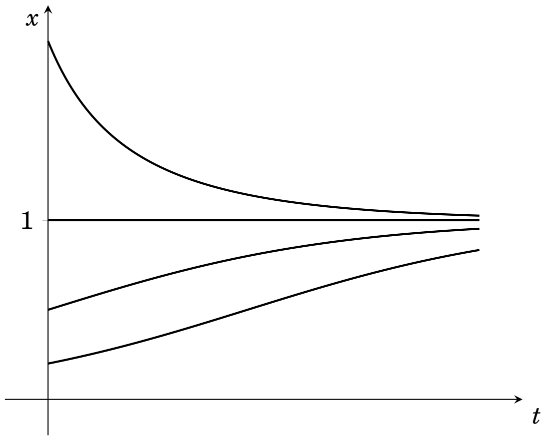

FIGURA 4. Alcune soluzioni positive dell'equazione logistica

implicita

$$\log\left|\frac{u(t)}{1-u(t)}\right| = t + c \tag{30}$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$.

Distinguiamo ora i vari casi.

(a) Soluzioni in J_1. Poiché $H(J_1) = (-\infty, 0)$, a $c \in \mathbb{R}$ fissato la soluzione sarà definita per per

$$t + c \in (-\infty, 0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad t \in I_c^1 := (-\infty, -c).$$

La relazione (30) fornisce quindi

$$\frac{u(t)}{u(t)-1} = e^{t+c} \qquad \Longrightarrow \qquad u(t) = 1 - \frac{1}{1-e^{t+c}}\,, \qquad \forall t \in I_c^1.$$

(b) Soluzioni in J_2. Poiché $H(J_2) = \mathbb{R}$, per ogni $c \in \mathbb{R}$ fissato la soluzione sarà definita su tutto $\mathbb{R}$. La relazione (30) fornisce quindi

$$\frac{u(t)}{1-u(t)} = e^{t+c} \qquad \Longrightarrow \qquad u(t) = 1 - \frac{1}{1+e^{t+c}}\,, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(c) Soluzioni in J_3. Poiché $H(J_3) = (0, +\infty)$, a $c \in \mathbb{R}$ fissato la soluzione sarà definita per per

$$t + c \in (0, +\infty) \qquad \Longleftrightarrow \qquad t \in I_c^3 := (-c, +\infty).$$

La relazione (30) fornisce quindi

$$\frac{u(t)}{u(t)-1} = e^{t+c} \qquad \Longrightarrow \qquad u(t) = 1 + \frac{1}{e^{t+c}-1}\,, \qquad \forall t \in I_c^3.$$

Se siamo interessati solo al modello di crescita delle popolazioni discusso nell'Esempio 1.5, in realtà non ci interessano le soluzioni negative o nulle, ma solo quelle strettamente positive. Le soluzioni strettamente positive sono quelle discusse nei casi (b) e (c), oltre alla soluzione costante $u(t) \equiv 1$. In particolare, la soluzione del Problema di Cauchy con $u(0) = x_0 > 0$ sarà data da

$$u(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1 - x_0}{1 - x_0 + x_0\, e^t}\,, & t \geq 0, \text{ se } 0 < x_0 < 1, \\ 1, & t \geq 0, \text{ se } x_0 = 1, \\ 1 + \dfrac{x_0 - 1}{1 - x_0 + x_0\, e^t}\,, & t \geq 0, \text{ se } x_0 > 1. \end{cases}$$

(I grafici di alcune soluzioni sono riportati in Figura 4.) ◁

5. Esistenza e unicità in ipotesi di Lipschitzianità

In questo paragrafo Ω denoterà sempre un sottoinsieme **aperto** e non vuoto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Un ingrediente fondamentale per attaccare il problema di esistenza e unicità di soluzioni per il problema di Cauchy (9) è la sua riformulazione in termini di una opportuna equazione integrale.

Definizione 5.1. Sia $\mathbf{f} \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e sia $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$. Diremo che una funzione $\mathbf{u}\colon I \to \mathbb{R}^n$, dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo non banale, è una soluzione dell'equazione integrale (di Volterra di seconda specie)

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{u}(s))\, ds \tag{31}$$

se:

(a) $t_0 \in I$;
(b) $(t, \mathbf{u}(t)) \in \Omega$ per ogni $t \in I$;
(c) $\mathbf{u}$ è continua in I;
(d) l'equazione (31) è soddisfatta per ogni $t \in I$.

Lemma 5.2. *Sia* $\mathbf{f} \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$. *Allora una funzione* $\mathbf{u}\colon I \to \mathbb{R}^n$ *è una soluzione del problema di Cauchy* (9) *se e solo se è una soluzione dell'equazione di integrale* (31).

Dimostrazione. "$\Longrightarrow$" Sia $\mathbf{u}$ soluzione del problema di Cauchy (9). Poiché $\mathbf{u}$ è derivabile in I, essa è anche continua in I. In particolare, la funzione composta $I \ni t \mapsto \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t))$ è continua; di conseguenza, anche $\mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t))$ è continua in I. Per il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale avremo dunque che

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{u}'(s)\, ds = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{u}(s))\, ds \qquad \forall t \in I,$$

dunque $\mathbf{u}$ è soluzione dell'equazione integrale (31).

"$\Longleftarrow$" Sia $\mathbf{u}$ soluzione dell'equazione integrale (31). Poiché $\mathbf{u}$ è continua in I, la funzione composta $I \ni t \mapsto \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t))$ è continua. Per il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale, dalla relazione (31) deduciamo che $\mathbf{u}$ è di classe C^1 e

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)), \qquad \forall t \in I.$$

La condizione iniziale $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{x}_0$ segue sempre dalla relazione (31) per $t = t_0$. In conclusione, $\mathbf{u}$ è una soluzione del problema di Cauchy (9). □

L'equazione integrale (31) suggerisce una strategia di attacco per il problema di esistenza e unicità. Infatti, se sullo spazio delle funzioni continue da un opportuno intervallo I contenente t_0 a valori in $\mathbb{R}^n$ definiamo l'operatore

$$P[\mathbf{u}](t) := \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{u}(s))\, ds, \qquad t \in I,$$

allora $\mathbf{u}$ è soluzione di (31), e dunque del problema di Cauchy (9), se e solo se $\mathbf{u} = P[\mathbf{u}]$, cioè se e solo se $\mathbf{u}$ è un punto fisso dell'operatore P.

Come vedremo, sotto ipotesi di locale Lipschitzianità (precisate nella prossima definizione), saremo in grado di dimostrare che l'operatore P è una contrazione in un opportuno spazio metrico completo; questo ci permetterà di applicare il teorema di Banach–Caccioppoli e di concludere che P ammette un unico punto fisso.

Definizione 5.3. Diremo che una funzione $\mathbf{f}\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ è localmente lipschitziana in $\mathbf{x}$, uniformemente rispetto a t, e scriveremo $\mathbf{f} \in \mathrm{Lip}^x_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, se per ogni cilindro compatto $K := [a, b] \times \overline{B}_R(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$ contenuto in Ω, esiste una costante $L_K > 0$ tale che

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| \le L_K \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \qquad \forall t \in [a, b],\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \overline{B}_R(\mathbf{x}_0).$$

Esercizio 5.4. Sia $\mathbf{f}\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ una funzione derivabile parzialmente in Ω rispetto alle variabili $x_1, \dots, x_n$ con derivate parziali localmente limitate (cioè limitate in ogni sottoinsieme compatto di Ω; si noti che, in particolare, questa ipotesi è soddisfatta se le derivate parziali $\partial f_j/\partial x_i$ sono continue in Ω). Si dimostri che $\mathbf{f} \in \mathrm{Lip}^x_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Teorema 5.5 (Cauchy–Picard–Lindelöf)**.** *Sia $\mathbf{f} \in C(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap \mathrm{Lip}^x_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto. Allora, per ogni dato iniziale $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$ esistono $\delta > 0$ e una funzione $\mathbf{u} \in C^1([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$ tali che*

(a) *(Esistenza) $\mathbf{u}$ è una soluzione del problema di Cauchy* (9)*;*

(b) *(Unicità) se $\mathbf{v}\colon I \to \mathbb{R}^n$ è un'altra soluzione del problema di Cauchy* (9)*, allora $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(t)$ per ogni $t \in I \cap [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.*

Inoltre, se a ed R sono due numeri positivi tali che il cilindro compatto

$$K := [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}_R(\mathbf{x}_0)$$

sia contenuto in Ω, posto

$$M := \max\{\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\| :\ (t, \mathbf{x}) \in K\},$$

si può scegliere

$$\delta = \min\left\{a, \frac{R}{M}\right\}. \tag{32}$$

Dimostrazione. In virtù del Lemma 5.2 sarà sufficiente dimostrare che l'equazione integrale (31) ammette una soluzione (unica) definita nell'intervallo $I_\delta := [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ con δ dato da (32).

Dividiamo la dimostrazione in cinque punti.

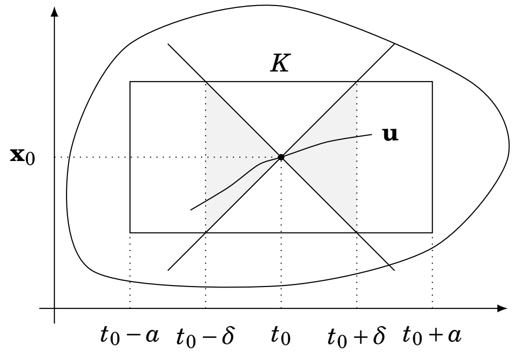

FIGURA 5. Cilindro K e definizione di δ

1. Se $\mathbf{u}\colon I_\delta \to \mathbb{R}^n$ è una soluzione del problema di Cauchy (9), allora $\mathbf{u}(t) \in \overline{B}_R(\mathbf{x}_0)$ per ogni $t \in I_\delta$ (si veda la Figura 5).

Sia infatti

$$\tau := \sup\{t \in [t_0, t_0 + \delta] :\ \mathbf{u}(s) \in \overline{B}_R(\mathbf{x}_0)\ \forall s \in [t_0, t]\}$$

e supponiamo per assurdo che $\tau < t_0 + \delta$. Per continuità, abbiamo che $\|\mathbf{u}(\tau) - \mathbf{x}_0\| = R$, da cui

$$\begin{aligned} R = \|\mathbf{u}(\tau) - \mathbf{x}_0\| &= \left\| \int_{t_0}^{\tau} \mathbf{f}(s, \mathbf{u}(s))\, ds \right\| \leq \int_{t_0}^{\tau} \|\mathbf{f}(s, \mathbf{u}(s))\|\, ds \\ &\leq \int_{t_0}^{\tau} M\, ds = M(\tau - t_0) < M\delta \leq R, \end{aligned}$$

da cui segue la contraddizione. (Per la prima maggiorazione abbiamo utilizzato il risultato dell'Esercizio 10.1.)

In maniera del tutto analoga si dimostra che

$$\inf\{t \in [t_0 - \delta, t_0] :\ \mathbf{u}(s) \in \overline{B}_R(\mathbf{x}_0)\ \forall s \in [t, t_0]\} = t_0 - \delta.$$

2. Per quanto dimostrato nel punto precedente, sarà sufficiente cercare le soluzioni dell'equazione integrale (31) nello spazio

$$X = C(I_\delta, \overline{B}_R(\mathbf{x}_0)) := \{\mathbf{u} \in C(I_\delta, \mathbb{R}^n) :\ \mathbf{u}(t) \in \overline{B}_R(\mathbf{x}_0)\ \forall t \in I_\delta\}. \tag{33}$$

Definiamo la funzione $d_*\colon X \times X \to \mathbb{R}$,

$$d_*(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \sup_{t \in I_\delta} e^{-2L_K|t - t_0|}\, \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)\|\,, \qquad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in X, \tag{34}$$

dove $L_K > 0$ è la costante di Lipschitzianità di $\mathbf{f}$ nel cilindro K (si veda la Definizione 5.3). Si verifica immediatamente che d_* è una metrica su X; inoltre, essendo

$$e^{-2L_K\delta}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_\infty \leq d_*(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_\infty, \qquad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in X,$$

la metrica d_* è equivalente alla metrica uniforme d_∞.

Posto $\mathbf{u}_0(t) := \mathbf{x}_0$ per ogni $t \in I_\delta$, l'insieme X non è altro che la palla chiusa

$$\{\mathbf{u} \in C(I_\delta, \mathbb{R}^n) :\ \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|_\infty \leq R\}$$

dello spazio di Banach $(C(I_\delta, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$; in particolare, (X, d_∞) è completo (essendo un sottoinsieme chiuso di uno spazio metrico completo). Poiché la metrica d_* è equivalente alla metrica uniforme d_∞, anche (X, d_*) è uno spazio metrico completo.

3. (Mappa di Picard) A ogni funzione $\mathbf{u} \in X$ associamo la funzione $P[\mathbf{u}]$ definita da

$$P[\mathbf{u}](t) := \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{u}(s))\, ds, \qquad t \in I_\delta. \tag{35}$$

Osserviamo che, per ogni $t \in I_\delta$, si ha che

$$\|P[\mathbf{u}](t) - \mathbf{x}_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{u}(s))\, ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{f}(s, \mathbf{u}(s))\|\, ds \right| \leq M|t - t_0| \leq M\delta \leq R.$$

Di conseguenza, l'applicazione P (detta mappa di Picard) manda X in X.

Vogliamo ora mostrare che P è una contrazione nello spazio metrico completo (X, d_*), con costante di Lipschitz $1/2$.

Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$. Per definizione di d_* avremo che

$$\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)\| \leq d_*(\mathbf{u}, \mathbf{v})\, e^{2L_K|t-t_0|} \qquad \forall t \in I_\delta. \tag{36}$$

Poiché vogliamo stimare $d_*(P[\mathbf{u}], P[\mathbf{v}])$, cominciamo a stimare $\|P[\mathbf{u}](t) - P[\mathbf{v}](t)\|$. Consideriamo dapprima il caso $t \in [t_0, t_0 + \delta]$; abbiamo che

$$\begin{aligned}\|P[\mathbf{u}](t) - P[\mathbf{v}](t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{u}(s))\, ds - \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{v}(s))\, ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{f}(s, \mathbf{u}(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{v}(s))\|\, ds\,.\end{aligned}$$

Usando la condizione di Lipschitz soddisfatta da $\mathbf{f}$ nel cilindro K e la disuguaglianza (36) abbiamo che

$$\begin{aligned}\|P[\mathbf{u}](t) - P[\mathbf{v}](t)\| &\leq \int_{t_0}^{t} L_K \|\mathbf{u}(s) - \mathbf{v}(s)\|\, ds \leq \int_{t_0}^{t} L_K\, d_*(\mathbf{u}, \mathbf{v})\, e^{2L_K(s-t_0)}\, ds \\ &= \frac{1}{2}\, d_*(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \left(e^{2L_K(t-t_0)} - 1 \right) \leq \frac{1}{2}\, d_*(\mathbf{u}, \mathbf{v})\, e^{2L_K|t-t_0|}\,.\end{aligned}$$

In maniera analoga, stando attenti ai segni degli integrali, si ottiene la medesima disuguaglianza anche nel caso $t \in [t_0 - \delta, t_0]$. In definitiva, utilizzando questa disuguaglianza abbiamo che

$$\begin{aligned}d_*(P[\mathbf{u}], P[\mathbf{v}]) &= \max_{t \in I_\delta} e^{-2L_K|t-t_0|} \|P[\mathbf{u}](t) - P[\mathbf{v}](t)\| \\ &\leq \max_{t \in I_\delta} e^{-2L_K|t-t_0|} \frac{1}{2}\, d_*(\mathbf{u}, \mathbf{v})\, e^{2L_K|t-t_0|} = \frac{1}{2}\, d_*(\mathbf{u}, \mathbf{v}),\end{aligned}$$

da cui segue la tesi.

4. (Esistenza) Per il Teorema delle Contrazioni, la mappa di Picard P ammette un unico punto fisso $\mathbf{u} \in X$; per definizione di P, questo punto fisso $\mathbf{u}$ è soluzione dell'equazione integrale (31).

5. (Unicità) Supponiamo che $\mathbf{v} \colon I \to \mathbb{R}^n$ sia un'altra soluzione del problema di Cauchy (9). Posto $J := I \cap [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, possiamo definire come sopra la mappa di Picard nello spazio metrico completo $(C(J, \overline{B}_R(\mathbf{x}_0)), d_*)$, dove d_* è definita come in (34) ma utilizzando l'intervallo J anziché l'intervallo I_δ. Di conseguenza, le restrizioni di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ all'intervallo J sono entrambe punti fissi di tale mappa di Picard; per l'unicità del punto fisso, concludiamo dunque che $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ devono coincidere in J. $\square$

Osservazione 5.6. Abbiamo visto, nel corso della dimostrazione del Teorema 5.5, che l'operatore di Picard P, definito in (35), è una contrazione nello spazio metrico completo X definito in (33). Di conseguenza, fissata una qualsiasi funzione $\mathbf{u}_0 \in X$, la successione di funzioni definita per ricorrenza da $\mathbf{u}_{k+1} = P[\mathbf{u}_k]$, $k \in \mathbb{N}$, converge uniformemente alla soluzione $\mathbf{u}$ del Problema di Cauchy (9).

Illustriamo questo fenomeno con un semplice esempio. Consideriamo il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = a\,x, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{37}$$

con $a \in \mathbb{R}$ costante fissata. Scegliamo $u_0(t) \equiv x_0$ e calcoliamo le prime iterate dell'operatore di Picard:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= P[u_0](t) := x_0 + \int_0^t a\,u_0(s)\,ds = x_0 + \int_0^t a\,x_0\,ds = x_0(1 + a\,t)\,, \\ u_2(t) &= P[u_1](t) := x_0 + \int_0^t a\,u_1(s)\,ds = x_0 + \int_0^t x_0(1 + a\,s)\,ds = x_0\left(1 + a\,t + \frac{a^2\,t^2}{2}\right)\,. \end{aligned}$$

Si può a questo punto intuire (e si può dimostrare l'affermazione in modo rigoroso utilizzando il Principio di Induzione) che, in generale,

$$u_k(t) = x_0 \left(1 + a\,t + \frac{a^2 t^2}{2} + \cdots + \frac{a^k t^k}{k!}\right)\,, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Vediamo dunque che, su ogni intervallo compatto $[-\delta, \delta]$, con $\delta > 0$, la successione $(u_k)_k$ converge uniformemente alla funzione $u(t) = x_0\,e^{a\,t}$, che è l'unica soluzione del Problema di Cauchy (37).

6. Esistenza in ipotesi di continuità

Come abbiamo già affermato nei paragrafi precedenti, è possibile dimostrare l'esistenza di una soluzione del Problema di Cauchy (9) in ipotesi di sola continuità della funzione $\mathbf{f}$. Chiaramente, in assenza dell'ipotesi aggiuntiva di locale Lipschitzianità non sarà possibile, in generale, ottenere anche l'unicità della soluzione (si veda l'Esempio (2.3)).

Teorema 6.1 (Peano)**.** *Sia* $\mathbf{f} \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$*, con* $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *aperto non vuoto. Allora, per ogni dato iniziale* $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$*, esiste almeno una soluzione locale del problema di Cauchy* (9)*. Con le notazioni del Teorema 5.5, tale soluzione è definita almeno nell'intervallo* $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$*, con* $\delta > 0$ *dato da* (32)*.*

Cercheremo di dare un'idea della dimostrazione senza però riportare tutti i dettagli (per la dimostrazione completa si veda ad esempio [1, §4.3]). Per semplicità, mostreremo come costruire una soluzione nel semi-intervallo destro $[t_0, t_0 + \delta]$; in maniera analoga si potrà poi procedere nel semi-intervallo sinistro.

L'idea è la seguente. Per ogni $\varepsilon > 0$ fissato, costruiremo una funzione $\mathbf{u}_\varepsilon \colon [t_0, t_0 + \delta] \to \overline{B}_R(\mathbf{x}_0)$, che sarà una soluzione approssimata di (9). Faremo poi vedere che esiste una successione $(\varepsilon_j)_j$, convergente a 0, tale che $\mathbf{u}_{\varepsilon_j}$ converge uniformemente a una soluzione del Problema di Cauchy (9). Come vedremo, l'ingrediente principale della dimostrazione sarà il Teorema di Ascoli–Arzelà.

1. Costruzione delle spezzate di Eulero. Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Per il Teorema di Heine–Cantor, $\mathbf{f}$ è uniformemente continua nel cilindro compatto $K = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B}_R(\mathbf{x}_0)$, quindi esiste un numero $\sigma > 0$ tale che

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(s, \mathbf{y})\| < \varepsilon \qquad \forall (t, \mathbf{x}), (s, \mathbf{y}) \in K,\ |t - s| < \sigma,\ \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \sigma.$$

Consideriamo ora una partizione $\{t_0, t_1, \dots, t_N = t_0 + \delta\}$ dell'intervallo $[t_0, t_0 + \delta]$ avente ampiezza tale che

$$\max_{i=1,\dots,N} (t_i - t_{i-1}) \leq \min \left\{ \sigma, \frac{\sigma}{M} \right\}. \tag{38}$$

Costruiamo ora $\mathbf{u}_\varepsilon$.

Nell'intervallo $[t_0, t_1]$, $\mathbf{u}_\varepsilon$ è la funzione affine tale che $\mathbf{u}_\varepsilon(t_0) = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{u}'_\varepsilon(t) = \mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}_0)$ per ogni $t \in [t_0, t_1]$. Siamo quindi arrivati, al tempo t_1, nel punto $\mathbf{x}_1 := \mathbf{x}_0 + (t_1 - t_0)\mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}_0)$.

Nell'intervallo $[t_1, t_2]$, $\mathbf{u}_\varepsilon$ è la funzione affine tale che $\mathbf{u}_\varepsilon(t_1) = \mathbf{x}_1$, $\mathbf{u}'_\varepsilon(t) = \mathbf{f}(t_1, \mathbf{x}_1)$ per ogni $t \in [t_1, t_2]$.

Procediamo in questo modo fino a costruire $\mathbf{u}_\varepsilon$ nell'ultimo intervallo $[t_{N-1}, t_N]$, ottenendo così una funzione continua e affine a tratti (detta *spezzata di Eulero*).

Con un po' di pazienza si possono dimostrare i seguenti fatti:

(i) $\|\mathbf{u}_\varepsilon(t) - \mathbf{x}_0\| \leq R$ per ogni $t \in [t_0, t_0 + \delta]$, quindi il grafico di $\mathbf{u}_\varepsilon$ è contenuto nel cilindro compatto K;

(ii) $\|\mathbf{u}'_\varepsilon(t) - \mathbf{f}(t, \mathbf{u}_\varepsilon(t))\| < \varepsilon$ per ogni $t \in (t_{i-1}, t_i)$, $i = 1, \dots, N$. Questa disuguaglianza segue dall'uniforme continuità di $\mathbf{f}$ in K e dal fatto che l'ampiezza della partizione soddisfa (38), e traduce l'affermazione che $\mathbf{u}_\varepsilon$ è una soluzione approssimata dell'equazione differenziale;

(iii) $\|\mathbf{u}_\varepsilon(t) - \mathbf{u}_\varepsilon(s)\| \leq M|t - s|$ per ogni $t, s \in [t_0, t_0 + \delta]$, cioè $\mathbf{u}_\varepsilon$ è Lipschitziana con costante di Lipschitz M (indipendente da ε).

2. Compattezza e passaggio al limite. Per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ indichiamo con $\mathbf{u}_k$ la spezzata di Eulero corrispondente a $\varepsilon = 1/k$ costruita nel punto precedente.

Dalle proprietà (i) e (iii) deduciamo che la famiglia $(\mathbf{u}_k)_k$ è equi-limitata ed equi-Lipschitziana in $C([t_0, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$. Per il Teorema di Ascoli–Arzelà concludiamo quindi che esiste una sottosuccessione $(\mathbf{u}_{k_j})_j$ che converge uniformemente a una funzione $\mathbf{u} \in C([t_0, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$.

Per concludere la dimostrazione, dobbiamo mostrare che $\mathbf{u}$ è una soluzione del Problema di Cauchy (9). Sfruttando la proprietà (ii) e il fatto che $\mathbf{u}_{k_j}$ è di classe C^1 a tratti, si ha che

$$\left\| \mathbf{u}_{k_j}(t) - \mathbf{x}_0 - \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{u}_{k_j}(s))\, ds \right\| \leq \frac{1}{k_j}\,(t - t_0), \qquad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta]. \tag{39}$$

(Usando le notazione del punto 1, questa maggiorazione va prima dimostrata per $t \in [t_0, t_1]$, poi per $t \in [t_1, t_2]$, etc.)

Sempre utilizzando l'uniforme continuità di $\mathbf{f}$ in K e il fatto che $\mathbf{u}_{k_j}$ converge a $\mathbf{u}$ uniformemente, si ha che la successione di funzioni $\mathbf{g}_j(t) := \mathbf{f}(t, \mathbf{u}_{k_j}(t))$ converge uniformemente a $\mathbf{g}(t) := \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t))$. È dunque possibile passare al limite nell'integrale che compare in (39), ottenendo infine

$$\left\| \mathbf{u}(t) - \mathbf{x}_0 - \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{u}(s))\, ds \right\| \leq 0, \qquad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta].$$

Di conseguenza $\mathbf{u}$ è soluzione dell'equazione integrale (31) e, per il Lemma 5.2, del Problema di Cauchy (9).

7. Esistenza e unicità globale

Abbiamo visto che, in alcuni casi, le soluzioni di equazioni differenziali con secondo membro definito su tutto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ non sono definite per tutti i tempi perché, come nell'Esempio 3.4, esplodono in tempo finito.

Anche nel caso semplice delle equazioni scalari autonome $x' = f(x)$, si può intuire che questo possa avvenire quando f cresce rapidamente al crescere di x, alimentando l'esplosione della soluzione in tempo finito. Il seguente teorema ci dice che, se f è sub-lineare (cioè non cresce più rapidamente di x), allora questo fenomeno non può avvenire.

Teorema 7.1. *Sia $\mathbf{f} \in C(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \cap \mathrm{Lip}^x_{\mathrm{loc}}(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo non banale. Supponiamo inoltre che $\mathbf{f}$ sia sub-lineare rispetto alle variabili spaziali, cioè che esistano due funzioni non negative $\alpha, \beta \in C(I)$ tali che*

$$\|\mathbf{f}(t,\mathbf{x})\| \leq \alpha(t) + \beta(t)\,\|\mathbf{x}\|, \qquad \forall (t,\mathbf{x}) \in I \times \mathbb{R}^n.$$

Allora, per ogni $(t_0, \mathbf{x}_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, il Problema di Cauchy (9) *ammette un'unica soluzione, definita su tutto I.*

Dimostrazione. Non è restrittivo assumere che $I = [a,b]$; se, infatti, la soluzione è definita su ogni intervallo compatto contenuto in I, allora può essere prolungata a tutto I.

