SPAZI METRICI

1. Definizioni ed esempi

Definizione 1.1. Sia X un insieme qualsiasi. Una **distanza** su X è un'applicazione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tale che

i) $d(x, y) \geq 0$ per ogni x, y in X, e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$ (positività);
ii) $d(x, y) = d(y, x)$ per ogni x, y in X (simmetria);
iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ per ogni x, y e z in X (disuguaglianza triangolare).

Uno **spazio metrico** è una coppia (X, d) con X insieme qualsiasi, e d distanza su X.

Esempio 1.2. Sia X un insieme qualsiasi e $d_d(x, y) = 1$ se $x \neq y$, $d_d(x, y) = 0$ se $x = y$. Si verifica facilmente che i) e ii) valgono; per la iii), se $x = y$ non c'è nulla da dimostrare; se $x \neq y$, si deve provare che $d_d(x, z) + d_d(z, y) \geq 1$ per ogni x, y e z in X con $x \neq y$, fatto questo che risulta essere vero, essendo almeno uno tra i valori $d_d(x, z)$ e $d_d(y, z)$ uguale a 1 (non possono essere entrambi nulli, dato che se lo fossero, si avrebbe $x = z$ e $z = y$ per la i), da cui $x = y$, il che non è). La distanza d_d prende il nome di distanza discreta.

Esempio 1.3. Sia $X = \mathbb{R}$ e $d(x, y) = |x - y|$. Allora $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ è uno spazio metrico (le tre proprietà sono ben note...).

Teorema 1.4 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)**.** *Date due N-ple di numeri reali $(s_1, \ldots, s_N)$ e $(t_1, \ldots, t_N)$, si ha:*

$$\sum_{i=1}^{N} |s_i\, t_i| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} (s_i^2 + t_i^2)\,. \tag{1.1}$$

$$\sum_{i=1}^{N} |s_i\, t_i| \leq \Big(\sum_{i=1}^{N} s_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{i=1}^{N} t_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}\,. \tag{1.2}$$

Dimostrazione. La formula (1.1) si ottiene sommando (per i che va da 1 a N) le disuguaglianze

$$|s_i\, t_i| \leq \frac{s_i^2 + t_i^2}{2}\,,$$

evidentemente vere essendo equivalenti alla disuguaglianza $(|s_i| - |t_i|)^2 \geq 0$. Per dimostrare la (1.2), osserviamo che è evidentemente vera se $(s_1, \ldots, s_N) = (0, \ldots, 0)$ o se $(t_1, \ldots, t_N) = (0, \ldots, 0)$; altrimenti, applichiamo la (1.1) alle N-ple $(x_1, \ldots, x_N)$ e $(y_1, \ldots, y_N)$ definite da

$$x_i = \frac{|s_i|}{\left(\sum_{i=1}^N s_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \qquad y_i = \frac{|t_i|}{\left(\sum_{i=1}^N t_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Si ottiene, essendo $\sum_{i=1}^N x_i^2 = 1 = \sum_{i=1}^N y_i^2$,

$$\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^N s_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^N t_i^2\right)^{\frac{1}{2}}} \sum_{i=1}^N |s_i\, t_i| = \sum_{i=1}^N \frac{|s_i\, t_i|}{\left(\sum_{i=1}^N s_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^N t_i^2\right)^{\frac{1}{2}}} \leq 1,$$

da cui la tesi. □

Esempio 1.5. Sia $X = \mathbb{R}^N$ e

$$d_2((x_1, \ldots, x_N), (y_1, \ldots, y_N)) = \left(\sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si ha che $(\mathbb{R}^N, d_2)$ è uno spazio metrico. La i) e la ii) sono evidenti, mentre per la iii) procediamo come segue, indicando con $X = (x_1, \ldots, x_N)$, $Y = (y_1, \ldots, y_N)$ e $Z = (z_1, \ldots, z_N)$ tre vettori di $\mathbb{R}^N$:

$$\begin{aligned}
[d_2(X,Y)]^2 &= \sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^N (x_i - z_i + z_i - y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^N [(x_i - z_i)^2 + 2(x_i - z_i)(z_i - y_i) + (z_i - y_i)^2] \\
&= [d_2(X,Z)]^2 + [d_2(Z,Y)]^2 + 2 \sum_{i=1}^N (x_i - z_i)(z_i - y_i).
\end{aligned}$$

Applicando la (1.2), si ha

$$\sum_{i=1}^N (x_i - z_i)(z_i - y_i) \leq \left(\sum_{i=1}^N (x_i - z_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^N (z_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = d_2(X,Y)\, d_2(Z,Y).$$

Pertanto,

$$[d_2(X,Y)]^2 \leq [d_2(X,Z)]^2 + [d_2(Z,Y)]^2 + 2 d_2(X,Z)\, d_2(Z,Y),$$

che si può riscrivere come

$$[d_2(X,Y)]^2 \leq [d_2(X,Z) + d_2(Z,Y)]^2,$$

che è proprio la iii).