Supponiamo dunque $I = [a,b]$ e definiamo

$$\alpha_0 := \max_{t\in[a,b]} \alpha(t), \qquad \beta_0 := \max_{t\in[a,b]} \beta(t),$$

in modo tale che $\mathbf{f}$ soddisfi la maggiorazione

$$\|\mathbf{f}(t,\mathbf{x})\| \leq \alpha_0 + \beta_0\,\|\mathbf{x}\|, \qquad \forall (t,\mathbf{x}) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n. \tag{40}$$

Fissato $(t_0, \mathbf{x}_0) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n$, faremo vedere che la soluzione $\mathbf{u}$ del Problema di Cauchy (9) può essere definita su tutto $[t_0, b]$ (per questa parte supporremo ovviamente $t_0 < b$); analogamente si potrà dimostrare che può essere definita anche su $[a, t_0]$.

Cominciamo utilizzando il Teorema 5.5 di esistenza e unicità locale: esiste $\delta_0 > 0$, $\delta_0 \leq b - t_0$, tale che il Problema di Cauchy (9) ammette un'unica soluzione $\mathbf{u}_0$ definita in $[t_0, t_0 + \delta_0]$.

Se $t_0 + \delta_0 = b$ abbiamo finito; in caso contrario, poniamo $t_1 := t_0 + \delta_0$ e $\mathbf{x}_1 := \mathbf{u}_0(t_1)$. Sempre per il Teorema 5.5 di esistenza e unicità locale, esiste $\delta_1 > 0$, $\delta_1 \leq b - t_1$, tale che il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(t,\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1, \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione $\mathbf{u}_1$ definita in $[t_1, t_1 + \delta_1]$.

Chiaramente, la funzione

$$\mathbf{u}(t) := \begin{cases} \mathbf{u}_0(t), & \text{se } t \in [t_0, t_1], \\ \mathbf{u}_1(t), & \text{se } t \in [t_1, t_1 + \delta_1], \end{cases}$$

ottenuta raccordando le soluzioni dei due problemi di Cauchy, è una soluzione del Problema di Cauchy (9) di partenza (in altre parole, $\mathbf{u}$ è un prolungamento di $\mathbf{u}_0$).

Se $t_1 + \delta_1 = b$ abbiamo finito; in caso contrario, poniamo $t_2 := t_1 + \delta_1 = t_0 + \delta_0 + \delta_1$ e $\mathbf{x}_2 := \mathbf{u}(t_2)$. Ragionando come sopra, possiamo prolungare la soluzione $\mathbf{u}$ su un intervallo del tipo $[t_0, t_2 + \delta_2]$, raccordando la soluzione $\mathbf{u}$ già costruita in $[t_0, t_2]$ con la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(t_2) = \mathbf{x}_2. \end{cases}$$

Procedendo in questo modo abbiamo due possibilità:

(i) dopo un numero finito k di passi, si ha che $t_0 + \delta_0 + \delta_1 + \cdots + \delta_k = b$, dunque la soluzione è costruita su tutto $[t_0, b]$ e la procedura si arresta;

(ii) per ogni $k \in \mathbb{N}$, si ha $t_k := t_0 + \delta_0 + \delta_1 + \cdots + \delta_k < b$ (cosa che, a priori, può avvenire se i δ_k sono sempre più piccoli).

Dimostriamo per assurdo che il secondo caso non si può verificare. Al k-esimo passo, nella costruzione della soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(t_k) = \mathbf{x}_k, \end{cases}$$

con $\mathbf{x}_k := \mathbf{u}(t_k)$, scegliamo $R_k := \alpha_0 + \beta_0 \|\mathbf{x}_k\|$ e definiamo

$$M_k := \max\{\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\| : \ t \in [t_k, b], \ \mathbf{x} \in \overline{B}_{R_k}(\mathbf{x}_k)\}.$$

Dalla stima (40) e dalla scelta di R_k abbiamo che

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\| \leq \alpha_0 + \beta_0 \|\mathbf{x}\| \leq \alpha_0 + \beta_0(\|\mathbf{x}_k\| + R_k) = (1 + \beta_0) R_k$$

per ogni $t \in [t_k, b]$ e $\mathbf{x} \in \overline{B}_{R_k}(\mathbf{x}_k)$, quindi, in particolare

$$M_k \leq (1 + \beta_0) R_k. \tag{41}$$

Per la formula (32) possiamo scegliere

$$\delta_k = \frac{R_k}{M_k}$$

e, per (41), si ha $\delta_k \geq (1 + \beta_0)^{-1}$, in contraddizione col fatto che $t_0 + \delta_0 + \cdots + \delta_k < b$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. □

8. Studi qualitativi

In questo paragrafo mostreremo, attraverso alcuni semplici esempi, come i risultati generali illustrati fino a questo momento possano essere utilizzati per studiare qualitativamente le soluzioni di un'equazione differenziale, vale a dire, per dedurre alcune proprietà qualitative delle soluzioni (come monotonia, concavità o convessità, limiti, etc.) senza risolvere esplicitamente l'equazione stessa.

Cominciamo richiamando alcuni semplici risultati preliminari che verranno utilizzati nel seguito.

Teorema 8.1 (dell'asintoto)**.** *Sia* $u \colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *una funzione derivabile. Supponiamo che esista finito* $\lim_{t\to+\infty} u(t)$ *e che esista, finito o infinito,* $\lim_{t\to+\infty} u'(t) = L \in \overline{\mathbb{R}}$. *Allora* $L = 0$.

Dimostrazione. Per il Teorema di Lagrange, per ogni $t \geq a$ esiste $\tau_t \in (t, t+1)$ tale che $u(t+1) - u(t) = u'(\tau_t)$. La tesi segue ora passando al limite per $t \to +\infty$, osservando che il limite del primo membro esiste e vale 0 e il limite del secondo membro esiste e vale L. $\square$

Lemma 8.2. *Sia $h \in C([a,b])$ e sia $x_0 \in (a,b)$ tale che h sia Lipschitziana nei due intervalli $[a, x_0]$ e $[x_0, b]$ con costanti di Lipschitz rispettivamente L_1 ed L_2. Allora h è Lipschitziana in $[a,b]$ con costante di Lipschitz $L := \max\{L_1, L_2\}$.*

Dimostrazione. Chiaramente, è sufficiente dimostrare che, se $x, y \in [a,b]$ sono tali che $a \leq x \leq x_0 \leq b$, allora $|h(x) - h(y)| \leq L|x-y|$. A tale proposito, basta osservare che

$$|h(x) - h(y)| \leq |h(x) - h(x_0)| + |h(x_0) - h(y)| \leq L_1|x - x_0| + L_2|x_0 - y| \leq L|x - y|. \quad \square$$

Come immediata conseguenza abbiamo il seguente corollario.

Corollario 8.3. *Sia $h \in C(I)$ una funzione continua di classe C^1 a tratti nell'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, cioè tale che, per ogni intervallo compatto $[a,b] \subseteq I$, esista un numero finito di punti $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ tali che la restrizione di h a ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, N$, sia di classe C^1. Allora h è localmente Lipschitziana in I. Se, in aggiunta, esiste una costante $L \geq 0$ tale che $|h'(x)| \leq L$ in tutti i punti $x \in I$ dove h è derivabile, allora h è Lipschitziana in I con costante di Lipschitz L.*

Un altro risultato che è utile, nel caso di equazioni scalari autonome, per stabilire l'esistenza e l'unicità di soluzioni globali (si veda il Teorema 7.1) è il seguente.

Lemma 8.4. *Sia $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione (globalmente) Lipschitziana. Allora h è sub-lineare.*

Dimostrazione. Sia L una costante di Lipschitz per h. Abbiamo che

$$|h(x)| \leq |h(0)| + |h(x) - h(0)| \leq |h(0)| + L|x|, \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

dunque h soddisfa la condizione di sub-linearità (40) con $\alpha_0 := |h(0)|$ e $\beta_0 := L$. $\square$

Siamo ora pronti per passare a qualche semplice esempio di studio qualitativo.

Esempio 8.5. Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = 1 - |x-1|, \\ x(0) = \alpha\,. \end{cases} \tag{42}$$

(a) Dimostrare che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, il problema ammette un'unica soluzione massimale x_α definita su tutto $\mathbb{R}$.
(b) Determinare gli intervalli di crescenza/decrescenza e di concavità/convessità delle soluzioni.
(c) Analizzare la regolarità delle soluzioni.
(d) Disegnare al variare di α un grafico approssimativo delle soluzioni.

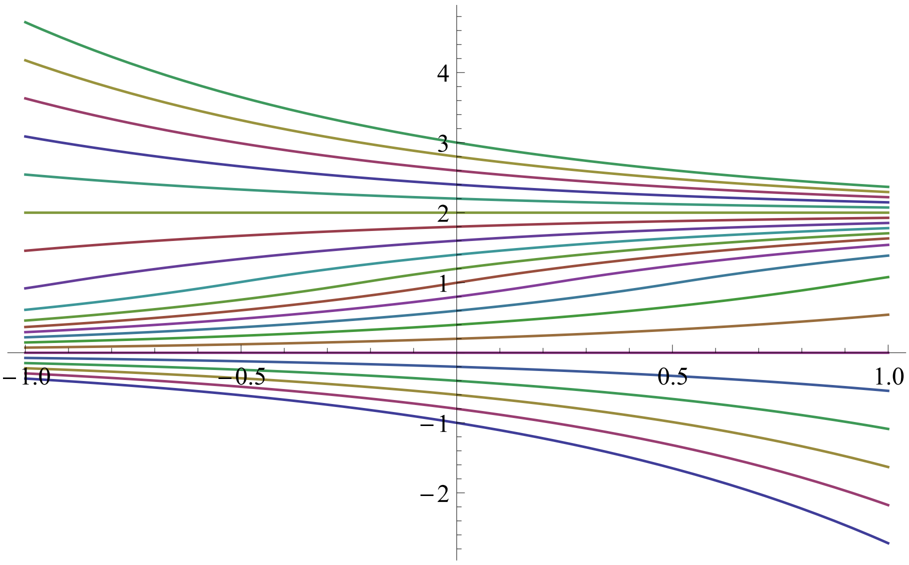

FIGURA 6. Grafico di alcune soluzioni dell'equazione $x' = 1 - |x - 1|$.

(a) La funzione $h(x) := 1 - |x - 1|$ è Lipschitziana di costante 1 (è infatti ottenuta da $|x|$ ribaltando e traslando). Inoltre, per il Lemma 8.4 è sub-lineare (in alternativa, usando la disuguaglianza triangolare si ha $|h(x)| \leq 2 + |x|$). Quindi l'equazione verifica le ipotesi del Teorema 7.1 di esistenza e unicità globale; di conseguenza, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, il problema di Cauchy (42) ammette un'unica soluzione massimale x_α definita su tutto $\mathbb{R}$.

(b) L'equazione è autonoma. Come abbiamo visto nel Paragrafo 4, in corrispondenza degli zeri di h abbiamo soluzioni costanti. In particolare, per $\alpha = 0$ e $\alpha = 2$ abbiamo le soluzioni costanti $x_0(t) = 0$, $x_2(t) = 2$, $t \in \mathbb{R}$.

Poiché i problemi di Cauchy associati all'equazione $x' = h(x)$ hanno unicità, le altre soluzioni non possono intersecare le due soluzioni costanti. In particolare, se $\alpha > 2$ avremo che $x_\alpha(t) > 2$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, se $\alpha \in (0, 2)$ avremo che $0 < x_\alpha(t) < 2$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, mentre se $\alpha < 0$ avremo che $x_\alpha(t) < 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Poiché $h(x) > 0$ per ogni $x \in (0, 2)$, mentre $h(x) < 0$ se $x < 0$ oppure $x > 2$, avremo che x_α è strettamente monotona crescente per $\alpha \in (0, 2)$ mentre è strettamente monotona decrescente se $\alpha < 0$ oppure $\alpha > 2$.

Se $\alpha > 2$ abbiamo che $\lim_{x\to+\infty} x_\alpha(t) = 2$. Infatti, poiché x_α è monotona decrescente e limitata inferiormente da 2, tale limite esiste finito; indichiamo con $l \geq 2$ il suo valore. Dall'equazione abbiamo che

$$\lim_{t\to+\infty} x'_\alpha(t) = \lim_{t\to+\infty} h(x_\alpha(t)) = h(l),$$

dunque anche $x'_\alpha(t)$ ammette limite per $t \to +\infty$. Per il Teorema 8.1 dell'asintoto avremo quindi che $h(l) = 0$; d'altra parte, essendo $l \geq 2$, avremo necessariamente che $l = 2$.

In maniera analoga si dimostra che, se $\alpha < 0$, allora $\lim_{x\to-\infty} x_\alpha(t) = 0$ mentre, se $\alpha \in (0, 2)$, allora

$$\lim_{t\to-\infty} x_\alpha(t) = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} x_\alpha(t) = 2 \qquad (0 < \alpha < 2). \tag{43}$$

Passiamo ora allo studio degli intervalli di concavità/convessità delle soluzioni.

Se $\alpha > 2$, abbiamo che x_α è monotona decrescente, e la funzione $x \mapsto h(x)$ è anch'essa decrescente per $x > 2$. Ne segue che la funzione composta $t \mapsto h(x_\alpha(t))$, $t \in \mathbb{R}$, è monotona crescente (in quanto composizione di due funzioni monotone decrescenti), cioè x'_α è monotona crescente. Questo implica che x_α sia convessa.

In questo caso, essendo $h(x) = 2 - x$ per $x > 1$, si poteva anche semplicemente osservare che

$$x''_\alpha(t) = h'(x_\alpha(t))x'_\alpha(t) = -x'_\alpha(t) = -h(x_\alpha(t)) > 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Con analogo ragionamento si dimostra che, se $\alpha < 0$, allora x'_α è monotona decrescente, dunque x_α è concava.

Nel caso $\alpha \in (0, 2)$ la situazione è leggermente più complicata. Poiché x_α è strettamente crescente, da (43) deduciamo che esiste un unico tempo τ_α per cui $x_\alpha(\tau_\alpha) = 1$. Ragionando come nei casi precedenti, segue quindi che x_α è convessa in $(-\infty, \tau_\alpha]$ mentre è concava in $[\tau_\alpha, +\infty)$.

(c) Poiché h è di classe C^∞ nelle semirette aperte $(-\infty, 1)$ e $(1, +\infty)$, dall'analisi precedente segue che le soluzioni x_α sono di classe C^∞ se $\alpha \leq 0$ oppure se $\alpha \geq 2$.

D'altra parte, se $\alpha \in (0, 2)$, si verifica immediatamente che x'_α non è derivabile in τ_α, dal momento che

$$x''_\alpha(t) = \begin{cases} -x'_\alpha(t) = x_\alpha(t) - 2, & t > \tau_\alpha, \\ x'_\alpha(t) = x_\alpha(t), & t < \tau_\alpha\,, \end{cases}$$

da cui si deduce che

$$\lim_{t \to \tau_\alpha +} x''_\alpha(t) = -1, \qquad \lim_{t \to \tau_\alpha -} x''_\alpha(t) = 1.$$

In conclusione, per $\alpha \in (0, 2)$ la soluzione è di classe C^1 ma non è C^2.

(d) Si veda la Figura 6.

Concludiamo l'esempio osservando che, per questa semplice equazione, le soluzioni possono essere calcolate esplicitamente. Ad esempio, nel caso $\alpha > 2$, x_α è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = 2 - x, \\ x(0) = \alpha, \end{cases}$$

vale a dire

$$x_\alpha(t) = (\alpha - 2)e^{-t} + 2, \quad t \in \mathbb{R} \qquad (\alpha > 2).$$

Analogamente, per $\alpha < 0$, x_α è soluzione dell'equazione $x' = x$, quindi si ha

$$x_\alpha(t) = \alpha e^t, \quad t \in \mathbb{R} \qquad (\alpha < 0).$$

Nel caso $\alpha \in (0, 2)$ la soluzione si otterrà invece tramite un raccordo al tempo τ_α:

$$x_\alpha(t) = \begin{cases} e^{t-\tau_\alpha}, & \text{se } t \leq \tau_\alpha, \\ 2 - e^{\tau_\alpha - t}, & \text{se } t \geq \tau_\alpha \end{cases} \qquad (0 < \alpha < 2).$$

Tuttavia, le considerazioni qualitative fatte sopra rimangono valide anche per una generica funzione h, anche nel caso che le soluzioni non siano esplicitamente computabili. $\lhd$

9. Sistemi di equazioni lineari

Come abbiamo già accennato nell'Introduzione, il sistema di equazioni differenziali (7) si dice lineare se ciascuna delle funzioni $f_1, \dots, f_n$ è della forma

$$f_i(t, x_1, \dots, x_n) = a_{i1}(t)\, x_1 + a_{i2}(t)\, x_2 + \cdots + a_{in}(t)\, x_n + b_i(t).$$

con $a_{i1}, \dots, a_{in}, b_i \colon I \to \mathbb{R}$ funzioni continue in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ (in particolare, f_i è affine rispetto alle variabili spaziali $x_1, \dots, x_n$). Il sistema (7) sarà dunque del tipo

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)\, x_1 + a_{12}(t)\, x_2 + \cdots + a_{1n}(t)\, x_n + b_1(t), \\ \quad\vdots \\ x_n' = a_{n1}(t)\, x_1 + a_{n2}(t)\, x_2 + \cdots + a_{nn}(t)\, x_n + b_n(t), \end{cases} \tag{44}$$

con $a_{ij}, b_i \in C(I)$ per ogni $i, j = 1, \dots, n$.

Per ogni $t \in I$, possiamo definire la matrice $A(t) \in M_n$ dei coefficienti e il vettore $\mathbf{b}(t) \in \mathbb{R}^n$ dei termini noti

$$A(t) := (a_{ij}(t))_{i,j=1,\dots n}\,, \qquad \mathbf{b}(t) = (b_1(t), \dots, b_n(t))$$

(qui M_n indica lo spazio delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali), in modo tale che il sistema possa essere riscritto in forma compatta come

$$\mathbf{x}' = A(t)\, \mathbf{x} + \mathbf{b}(t)\,, \tag{45}$$

dove $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}(t)$ vanno pensati come vettori colonna.

Il sistema lineare (45) si dirà **omogeneo** se il vettore dei termini noti è identicamente nullo in I.

Cominciamo col mostrare che i problemi di Cauchy associati al sistema (45) ammettono un'unica soluzione globale (cioè definita su tutto I), dal momento che la funzione $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) := A(t)\, \mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ soddisfa le ipotesi del Teorema 7.1 di esistenza e unicità globale.

Infatti, se nello spazio M_n definiamo la norma operatoriale

$$\|A\|_{\mathcal{L}} := \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}}} \frac{\|A\, \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\, \mathbf{x}\|, \qquad A \in M_n, \tag{46}$$

si verifica immediatamente che la mappa $t \mapsto \|A(t)\|_{\mathcal{L}}$ è continua, poiché $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ è una norma nello spazio finito dimensionale M_n, e dunque è equivalente alla norma euclidea $\|A\|_2 := \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2\right)^{1/2}$, rispetto alla quale tale mappa è continua.

Di conseguenza $\mathbf{f} \in C(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \cap \mathrm{Lip}^x_{\mathrm{loc}}(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, dal momento che

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| = \|A(t)(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| \leq \|A(t)\|_{\mathcal{L}}\, \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|;$$

inoltre

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\| = \|A(t)\, \mathbf{x} + \mathbf{b}(t)\| \leq \|A(t)\, \mathbf{x}\| + \|\mathbf{b}(t)\| \leq \|A(t)\|_{\mathcal{L}}\, \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{b}(t)\|,$$

dunque le ipotesi del Teorema 7.1 sono soddisfatte scegliendo

$$\alpha(t) := \|\mathbf{b}(t)\|, \qquad \beta(t) := \|A(t)\|_{\mathcal{L}}\,, \qquad t \in I.$$

Prima di considerare il caso generale dei sistemi lineari, trattiamo il caso particolare delle equazioni lineari ($n = 1$).

9.1. **Equazioni lineari.** Consideriamo l'equazione lineare omogenea

$$x' = a(t)\,x \tag{47}$$

con $a \in C(I)$, che può essere risolta utilizzando il metodo di separazione delle variabili. Una soluzione è quella identicamente nulla. Le altre soluzioni non si potranno mai annullare, poiché i problemi di Cauchy hanno soluzione unica; di conseguenza saranno sempre positive o sempre negative. Detta $G\colon I \to \mathbb{R}$ una primitiva di $a(t)$, le soluzioni non nulle sono definite implicitamente dalla relazione

$$\log|u(t)| = G(t) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Ragionando come nell'Esempio 4.5 otteniamo quindi che l'integrale generale dell'equazione (47) è dato da

$$u(t) = k\,e^{G(t)}, \qquad t \in I,\ k \in \mathbb{R}. \tag{48}$$

In particolare, la soluzione del problema di Cauchy associato alla condizione iniziale $x(t_0) = x_0$ sarà data da

$$u(t) = x_0\,e^{G(t)-G(t_0)}, \qquad t \in I.$$

Consideriamo ora l'equazione non omogenea

$$x' = a(t)\,x + b(t), \tag{49}$$

con $a, b \in C(I)$.

L'integrale generale può essere determinato utilizzando il *metodo di variazione delle costanti arbitrarie di Lagrange*. Partiamo dall'integrale generale (48) dell'equazione autonoma, ma supponiamo che $k = k(t)$ sia una funzione derivabile del tempo anziché essere una costante (da qui il nome del metodo). Cerchiamo ora di capire se, per una opportuna scelta di $k(t)$, la funzione $u(t) = k(t)\,e^{G(t)}$ è una soluzione di (49). A questo scopo, calcoliamo

$$u'(t) = k'(t)\,e^{G(t)} + k(t)\,G'(t)\,e^{G(t)} = (k'(t) + a(t)\,k(t))\,e^{G(t)}$$

e sostituiamo u, u' nell'equazione (49):

$$(k'(t) + a(t)\,k(t))\,e^{G(t)} = a(t)\,k(t)\,e^{G(t)} + b(t).$$

Semplificando, otteniamo che affinché u sia una soluzione, k deve soddisfare l'identità

$$k'(t) = b(t)\,e^{-G(t)},$$

cioè k deve essere una primitiva della funzione $b(t)\,e^{-G(t)}$. Abbiamo dunque dimostrato che le funzioni del tipo

$$u(t) = e^{G(t)} \int b(t)\,e^{-G(t)}\,dt, \qquad t \in I,$$

sono soluzioni di (49). (L'integrale indefinito a secondo membro indica, come di consuetudine, la famiglia di tutte le primitive della funzione integranda.)

In particolare, fissati $t_0 \in I$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = a(t)\,x + b(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

è data da

$$u(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds} \left[x_0 + \int_{t_0}^{t} b(s)\,e^{-\int_{t_0}^{s} a(\sigma)\,d\sigma}\,ds \right], \qquad t \in I.$$

Esempio 9.1. Vogliamo determinare l'integrale generale dell'equazione

$$x' = (\tan t)\, x + \sin t$$

nell'intervallo $I := (-\pi/2, \pi/2)$.

Una primitiva della funzione $\tan t$ in I è $G(t) = -\log(\cos t)$; di conseguenza, l'integrale generale dell'equazione è

$$u(t) = e^{-\log(\cos t)} \int \sin t\, e^{\log(\cos t)}\, dt = \frac{1}{\cos t} \int \sin t\, \cos t\, dt = \frac{1}{\cos t}\left(c - \frac{1}{2}\cos^2 t\right)$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$. $\triangleleft$

9.2. **Sistemi lineari omogenei.** Torniamo ora allo studio dei sistemi lineari (45), partendo dall'analisi dei sistemi lineari omogenei del tipo

$$\mathbf{x}' = A(t)\,\mathbf{x}\,, \qquad t \in I. \tag{50}$$

Come primo passo dimostreremo un teorema di struttura dell'insieme delle soluzioni V di (50); più precisamente, faremo vedere che V è un sottospazio n-dimensionale dello spazio $C^1(I, \mathbb{R}^n)$. (Il fatto che V sia contenuto in $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ discende dal fatto che le soluzioni di (50) sono globali, cioè definite su tutto I.) Chiaramente V è un sottospazio vettoriale di $C^1(I, \mathbb{R}^n)$, dal momento che se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono entrambe soluzioni di (50), allora per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ anche la funzione $\mathbf{w} := \alpha\,\mathbf{u} + \beta\,\mathbf{v}$ lo è:

$$\mathbf{w}'(t) = \alpha\,\mathbf{u}'(t) + \beta\,\mathbf{v}'(t) = \alpha\, A(t)\mathbf{u}(t) + \beta\, A(t)\mathbf{v}(t) = A(t)[\alpha\,\mathbf{u}(t) + \beta\,\mathbf{v}(t)] = A(t)\mathbf{w}(t).$$

Scriviamo esplicitamente le definizioni di dipendenza e indipendenza lineare di vettori (che in questo caso saranno funzioni) appartenenti allo spazio vettoriale $C^1(I, \mathbb{R}^n)$.

Definizione 9.2. Diremo che le funzioni $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ sono linearmente dipendenti se esistono k scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che $\lambda_1\mathbf{u}_1 + \dots + \lambda_k\mathbf{u}_k$ è la funzione identicamente nulla, cioè

$$\lambda_1\mathbf{u}_1(t) + \dots + \lambda_k\mathbf{u}_k(t) = \mathbf{0}, \qquad \forall t \in I.$$

Diremo che $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ sono linearmente indipendenti se non sono linearmente dipendenti.

Nella seguente proposizione dimostreremo che V è generato da n vettori linearmente indipendenti di $C^1(I, \mathbb{R}^n)$.

Teorema 9.3 (Struttura dell'integrale generale)**.** *L'insieme V delle soluzioni del sistema lineare* (50) *è un sottospazio n-dimensionale di $C^1(I, \mathbb{R}^n)$.*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ la base standard di $\mathbb{R}^n$. Fissato $\tau \in I$, per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ indichiamo con $\mathbf{u}_i \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = A(t)\,\mathbf{x}, \\ \mathbf{x}(\tau) = \mathbf{e}_i. \end{cases} \tag{51}$$

La tesi seguirà dal fatto che $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ è una base di V, vale a dire

$$V = \{\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{u}_n : \ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}\} .$$

Il fatto che le funzioni $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ siano linearmente indipendenti discende direttamente dal fatto che al tempo τ i vettori $\mathbf{u}_i(\tau) = \mathbf{e}_i$ siano linearmente indipendenti; se infatti $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sono tali che

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1(t) + \dots + \lambda_n \mathbf{u}_n(t) = \mathbf{0} \qquad \forall t \in I,$$

al tempo τ avremo in particolare che

$$\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{e}_n = \mathbf{0},$$

da cui segue $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Sia dunque $\mathbf{v} \in V$ una qualsiasi soluzione di (50) e dimostriamo che $\mathbf{v}$ può essere scritta come combinazione lineare di $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$.

Il vettore $\mathbf{v}(\tau) \in \mathbb{R}^n$ è combinazione lineare dei vettori $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ della base canonica di $\mathbb{R}^n$; esistono dunque n scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{v}(\tau) = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{e}_n.$$

Consideriamo ora la combinazione lineare delle funzioni $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$

$$\mathbf{u}(t) := \lambda_1 \mathbf{u}_1(t) + \dots + \lambda_n \mathbf{u}_n(t), \qquad t \in I,$$

costruita utilizzando gli stessi coefficienti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Abbiamo che $\mathbf{u}$ è una soluzione di (50); inoltre, ricordando che per ogni $i = 1, \dots, n$ la funzione $\mathbf{u}_i$ è soluzione del problema di Cauchy (51), si ha che

$$\mathbf{u}(\tau) = \lambda_1 \mathbf{u}_1(\tau) + \dots + \lambda_n \mathbf{u}_n(\tau) = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{e}_n = \mathbf{v}(\tau),$$

dunque $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono soluzioni del medesimo problema di Cauchy. Per l'unicità, avremo dunque che $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(t)$ per ogni $t \in I$, cioè $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{u}_n$. $\square$

Di conseguenza, per determinare l'integrale generale del sistema omogeneo $\mathbf{x}' = A(t)\,\mathbf{x}$, è sufficiente determinare un **sistema fondamentale di soluzioni**, vale a dire una famiglia $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ di n soluzioni linearmente indipendenti.

La dimostrazione del Teorema 9.3 suggerisce anche una possibile costruzione di un sistema fondamentale di soluzioni: fissato $\tau \in I$, un tale sistema fondamentale è dato dalle soluzioni dei problemi di Cauchy (51) per $i = 1, \dots, n$. In tal caso, la matrice

$$X(t) := (\mathbf{u}_1(t) \mid \mathbf{u}_2(t) \mid \dots \mid \mathbf{u}_n(t)), \tag{52}$$

che ha per colonne i vettori $\mathbf{u}_1(t), \dots, \mathbf{u}_n(t)$, è detta **matrice fondamentale speciale** al tempo τ. Poiché $\mathbf{u}_i(\tau) = \mathbf{e}_i$ per ogni i, si verifica immediatamente che $X(\tau) = I_n$, dove $I_n \in M_n$ è la matrice identità.

Dire che le funzioni $\mathbf{u}_i$ sono soluzioni dei problemi di Cauchy (51) equivale quindi a dire che la funzione $X \colon I \to M_n$ è soluzione del problema di Cauchy matriciale

$$\begin{cases} X' = A(t)X, \\ X(\tau) = I_n. \end{cases} \tag{53}$$

Infatti, se $X(t)$ è della forma (52), si verifica subito che

$$A(t)X(t) = (A(t)\mathbf{u}_1(t) \mid A(t)\mathbf{u}_2(t) \mid \dots \mid A(t)\mathbf{u}_n(t)),$$

dunque l'uguaglianza matriciale $X'(t) = A(t)X(t)$ equivale alle n uguaglianze vettoriali $\mathbf{u}_i'(t) = A(t)\mathbf{u}_i(t)$, $i = 1, \dots, n$.

Poiché $X(\tau) = I_n$, abbiamo che $\det X(\tau) = 1$. Inoltre, come conseguenza della seguente proposizione, la matrice $X(t)$ è invertibile per ogni $t \in I$, quindi $\det X(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$.

Proposizione 9.4. *Siano* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ *soluzioni di* (50). *Se in un punto* $\tau \in I$ *i* k *vettori di* $\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{u}_1(\tau), \dots, \mathbf{u}_k(\tau)$$

sono linearmente indipendenti, allora in ogni altro punto $t \in I$ *i vettori* $\mathbf{u}_1(t), \dots, \mathbf{u}_k(t)$ *sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista un punto $t^* \in I$ tale che i vettori $\mathbf{u}_1(t^*), \dots, \mathbf{u}_k(t^*)$ siano linearmente dipendenti. Per definizione, esistono scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1(t^*) + \cdots + \lambda_k \mathbf{u}_k(t^*) = \mathbf{0}.$$

La funzione $\mathbf{u} := \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \lambda_k \mathbf{u}_k$ è soluzione di (50), essendo una combinazione lineare di soluzioni. Poiché, per ipotesi, $\mathbf{u}(t^*) = \mathbf{0}$, $\mathbf{u}$ è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = A(t)\,\mathbf{x}, \\ \mathbf{x}(t^*) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

D'altra parte, anche la funzione identicamente nulla in I è soluzione del medesimo problema di Cauchy; per l'unicità, avremo quindi che $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ per ogni $t \in I$, e in particolare, al tempo τ,

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1(\tau) + \cdots + \lambda_k \mathbf{u}_k(\tau) = \mathbf{0}$$

con coefficienti non tutti nulli, in contraddizione con l'ipotesi di lineare indipendenza di $\mathbf{u}_1(\tau), \dots, \mathbf{u}_k(\tau)$. $\square$

Corollario 9.5. *La matrice fondamentale speciale* $X(t)$ *ha determinante non nullo per ogni* $t \in I$.

Osservazione 9.6. La funzione $W(t) := \det X(t)$, $t \in I$, è anche detta *Wronskiano* del sistema $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$, e soddisfa l'equazione differenziale lineare

$$W'(t) = [\operatorname{traccia} A(t)] \cdot W(t), \qquad t \in I.$$

(Per una dimostrazione di questo risultato, dovuto a Liouville, si veda ad esempio [1, Teor. 5.1.16].)

Esempio 9.7 (Oscillatore armonico)**.** Abbiamo già osservato nell'Esempio 1.6, per verifica diretta, che le funzioni del tipo

$$u(t) = \lambda_1 \cos(\omega t) + \lambda_2 \sin(\omega t)$$

sono soluzioni dell'equazione dell'oscillatore armonico $x'' + \omega^2 x = 0$ per ogni scelta delle costanti $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. (Ricordiamo che $\omega > 0$ è la pulsazione del sistema.) Abbiamo anche già visto che l'equazione del secondo ordine può essere riscritta nella forma (8) come sistema lineare di ordine 2, cioè

$$\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x}, \qquad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{54}$$

In termini delle nuove variabili, avremo dunque che le funzioni del tipo

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cos(\omega t) + \lambda_2 \sin(\omega t), \\ -\lambda_1\omega \sin(\omega t) + \lambda_2\omega \cos(\omega t) \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \omega \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

sono soluzioni del sistema (54). Le funzioni

$$\mathbf{u}_1(t) := \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2(t) := \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \omega \cos(\omega t) \end{pmatrix},$$

sono dunque un sistema fondamentale di soluzioni, dal momento che si verifica immediatamente che sono linearmente indipendenti:

$$\det(\mathbf{u}_1(t) \mid \mathbf{u}_2(t)) = \omega(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)) = \omega \neq 0, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Poiché $\mathbf{u}_1(0) = (1, 0)$ e $\mathbf{u}_2(0) = (0, \omega)$ la matrice fondamentale al tempo $\tau = 0$ sarà

$$X(t) = \left(\mathbf{u}_1(t) \;\middle|\; \frac{1}{\omega}\,\mathbf{u}_2(t) \right) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \tag{55}$$

dal momento che $X(0) = I_2$. $\lhd$

9.3. **Sistemi lineari non omogenei.** Dopo aver analizzato la struttura dell'integrale generale dei sistemi omogenei (Teorema 9.3), passiamo ora a considerare i sistemi non omogenei (45).

Teorema 9.8. *L'insieme delle soluzioni del sistema lineare non omogeneo*

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \tag{56}$$

è dato dal sottospazio affine di $C^1(I, \mathbb{R}^n)$

$$W = \mathbf{v} + V := \{\mathbf{v} + \mathbf{u} : \ \mathbf{u} \in V\}$$

dove $V \subset C^1(I, \mathbb{R}^n)$ *è il sottospazio* n*-dimensionale di* C^1 *delle soluzioni del sistema lineare omogeneo* $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$*, mentre* $\mathbf{v} \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ *è una qualsiasi soluzione del sistema non omogeneo* (56)*.*

Dimostrazione. Se $\mathbf{w} \in W$, cioè se $\mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ con $\mathbf{u} \in V$, abbiamo che

$$\begin{aligned} \mathbf{w}'(t) &= \mathbf{v}'(t) + \mathbf{u}'(t) = A(t)\mathbf{v}(t) + \mathbf{b}(t) + A(t)\mathbf{u}(t) \\ &= A(t)[\mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t)] + \mathbf{b}(t) = A(t)\mathbf{w}(t) + \mathbf{b}(t), \end{aligned}$$

dunque $\mathbf{w}$ è una soluzione di (56).

Viceversa, se $\mathbf{w}$ è una soluzione di (56), posto $\mathbf{u} := \mathbf{w} - \mathbf{v}$ si ha, con analogo calcolo, che $\mathbf{u}'(t) = A(t)\mathbf{u}(t)$, dunque $\mathbf{u} \in V$ e $\mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \in W$. $\square$

Di conseguenza, **se** è noto un sistema fondamentale di soluzioni per il problema omogeneo $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$, per determinare l'integrale generale del sistema non omogeneo (56) sarà sufficiente individuare una sua sola soluzione $\mathbf{v}$ (detta anche *soluzione particolare*).

Una tale soluzione particolare $\mathbf{v}$ può essere determinata, almeno in linea di principio, utilizzando il *metodo di variazione delle costanti arbitrarie* già presentato nel caso della singola equazione scalare (si veda il Paragrafo 9.1).

Supponiamo quindi di conoscere la matrice fondamentale speciale $X(t)$ del sistema omogeneo al tempo τ, data da (52). Per ogni vettore $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ abbiamo che

$$X(t)\mathbf{c} = c_1\mathbf{u}_1(t) + \cdots + c_n\mathbf{u}_n(t)$$

è una soluzione del sistema lineare omogeneo.

Cerchiamo ora una soluzione del sistema non omogeneo della forma $\mathbf{v}(t) = X(t)\mathbf{c}(t)$, con $\mathbf{c}(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))$ funzione derivabile in I. Abbiamo che

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}'(t) &= \frac{d}{dt}[c_1(t)\mathbf{u}_1(t) + \cdots + c_n(t)\mathbf{u}_n(t)] \\
&= c_1'(t)\mathbf{u}_1(t) + \cdots + c_n'(t)\mathbf{u}_n(t) + c_1(t)\mathbf{u}_1'(t) + \cdots + c_n(t)\mathbf{u}_n'(t) \\
&= c_1'(t)\mathbf{u}_1(t) + \cdots + c_n'(t)\mathbf{u}_n(t) + c_1(t)A(t)\mathbf{u}_1(t) + \cdots + c_n(t)A(t)\mathbf{u}_n(t) \\
&= X(t)\mathbf{c}'(t) + A(t)X(t)\mathbf{c}(t).
\end{aligned} \tag{57}$$

D'altra parte, se vogliamo che $\mathbf{v}$ sia soluzione di (56), essa dovrà soddisfare l'equazione

$$\mathbf{v}'(t) = A(t)\mathbf{v}(t) + \mathbf{b}(t) = A(t)X(t)\mathbf{c}(t) + \mathbf{b}(t). \tag{58}$$

Confrontando (57) con (58), concludiamo quindi che, affinché $\mathbf{v}(t) = X(t)\mathbf{c}(t)$ sia soluzione del problema non omogeneo (56), la funzione $\mathbf{c}(t)$ deve soddisfare l'equazione $X(t)\mathbf{c}'(t) = \mathbf{b}(t)$. Poiché, per il Corollario 9.5, la matrice $X(t)$ è invertibile per ogni $t \in I$, si ha che

$$\mathbf{c}'(t) = X(t)^{-1}\mathbf{b}(t),$$

ovvero $\mathbf{c}(t)$ deve essere una primitiva della funzione vettoriale $X(t)^{-1}\mathbf{b}(t)$. In conclusione, scegliendo ad esempio la primitiva che si annulla in τ, abbiamo che la funzione

$$\mathbf{v}(t) := X(t)\mathbf{c}(t) = X(t)\int_\tau^t X(s)^{-1}\mathbf{b}(s)\, ds = \int_\tau^t X(t)X(s)^{-1}\mathbf{b}(s)\, ds$$

è una soluzione particolare di (56). Per il Teorema 9.8, l'integrale generale del sistema non omogeneo (56) sarà dunque dato dalla *formula di Duhamel*

$$\mathbf{w}(t) = X(t)\mathbf{c} + \int_\tau^t X(t)X(s)^{-1}\mathbf{b}(s)\, ds \tag{59}$$

al variare delle costanti $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$. In particolare, tenendo conto del fatto che $X(\tau) = I_n$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \\ \mathbf{x}(\tau) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

sarà data da

$$\mathbf{w}(t) = X(t)\mathbf{x}_0 + \int_\tau^t X(t)X(s)^{-1}\mathbf{b}(s)\, ds. \tag{60}$$

Esempio 9.9. Vogliamo risolvere, utilizzando i metodi appena esposti, l'equazione lineare del secondo ordine dell'oscillatore armonico forzato (con $\omega = 1$)

$$x'' + x = t$$

che, procedendo come negli Esempi 1.6 e 9.7, può essere riscritta come il sistema lineare non omogeneo

$$\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \qquad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

Abbiamo già visto, nell'Esempio 9.7, che la matrice fondamentale speciale al tempo $\tau = 0$ del sistema omogeneo è

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Geometricamente, l'applicazione lineare di $\mathbb{R}^2$ rappresentata nella base canonica dalla matrice $X(t)$ è una rotazione di un angolo di t radianti; di conseguenza

$$X(t)X(s)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(t-s) & \sin(t-s) \\ -\sin(t-s) & \cos(t-s) \end{pmatrix}$$

(fatto che comunque può essere verificato anche col calcolo diretto). Una soluzione particolare del sistema sarà dunque data da

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \int_0^t X(t)X(s)^{-1}\mathbf{b}(s)\,ds = \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(t-s) & \sin(t-s) \\ -\sin(t-s) & \cos(t-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} ds \\ &= \int_0^t \begin{pmatrix} s\,\sin(t-s) \\ s\,\cos(t-s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Di conseguenza, l'integrale generale sarà

$$\mathbf{w}(t) = X(t)\,\mathbf{c} + \mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} c_1 \cos t + c_2 \sin t + t - \sin t \\ -c_1 \sin t + c_2 \cos t + 1 - \cos t \end{pmatrix},$$

al variare di $\mathbf{c} = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$. (Osserviamo che la seconda componente della soluzione è, effettivamente, la derivata della prima componente.) $\lhd$

9.4. **Sistemi lineari omogenei a coefficienti costanti.** Come abbiamo appena visto, per risolvere un problema lineare non omogeneo la maggiore difficoltà consiste nel determinare un sistema fondamentale di soluzioni per il problema omogeneo; una volta noto tale sistema, la formula di Duhamel (59) ci permette, almeno in linea di principio, di determinare l'integrale generale del sistema non omogeneo.

Purtroppo, in generale, non esiste un metodo di costruzione esplicito per un sistema fondamentale di soluzioni; tuttavia, nel caso di sistemi lineari omogenei autonomi del tipo

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \qquad A \in M_n, \tag{61}$$

(cioè con coefficienti costanti rispetto al tempo) il problema può essere risolto completamente.

Intanto, dal momento che il sistema (61) è autonomo, sarà sufficiente risolvere i problemi di Cauchy al tempo iniziale $\tau = 0$. Indichiamo con $X(t)$ la matrice fondamentale speciale al tempo $\tau = 0$, vale a dire la soluzione del problema di Cauchy matriciale

$$\begin{cases} X' = AX, \\ X(0) = I_n \end{cases} \tag{62}$$

(si veda l'equazione (53)).

Per vedere che tipo di soluzione possiamo aspettarci, partiamo dal caso scalare $n = 1$. Abbiamo già dimostrato, nell'Osservazione 5.6, che se consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = ax, \\ x(0) = 1, \end{cases} \tag{63}$$

con $a \in \mathbb{R}$, fissata la funzione iniziale costante $u_0(t) \equiv x_0$ le iterate dell'operatore di Picard, definite dalla relazione di ricorrenza $u_{k+1} = P[u_k]$, sono date da

$$u_k(t) = 1 + a\,t + \frac{a^2t^2}{2} + \cdots + \frac{a^kt^k}{k!}\,.$$

La successione $(u_k)_k$ converge uniformemente sui sottoinsiemi limitati di $\mathbb{R}$ alla soluzione

$$u(t) = e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^kt^k}{k!}$$

del problema di Cauchy (63).

Procediamo formalmente nello stesso modo nel caso del problema di Cauchy matriciale (62). In questo caso l'operatore di Picard sarà definito, sulle funzioni continue

$$U\colon \mathbb{R} \to M_n$$

a valori matriciali, da

$$P[U](t) := I_n + \int_0^t A\,U(s)\,ds.$$

Costruiamo le iterazioni a partire dalla funzione costante $U_0(t) = I_n$. Le prime due iterate sono date da

$$\begin{aligned} U_1(t) &= P[U_0](t) = I_n + \int_0^t A\,U_0(s)\,ds = I_n + \int_0^t A\,I_n ds = I_n + A\,t, \\ U_2(t) &= P[U_1](t) = I_n + \int_0^t A\,U_1(s)\,ds = I_n + \int_0^t A(I_n + A\,s)\,ds = I_n + A\,t + \frac{A^2t^2}{2}, \end{aligned}$$

e, in generale, si può verificare per induzione che

$$U_k(t) = I_n + A\,t + \frac{A^2t^2}{2} + \cdots + \frac{A^kt^k}{k!}\,. \tag{64}$$

Osserviamo che, nell'algebra di Banach M_n munita della norma operatoriale $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ definita in (46), la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^kt^k}{k!}$$

è assolutamente convergente per ogni $A \in M_n$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$; si ha infatti

$$\left\| \frac{A^kt^k}{k!} \right\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{\|A\|_{\mathcal{L}}^k\,|t|^k}{k!} = \frac{(\|A\|_{\mathcal{L}}\,|t|)^k}{k!}\,, \tag{65}$$

e quest'ultimo è il termine generale di una serie esponenziale convergente a $\exp(\|A\|_{\mathcal{L}}\,|t|)$.

Ha dunque senso dare la seguente definizione:

Definizione 9.10 (Matrice esponenziale)**.** Data la matrice $A \in M_n$, l'esponenziale di A è la matrice definita come somma della serie assolutamente convergente

$$e^A = \exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\,.$$

In particolare, dalla maggiorazione (65) per $t = 1$, segue che

$$\left\| e^A \right\|_{\mathcal{L}} \leq e^{\|A\|_{\mathcal{L}}}, \qquad \forall A \in M_n.$$

Tornando alle iterate di Picard (64), vediamo dunque che, per ogni $t \in \mathbb{R}$, la successione $(U_k(t))_k$ converge assolutamente alla matrice

$$U(t) = e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}\,. \tag{66}$$

Prima di procedere oltre osserviamo che, come nel caso dell'esponenziale complesso, si ha che

$$e^{At}\, e^{As} = e^{A(t+s)}, \qquad \forall t, s \in \mathbb{R}. \tag{67}$$

Infatti, il prodotto di Cauchy delle due serie a primo membro è la serie che ha per termine generale

$$C_k := \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (At)^j (As)^{k-j} = A^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} t^j s^{k-j} = A^k (t+s)^k = [A(t+s)]^k,$$

dunque per il Teorema di Mertens si ha che

$$e^{At} e^{As} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k = \sum_{k=0}^{\infty} [A(t+s)]^k = e^{A(t+s)}\,.$$

Più in generale, allo stesso modo si può dimostrare che

$$e^{A+B} = e^A e^B \qquad \text{se } A \text{ e } B \text{ commutano}, \tag{68}$$

cioè se $AB = BA$. (Tale uguaglianza è invece in generale falsa se A e B non commutano.)

Una conseguenza immediata di (67) è che e^A è una matrice invertibile e

$$\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}, \qquad \forall A \in M_n. \tag{69}$$

Infatti, da (67) si ha che

$$I_n = e^{A-A} = e^A\, e^{-A}\,.$$

Esempio 9.11. Se $A \in M_n$ è una matrice diagonale,

$$A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

allora

$$e^A = \operatorname{diag}\left(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}\right).$$

Infatti è sufficiente verificare per induzione che

$$A^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k), \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \qquad \triangleleft$$

Esempio 9.12. Dati $a, b \in \mathbb{R}$, consideriamo la matrice $A \in M_2$

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} .$$

Si può dimostrare per induzione che

$$A^k = \begin{pmatrix} a^k & b\,k\,a^{k-1} \\ 0 & a^k \end{pmatrix} , \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Osservando che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\,a^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\,a^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a,$$

concludiamo che

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \begin{pmatrix} e^a & b\,e^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix} .$$

In alternativa, possiamo osservare che

$$A = a\,I_2 + b\,N, \qquad N := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

con I_2 ed N matrici che commutano (ovviamente, l'identità commuta con qualsiasi altra matrice). Poiché $N^2 = 0_2$ (dove $0_2 \in M_2$ è la matrice nulla), abbiamo che $e^{bN} = I_2 + bN$; utilizzando l'identità (68) possiamo dunque concludere che

$$e^A = e^{a\,I_2 + b\,N} = e^{a\,I_2} e^{b\,N} = e^a (I_2 + b\,N) = \begin{pmatrix} e^a & b\,e^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix} .$$

(In generale una matrice $N \in M_n$ tale che $N^k = 0_n$ per qualche $k \in \mathbb{N}$, dove $0_n \in M_n$ è la matrice $n \times n$ identicamente nulla, è detta *nilpotente*; la serie esponenziale di una tale matrice si riduce quindi a una sommatoria di k termini.) ◁

Esempio 9.13 (Matrice simplettica)**.** Sia $J_1 \in M_2$ la matrice simplettica definita da

$$J_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Non è difficile verificare per induzione che

$$J_1^{2k} = (-1)^k I_2, \qquad J_1^{2k+1} = (-1)^k J_1, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Di conseguenza, per ogni $t \in \mathbb{R}$ la matrice esponenziale di $A := J_1\,t$ è

$$\begin{aligned} e^{J_1\,t} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t^{2k}}{(2k)!} J_1^{2k} + \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} J_1^{2k+1} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \dfrac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} & \dfrac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ -\dfrac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} & \dfrac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Consideriamo ora la matrice simplettica $J_n \in M_{2n}$ definita a blocchi da

$$J_n := \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix} .$$

Chi è $e^{J_n\,t}$? ◁

Esempio 9.14. Dati $a, b \in \mathbb{R}$ consideriamo la matrice

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a\, I_2 + b\, J_1 .$$

Poiché I_2 e J_1 commutano, utilizzando l'Esempio 9.13 si ha che

$$e^{At} = e^{at\, I_2} e^{bt\, J_1} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos(bt) & \sin(bt) \\ -\sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix} . \qquad \lhd$$

Esempio 9.15. Siano $A, B \in M_n$ due matrici equivalenti, cioè tali che esista una matrice invertibile $C \in M_n$ con $A = CBC^{-1}$. Osservando che $A^k = (CBC^{-1})^k = CB^kC^{-1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, si ha che

$$e^A = e^{CBC^{-1}} = Ce^BC^{-1} . \qquad \lhd$$

In generale il calcolo esplicito di e^A, con $A \in M_n$ qualsiasi, richiede un cambiamento di base per portare A in forma canonica di Jordan. Questo argomento esula dallo scopo di queste note; il lettore interessato può consultare, ad esempio, [1, Cap. 7].

Dimostriamo ora che la funzione $U(t) = e^{At}$ è, effettivamente, la soluzione del problema di Cauchy (62). La condizione $U(0) = I_n$ è immediatamente verificata; dobbiamo dimostrare che $U(t) = (u_{ij}(t))_{i,j=1,\ldots,n}$ è derivabile per ogni t (nel senso che ciascun elemento $u_{ij}(t)$ è derivabile), e che

$$U'(t) = A(t)U(t) , \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo che, per la caratterizzazione dei limiti in spazi finito dimensionali e per il fatto che la norma operatoriale è equivalente a quella euclidea in $\mathbb{R}^{n^2}$, dire che tutte le u_{ij} sono derivabili in t equivale a richiedere che esista una matrice $U'(t) \in M_n$ tale che

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{U(t+h) - U(t)}{h} - U'(t) \right\|_{\mathcal{L}} = 0. \tag{70}$$

(Il tal caso la matrice $U'(t)$ verrà detta la derivata di U al tempo t.)

Proposizione 9.16 (Derivata dell'esponenziale)**.** *Sia $A \in M_n$. Allora la funzione $U(t) = e^{At}$ è derivabile per ogni $t \in \mathbb{R}$ e si ha*

$$U'(t) = \frac{d}{dt} e^{At} = A\, e^{At} .$$

Dimostrazione. Fissato $t \in \mathbb{R}$, dobbiamo dimostrare che vale (70), cioè che

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} - A\, e^{At} \right\|_{\mathcal{L}} = 0. \tag{71}$$

Cominciamo a dimostrare che (71) è soddisfatta al tempo $t = 0$. Poiché $e^{A\,0} = I_n$, abbiamo che l'argomento della norma nel limite è

$$\frac{e^{Ah} - I_n}{h} - A = \frac{1}{h} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k h^k}{k!} - I_n - Ah \right) = \frac{1}{h} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A^k h^k}{k!} = A^2 h \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k h^k}{(k+2)!} .$$

D'altra parte, il termine generale dell'ultima serie può essere stimato da

$$\left\| \frac{A^k h^k}{(k+2)!} \right\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{(\|A\|_{\mathcal{L}}\, |h|)^k}{k!} ,$$

quindi

$$\left\| \frac{e^{Ah} - I_n}{h} - A \right\|_{\mathcal{L}} \le |h| \, \|A\|_{\mathcal{L}}^2 \, e^{\|A\|_{\mathcal{L}} |h|}.$$

Passando al limite per $h \to 0$ otteniamo quindi che

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{e^{Ah} - I_n}{h} - A \right\|_{\mathcal{L}} = 0, \tag{72}$$

dunque (71) è soddisfatta quando $t = 0$.

Il caso generale ($t \neq 0$) si può ricondurre a questo caso particolare ricordando la formula (67) per l'esponenziale della somma; abbiamo infatti che

$$\left\| \frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} - A\, e^{At} \right\|_{\mathcal{L}} = \left\| \left(\frac{e^{Ah} - I_n}{h} - A \right) e^{At} \right\|_{\mathcal{L}} \le \left\| \frac{e^{Ah} - I_n}{h} - A \right\|_{\mathcal{L}} \left\| e^{At} \right\|_{\mathcal{L}},$$

dunque (71) segue da (72). □

Abbiamo ora tutti gli ingredienti per determinare un sistema fondamentale di soluzioni per il problema omogeneo a coefficienti costanti.

Teorema 9.17. *Sia $A \in M_n$. La matrice fondamentale speciale al tempo τ per il sistema omogeneo a coefficienti costanti $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ è data da*

$$X(t) = e^{A(t-\tau)}.$$

In altri termini, per ogni $\tau \in \mathbb{R}$ e per ogni $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = A\,\mathbf{x}, \\ \mathbf{x}(\tau) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \tag{73}$$

è data da $\mathbf{u}(t) := e^{A(t-\tau)}\mathbf{x}_0$, $t \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Per la Proposizione 9.16 abbiamo che la funzione matriciale $X(t)$ è derivabile e

$$X'(t) = A\, e^{A(t-\tau)} = A\, X(t).$$

Inoltre $X(\tau) = e^{A\,0} = I_n$; di conseguenza, X è la matrice fondamentale speciale al tempo τ per il sistema $\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x}$.

Sia ora $\mathbf{u}(t) := e^{A(t-\tau)}\mathbf{x}_0 = X(t)\,\mathbf{x}_0$. Abbiamo che $\mathbf{u}(\tau) = X(\tau)\,\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$; inoltre

$$\mathbf{u}'(t) = X'(t)\,\mathbf{x}_0 = A\, X(t)\,\mathbf{x}_0 = A\mathbf{u}(t),$$

dunque $\mathbf{u}$ è la soluzione del problema di Cauchy (73). □

Osservazione 9.18. In generale, una famiglia $\{S_t :\ t \ge 0\}$ di operatori lineari su $\mathbb{R}^n$ (cioè di applicazioni lineari $S_t \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$) è detta *semigruppo continuo di operatori lineari* se $S_0 = I$ (l'operatore identità), $S_{t+s} = S_t \circ S_s$ per ogni $t, s \ge 0$ e, per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, l'applicazione $t \mapsto S_t\mathbf{x}$ è continua in $[0, +\infty)$. Di conseguenza, identificando gli operatori lineari con le matrici M_n (nella base canonica), per ogni $A \in M_n$ la famiglia $S_t := e^{At}$ è un semigruppo continuo di operatori lineari.

Esempio 9.19 (Oscillatore armonico)**.** Riprendiamo l'equazione dell'oscillatore armonico, trattato nell'Esempio 9.7:

$$\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x}, \qquad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ragionando come nell'Esempio 9.13, possiamo verificare per induzione che

$$A^{2k} = \begin{pmatrix} (-1)^k\omega^{2k} & 0 \\ 0 & (-1)^k\omega^{2k} \end{pmatrix}, \qquad A^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^k\omega^{2k} \\ (-1)^{k+1}\omega^{2k+2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Di conseguenza, per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha che la matrice fondamentale speciale al tempo $\tau = 0$ è data da

$$\begin{aligned} X(t) = e^{A\,t} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t^{2k}}{(2k)!}\,A^{2k} + \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\,A^{2k+1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \dfrac{(-1)^k(\omega t)^{2k}}{(2k)!} & \dfrac{1}{\omega}\,\dfrac{(-1)^k(\omega t)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ -\omega\dfrac{(-1)^k(\omega t)^{2k+1}}{(2k+1)!} & \dfrac{(-1)^k(\omega t)^{2k}}{(2k)!} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \frac{1}{\omega}\sin(\omega t) \\ -\omega\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

che coincide con la matrice calcolata in (55) a partire dalla conoscenza di un sistema fondamentale di soluzioni. $\triangleleft$

Dalla formula di Duhamel (60) e dalla formula di inversione (69) otteniamo immediatamente il seguente risultato.

Corollario 9.20. *Siano $A \in M_n$ e $\mathbf{b} \in C(I, \mathbb{R}^n)$. Allora la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = A\,\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \end{cases}$$

è data da

$$\mathbf{u}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}\mathbf{b}(s)\,ds, \qquad t \in I.$$

9.5. **Sistemi lineari bidimensionali ed equazioni del secondo ordine a coefficienti costanti.** Analizziamo più in dettaglio cosa avviene nel caso $n = 2$. Sia dunque $A \in M_2$. Il polinomio caratteristico della matrice A ha sempre, in campo complesso, due radici, che possono essere entrambe reali (eventualmente coincidenti) oppure coniugate complesse.

Si possono avere i seguenti casi.

Caso 1: le due radici sono reali e distinte, diciamo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq \mu$. Allora la matrice A è equivalente alla matrice diagonale $B := \operatorname{diag}(\lambda, \mu)$. (Ricordiamo che ciò significa che esiste una matrice invertibile C tale che $A = CBC^{-1}$.) Dall'Esempio 9.15 segue che

$$e^{At} = Ce^{Bt}C^{-1} = C\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix} C^{-1}.$$

Caso 2: le due radici sono reali e coincidenti (indichiamole entrambe con λ). Se la molteplicità geometrica di λ è 2, allora la matrice A è equivalente a $B = \operatorname{diag}(\lambda, \lambda)$ e la situazione è identica a quella descritta nel Caso 1. Se invece la molteplicità geometrica è 1, allora la matrice è equivalente alla matrice

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Dall'Esempio 9.12, posto $A = CBC^{-1}$, si ha che

$$e^{At} = Ce^{Bt}C^{-1} = C \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} C^{-1}.$$

Caso 3: le due radici sono coniugate complesse, diciamo $\lambda = \alpha + i\beta$ e $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. In tal caso, A è equivalente alla matrice

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Dall'Esempio 9.12, posto $A = CBC^{-1}$, si ha che

$$e^{At} = Ce^{Bt}C^{-1} = Ce^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} C^{-1}.$$

Esempio 9.21. Vogliamo determinare le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 + x_2, \\ x_2' = x_1 + 3x_2. \end{cases} \tag{74}$$

Il sistema può essere riscritto in forma compatta come

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \qquad A := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di A è $p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 8$ che ha zeri reali distinti $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 2$. I corrispondenti autovettori (non normalizzati) e la matrice C sono dati rispettivamente da

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(In questo caso la matrice C ha per colonne i due autovettori.) La matrice A è equivalente alla matrice $B := C^{-1}AC = \operatorname{diag}(4, 2)$. Di conseguenza, la matrice fondamentale speciale al tempo $\tau = 0$ per il sistema (74) è data da

$$e^{At} = C\, e^{Bt}\, C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{4t} + e^{2t} & e^{4t} - e^{2t} \\ e^{4t} - e^{2t} & e^{4t} + e^{2t} \end{pmatrix}. \quad \triangleleft$$

Vediamo ora come le informazioni appena ottenute possano essere utilizzate per determinare l'integrale generale di una equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, del tipo

$$x'' + bx' + cx = 0. \tag{75}$$

Come abbiamo già visto, questa equazione si può trasformare in un sistema bidimensionale del tipo

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -cx_1 - bx_2, \end{cases}$$

ovvero

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \qquad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{pmatrix}. \tag{76}$$

Diremo che due soluzioni u_1, u_2 di (75) sono linearmente indipendenti se le corrispondenti funzioni

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_1'(t) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} u_2(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix}$$

sono soluzioni linearmente indipendenti del sistema (76).

Chiameremo polinomio caratteristico dell'equazione (75) il polinomio caratteristico della matrice A, cioè

$$p(\lambda) := \lambda^2 + b\lambda + c\,.$$

Dall'analisi dei tre casi discussi per i sistemi, abbiamo le seguenti possibilità (omettiamo i dettagli che richiederebbero il calcolo esplicito della matrice C di cambiamento di base):

Caso 1: le due radici sono reali e distinte, diciamo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq \mu$. Allora due soluzioni linearmente indipendenti di (75) sono

$$u_1(t) := e^{\lambda t}, \qquad u_2(t) := e^{\mu t}\,.$$

Caso 2: le due radici sono reali e coincidenti (indichiamole entrambe con λ). In questo caso si può verificare che la molteplicità geometrica di λ è sempre 1. Due soluzioni linearmente indipendenti di (75) sono

$$u_1(t) := e^{\lambda t}, \qquad u_2(t) := t\, e^{\lambda t}\,.$$

Caso 3: le due radici sono coniugate complesse, diciamo $\lambda = \alpha + i\beta$ e $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Due soluzioni linearmente indipendenti di (75) sono

$$u_1(t) := e^{\alpha t}\cos(\beta t), \qquad u_2(t) := e^{\alpha t}\sin(\beta t)\,.$$

(Il fatto che le funzioni indicate siano soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione (75) si può verificare anche in maniera indipendente dal passaggio ai sistemi.)

Esempio 9.22. Vogliamo determinare l'integrale generale dell'equazione

$$x'' - 4x' + 4x = 0\,.$$

Il polinomio caratteristico dell'equazione è $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$, che ammette l'unico zero $\lambda = 2$ con molteplicità algebrica 2. Un sistema fondamentale di soluzioni è dunque dato da

$$u_1(t) := e^{2t}, \qquad u_2(t) := t\, e^{2t}\,,$$

per cui l'integrale generale sarà

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}\,, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \qquad \lhd$$

Nel caso di un'equazione del secondo ordine non omogenea a coefficienti costanti, del tipo

$$x'' + bx' + cx = h(t), \tag{77}$$

con $h \in C(I)$, si può adattare il metodo di variazione delle costanti arbitrarie (si veda il Corollario 9.20).

Siano u_1, u_2 due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea $x'' + bx' + cx = 0$, determinate ad esempio come descritto sopra. Posto

$$X(t) := \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{pmatrix}, \tag{78}$$

per la formula di Duhamel una soluzione particolare di (77) sarà data dalla prima componente della funzione $\mathbf{w}\colon I \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\mathbf{w}(t) = \int_\tau^t X(t)X(s)^{-1}\mathbf{b}(s)\,ds, \qquad \mathbf{b}(s) := \begin{pmatrix} 0 \\ h(s) \end{pmatrix},$$

con $\tau \in I$. Poiché

$$X(s)^{-1} = \frac{1}{W(s)} \begin{pmatrix} u_2'(s) & -u_2(s) \\ -u_1'(s) & u_1(s) \end{pmatrix}, \qquad W(s) := \det X(s) = u_1(s)u_2'(s) - u_1'(s)u_2(s),$$

il calcolo esplicito per $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ fornisce

$$w_1(t) = \int_\tau^t \frac{u_1(s)u_2(t) - u_1(t)u_2(s)}{W(s)}\, h(s)\,ds, \qquad t \in I, \tag{79}$$

che rappresenta quindi una soluzione particolare di (77).

Esempio 9.23. Vogliamo determinare l'integrale generale dell'equazione

$$x'' - 3x' + 2x = t\,e^t. \tag{80}$$

Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)^{(}\lambda - 2)$, che ha due zeri distinti $\lambda = 1$ e $\mu = 2$. Due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea saranno dunque

$$u_1(t) = e^t, \qquad u_2(t) = e^{2t}.$$

Dalla formula (79) otteniamo che una soluzione particolare è data da

$$w(t) = \int_0^t \frac{e^s\,e^{2t} - e^t\,e^{2s}}{e^{3s}}\, s\,e^s\,ds = \int_0^t s(e^{2t-s} - e^t)\,ds = \left(-\frac{t^2}{2} - t - 1\right)e^t + e^{2t}$$

mentre l'integrale generale sarà

$$u(t) = c_1e^t + c_2e^{2t} + w(t), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo che l'integrale generale può anche essere riscritto in maniera più compatta nella forma

$$u(t) = k_1e^t + k_2e^{2t} + \left(-\frac{1}{2}t^2 - t\right)e^t, \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \tag{81}$$

dove le costanti k_i e c_i sono legate dalle relazioni $k_1 = c_1 - 1$ e $k_2 = c_2 + 1$. $\lhd$

Osservazione 9.24. Il metodo basato sulla formula di Duhamel, che porta alla soluzione particolare (79), è applicabile anche nel caso di equazioni lineari del secondo ordine non autonome.

Per particolari forme del secondo membro $h(t)$, una soluzione particolare dell'equazione non omogenea (77) può essere "indovinata" per somiglianza, come illustrato nel seguente teorema.

Teorema 9.25 (Metodo di somiglianza)**.** *Si consideri l'equazione* (77) *con*

$$h(t) := P_m(t)e^{\alpha t}\cos(\beta t) \qquad \textit{oppure} \qquad h(t) := P_m(t)e^{\alpha t}\sin(\beta t),$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *e* P_m *polinomio di grado* m.

(i) *Se* $\lambda := \alpha + i\beta$ *non è radice del polinomio caratteristico, allora una soluzione particolare di* (77) *è della forma*

$$w(t) = [Q_m(t)\cos(\beta t) + R_m(t)\sin(\beta t)]\, e^{\alpha t}\,,$$

con Q_m, R_m *opportuni polinomi di grado* m*;*

(ii) *se* $\lambda := \alpha + i\beta$ *è radice del polinomio caratteristico con molteplicità algebrica* k*, allora una soluzione particolare di* (77) *è della forma*

$$w(t) = t^k[Q_m(t)\cos(\beta t) + R_m(t)\sin(\beta t)]\, e^{\alpha t}\,,$$

con Q_m, R_m *opportuni polinomi di grado* m.

Esempio 9.26. Vogliamo determinare, col metodo di somiglianza, l'integrale generale dell'equazione

$$x'' - 3x' + 2x = t\,e^t\,,$$

già considerata nell'Esempio 9.23. Abbiamo già visto che due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea sono

$$u_1(t) = e^t, \qquad u_2(t) = e^{2t}\,.$$

Il secondo membro $h(t) = te^t$ è del tipo discusso nel Teorema 9.25, con

$$m = 1, \quad P_1(t) = t, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 0.$$

Poiché $\alpha + i\beta = 1$ è radice del polinomio caratteristico con molteplicità 1, una soluzione particolare sarà della forma $w(t) = t\,Q_1(t)e^t$ con $Q_1(t) := at + b$ polinomio di primo grado, cioè del tipo

$$w(t) = t(at + b)e^t$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ costanti da determinare. Per individuare i valori delle costanti calcoliamo w', w'' e sostituiamo nell'equazione (80):

$$w'(t) = (at^2 + bt + 2at + b)e^t, \quad w''(t) = (at^2 + 4at + bt + 2a + 2b)e^t.$$

Sostituendo in (80) si ha

$$[at^2 + 4at + bt + 2a + 2b - 3(at^2 + bt + 2at + b) + 2t(at + b)]\, e^t = te^t.$$

Affinché questa sia un'identità, una volta semplificato e^t i due polinomi a primo e secondo membro devono avere gli stessi coefficienti; otteniamo che

$$a = -1/2, \qquad b = -1,$$

dunque una soluzione particolare dell'equazione è

$$w(t) = \left(-\frac{1}{2}t^2 - t\right) e^t,$$

mentre l'integrale generale sarà

$$u(t) = c_1e^t + c_2e^{2t} + \left(-\frac{1}{2}t^2 - t\right) e^t\,, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

che coincide con quanto trovato in (81). ◁

Osservazione 9.27 (Principio di sovrapposizione)**.** Supponiamo di voler determinare una soluzione particolare dell'equazione

$$x'' + bx' + cx = h_1(t) + h_2(t), \tag{82}$$

con $h_1, h_2 \in C(I)$. Se indichiamo con w_i, $i = 1, 2$, una soluzione particolare di

$$x'' + bx' + cx = h_i(t), \qquad (i = 1, 2)$$

allora $w = w_1 + w_2$ è una soluzione di (82). Abbiamo infatti che

$$w'' + bw' + cw = (w_1'' + bw_1' + cw_1) + (w_2'' + bw_2' + cw_2) = h_1 + h_2.$$

(Osserviamo esplicitamente che queste considerazioni rimangono valide per qualsiasi tipo di equazione o sistema lineare.)

Esempio 9.28. Vogliamo determinare l'integrale generale dell'equazione

$$x'' + x' = t + e^t. \tag{83}$$

Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda$, che ha zeri reali distinti $\lambda = -1$ e $\mu = 0$. Due soluzioni linearmente indipendenti sono dunque

$$u_1(t) = 1, \qquad u_2(t) = e^{-t}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Per determinare un integrale particolare, usiamo il principio di sovrapposizione. Per il Teorema 9.25, un integrale particolare dell'equazione

$$x'' + x' = t \tag{84}$$

è del tipo $w_1(t) = t(at+b)$ (dal momento che $\mu = 0$ è autovalore con molteplicità algebrica 1). Sostituendo nell'equazione (84) otteniamo

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -1 \qquad \Longrightarrow \qquad w_1(t) = \frac{1}{2}\,t^2 - t.$$

Analogamente, sempre per il Teorema 9.25, un integrale particolare dell'equazione

$$x'' + x' = e^t \tag{85}$$

è del tipo $w_2(t) = c\,e^t$ (dal momento che $\lambda = -1$ non è uno zero del polinomio caratteristico). Sostituendo in (85) otteniamo

$$c = \frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad w_2(t) = \frac{1}{2}\,e^t.$$

In conclusione, una soluzione particolare di (83) è

$$w(t) = w_1(t) + w_2(t) = \frac{1}{2}\,t^2 - t + \frac{1}{2}\,e^t$$

e l'integrale generale di (83) è

$$u(t) = c_1 + c_2 e^{-t} + w(t), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{86}$$

Per concludere, osserviamo che l'equazione (83) si può ricondurre a una equazione lineare del primo ordine con la sostituzione $y = x'$, ottenendo

$$y' + y = t + e^t.$$

L'integrale generale di questa equazione è

$$y(t) = e^{-t} \int e^t(t + e^t)\,dt = \frac{1}{2}e^t + t - 1 + ce^{-t}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Poiché $y = x'$, l'integrale generale dell'equazione di partenza (85) è dato dalla famiglia delle primitive delle y, cioè

$$u(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{t^2}{2} - t - c\,e^{-t} + c_1,$$

che coincide con quello già individuato in (86) (con $c = -c_2$). $\lhd$

10. Esercizi

Esercizio 10.1. Sia $\mathbf{u}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))$, una funzione vettoriale tale che $u_i \in \mathcal{R}([a,b])$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Si definisca l'integrale vettoriale

$$\int_a^b \mathbf{u}(t)\,dt := \left(\int_a^b u_1(t)\,dt, \dots, \int_a^b u_n(t)\,dt\right) \in \mathbb{R}^n.$$

Dimostrare che la funzione $t \mapsto \|\mathbf{u}(t)\|$ è Riemann–integrabile in $[a,b]$ e

$$\left\|\int_a^b \mathbf{u}(t)\,dt\right\| \leq \int_a^b \|\mathbf{u}(t)\|\,dt.$$

Soluzione. Abbiamo che $u_i^2 \in \mathcal{R}([a,b])$ per ogni i, dal momento che $\varphi \circ u_i \in \mathcal{R}([a,b])$ per ogni funzione continua φ (si veda [3, Thm. 6.11]). Per lo stesso motivo si conclude che $\|\mathbf{u}\|$ è Riemann–integrabile.

Posto $\mathbf{x} := \int_a^b \mathbf{u}(t)\,dt \in \mathbb{R}^n$, abbiamo che

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i \int_a^b u_i(t)\,dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n x_i\,u_i(t)\,dt\,.$$

Per la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz abbiamo che

$$\sum_{i=1}^n x_i\,u_i(t) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}(t) \leq \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{u}(t)\|.$$

Integrando per $t \in [a,b]$ si ha che

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \int_a^b \sum_{i=1}^n x_i\,u_i(t)\,dt \leq \int_a^b \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{u}(t)\|\,dt = \|\mathbf{x}\| \int_a^b \|\mathbf{u}(t)\|\,dt\,,$$

da cui segue la tesi. $\square$

Esercizio 10.2. Determinare le soluzioni massimali dei problemi di Cauchy associati alle seguenti equazioni:

$$(a)\quad x' = \operatorname{sign}(x)\sqrt{|x|}, \qquad (b)\quad x' = \sqrt{|x|}, \qquad (c)\quad x' = x^2,$$
$$(d)\quad x' = 2tx^2, \qquad (e)\quad x\,x' = \frac{1+x^2}{t}\,, \qquad (f)\quad \frac{x'}{x^2-1} = \frac{e^t}{2x}\,.$$

Esercizio 10.3. Determinare la soluzione massimale dei seguenti problemi di Cauchy:

$$(a)\ \begin{cases} x' = t^2x^3, \\ x(1) = 2, \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} x' = \dfrac{x}{t(t-2)}, \\ x(1) = 1, \end{cases} \qquad (c)\ \begin{cases} \dfrac{x'}{\sqrt{x}} = \dfrac{2t}{1-t^2}, \\ x(2) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 10.4. Siano $f, g \in C(\mathbb{R})$ tali che $0 < g(x) \leq f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Supponiamo che il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{87}$$

abbia una soluzione globale $u \in C^1(\mathbb{R})$. Dimostrare che anche il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = g(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione globale $v \in C^1(\mathbb{R})$.

Soluzione. Definiamo

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} \frac{1}{f(s)}\, ds, \quad G(x) := \int_{x_0}^{x} \frac{1}{g(s)}\, ds.$$

Per le ipotesi fatti, tali funzioni sono di classe $C^1(\mathbb{R})$ e sono strettamente crescenti; inoltre

$$F(x_0) = G(x_0) = 0, \quad G(x) \geq F(x) > 0 \ \forall x > x_0, \qquad G(x) \leq F(x) < 0 \ \forall x < x_0. \tag{88}$$

Affinché il Problema di Cauchy (87) ammetta una soluzione globale si deve avere che

$$T_u^- := -\int_{-\infty}^{x_0} \frac{1}{f(s)}\, ds = -\infty, \qquad T_u^+ := \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{f(s)}\, ds = +\infty,$$

cioè che $F(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ e, in tal caso, la soluzione è $u(t) = F^{-1}(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Ma, in tal caso, dalle relazioni (88) si ha che

$$T_v^- := \lim_{x \to -\infty} G(x) = -\infty, \qquad T_v^+ := \lim_{x \to +\infty} G(x) = +\infty,$$

dunque anche v è definita su tutto $\mathbb{R}$. □

Esercizio 10.5. Sia $\varphi\colon [t_0, T] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che $\varphi'(t) \leq M\,\varphi(t)$ per ogni $t \in [t_0, T]$, con $M \in \mathbb{R}$. Dimostrare che $\varphi(t) \leq e^{M(t-t_0)}\varphi(t_0)$ per ogni $t \in [t_0, T]$.

Soluzione. Abbiamo che

$$\left(e^{-Mt}\varphi(t)\right)' = e^{-Mt}\left[\varphi'(t) - M\,\varphi(t)\right] \leq 0 \qquad \forall t \in [t_0, T],$$

dunque $t \mapsto e^{-Mt}\varphi(t)$ è monotona decrescente. In particolare

$$e^{-Mt}\varphi(t) \leq e^{-Mt_0}\varphi(t_0) \qquad \forall t \in [t_0, T],$$

da cui segue immediatamente la tesi. □

Esercizio 10.6. Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}\colon [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$ due soluzioni dell'equazione differenziale $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, con $\mathbf{f}$ continua in un compatto $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ contenente il grafico delle due soluzioni e soddisfacente

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \qquad \forall (t, \mathbf{x}), (t, \mathbf{y}) \in K.$$

Dimostrare che

$$\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)\| \leq e^{L(t-t_0)}\|\mathbf{u}(t_0) - \mathbf{v}(t_0)\| \qquad \forall t \in [t_0, T].$$

Soluzione. Sia $\varphi(t) := \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)\|^2$, $t \in [t_0, T]$. Abbiamo che

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= 2(\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)) \cdot (\mathbf{u}'(t) - \mathbf{v}'(t)) \leq 2\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)\| \, \|\mathbf{u}'(t) - \mathbf{v}'(t)\| \\ &= 2\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)\| \, \|\mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)) - \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t))\| \leq 2L\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)\|^2 = 2L\varphi(t)\,.\end{aligned}$$

Dal risultato enunciato nell'Esercizio 10.5 deduciamo quindi che $\varphi(t) \leq e^{2L(t-t_0)}\varphi(t_0)$. Osservando che $\varphi \geq 0$, la tesi segue passando alla radice quadrata nella disuguaglianza precedente. □

Esercizio 10.7. Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali:

$$(a)\ x'' + x = t^2, \qquad (b)\ x'' + 3x' = t^2 + 1, \qquad (c)\ x'' - 2x' - 3x = -\sin(3t).$$

Soluzione. (a) $x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + t^2 - 2$.
(b) $x(t) = c_1 + c_2 e^{3t} - \frac{t^3}{9} - \frac{t^2}{9} - \frac{7t}{27}$.
(c) $x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} - \frac{1}{30}\cos(3t) + \frac{1}{15}\sin(3t)$. □

Esercizio 10.8. Determinare la soluzione dei problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} x'' - 2x' + x = 3e^{-t}, \\ x(0) = 0, \\ x'(0) = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x'' - 2x' + 5x = te^{2t}, \\ x(0) = 0, \\ x'(0) = 0. \end{cases}$$

Soluzione. (a) $x(t) = -\frac{3}{4}e^t + \frac{5}{2}te^t + \frac{3}{4}e^{-t}$.
(b) $x(t) = e^t\left(\frac{2}{25}\cos(2t) - \frac{3}{50}\sin(2t)\right) + \left(\frac{t}{5} - \frac{2}{25}\right)e^{2t}$. □

Esercizio 10.9. Determinare, al variare di $\omega, \gamma > 0$, l'integrale generale dell'equazione

$$x'' + \omega^2 x = A\cos(\gamma t).$$

Interpretare fisicamente il risultato (si veda questo filmato).

Soluzione. Un integrale particolare è dato da

$$w(t) = \begin{cases} \frac{A}{\omega^2 - \gamma^2}\cos(\gamma t), & \text{se } \gamma \neq \omega, \\ \frac{A}{2\omega}\, t\sin(\omega t), & \text{se } \gamma = \omega. \end{cases}$$ □

Riferimenti bibliografici

[1] A. Malusa, Introduzione alle Equazioni Differenziali Ordinarie, Edizioni La Dotta, 2013.
[2] C. Mascia, EDO Equazioni Differenziali Ordinarie, Pitagora Editrice, 2012.
[3] W. Rudin, Principles of mathematical analysis, third ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1976, International Series in Pure and Applied Mathematics. MR 0385023 (52 #5893)