Teorema 1.6 (Disuguaglianza di Young)**.** *Siano s, t due numeri reali e siano p e q due numeri reali tali che*

$$p > 1\,, \quad q > 1\,, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,.$$

Allora

$$|s\,t| \le \frac{|s|^p}{p} + \frac{|t|^q}{q}\,. \tag{1.3}$$

Dimostrazione. Se uno tra s e t è zero, non c'è nulla da dimostrare. Se sono entrambi non nulli, dividiamo la (1.3) per $|t|^q$, ottenendo

$$\frac{|s|}{|t|^{q-1}} \le \frac{|s|^p}{p\,|t|^q} + \frac{1}{q}\,.$$

Definiamo

$$\rho = \frac{|s|}{|t|^{q-1}}\,.$$

Essendo $1/p + 1/q = 1$, si ha $p(q-1) = q$, e quindi

$$\rho^p = \frac{|s|^p}{|t|^{p(q-1)}} = \frac{|s|^p}{|t|^q}\,.$$

Dimostrare la (1.3) è quindi equivalente a mostrare che

$$\rho \le \frac{\rho^p}{p} + \frac{1}{q}\,,$$

per ogni $\rho \ge 0$, ovvero che

$$\varphi(\rho) = \frac{\rho^p}{p} - \rho + \frac{1}{q}$$

è positiva su $[0, +\infty)$. Si ha $\varphi(0) = 1/q$, mentre φ diverge per ρ tendente a $+\infty$ (essendo $p > 1$). Si ha poi

$$\varphi'(\rho) = \rho^{p-1} - 1\,,$$

e quindi $\varphi'(\rho) = 0$ se e solo se $\rho = 1$. Si vede facilmente che $\rho = 1$ è di minimo (assoluto) per φ; essendo

$$\varphi(1) = \frac{1}{p} - 1 + \frac{1}{q} = 0\,,$$

si ha la tesi. □

Esercizio 1.7. Dimostrare il Teorema precedente usando il fatto che la funzione logaritmo è concava:

$$\ln(s\,t) = \ln(s) + \ln(t) = \frac{\ln(s^p)}{p} + \frac{\ln(t^q)}{q} \ldots$$

Semplice conseguenza della disuguaglianza di Young (si ragiona come nella dimostrazione del Teorema 1.4) è il risultato che segue.

Teorema 1.8 (Disuguaglianza di Hölder)**.** *Siano date due N-ple di numeri reali $(s_1, \ldots, s_N)$ e $(t_1, \ldots, t_N)$. Siano p e q due numeri reali tali che*

$$p > 1\,, \quad q > 1\,, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,.$$

Allora

$$\sum_{i=1}^{N} |s_i\, t_i| \le \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{N} |s_i|^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{N} |t_i|^q\,. \tag{1.4}$$

$$\sum_{i=1}^{N} |s_i\, t_i| \le \Big(\sum_{i=1}^{N} |s_i|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{i=1}^{N} |t_i|^q \Big)^{\frac{1}{q}}\,. \tag{1.5}$$

Si osservi che essendo $1/2 + 1/2 = 1$ (!), le formule (1.1) e (1.2) sono casi particolari di (1.4) e (1.5).

Esempio 1.9. Sia $X = \mathbb{R}^N$, $p \ge 1$ e

$$d_p((x_1, \ldots, x_N), (y_1, \ldots, y_N)) = \Big(\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^p \Big)^{\frac{1}{p}}\,.$$

Allora $(\mathbb{R}^N, d_p)$ è uno spazio metrico. Al solito, i) e ii) sono evidenti, così come la disuguaglianza triangolare nel caso $p = 1$[(1)], mentre la disuguaglianza triangolare per $p > 1$ è di dimostrazione più complicata; si ha (supponendo $d_p(X, Y) \neq 0$, altrimenti la tesi è banale)

$$\begin{aligned}
[d_p(X,Y)]^p &= \sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^p = \sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^{p-1}\, |x_i - y_i| \\
&= \sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^{p-1}\, |x_i - z_i + z_i - y_i| \\
&\le \sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^{p-1}\, |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^{p-1}\, |z_i - y_i|\,.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Applicando la (1.5), si ha

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^{p-1}\, |x_i - z_i| \le \Big(\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^{(p-1)\,q} \Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\sum_{i=1}^{N} |x_i - z_i|^p \Big)^{\frac{1}{p}}\,,$$

(1) Perché?

e
$$\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^{p-1}\,|z_i - y_i| \le \Big(\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^{(p-1)\,q}\Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\sum_{i=1}^{N} |z_i - y_i|^{p}\Big)^{\frac{1}{p}} .$$
Essendo $(p-1)q = p$, si ha allora
$$\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^{p-1}\,|x_i - z_i| \le [d_p(X,Y)]^{\frac{p}{q}}\, d_p(X,Z)\,,$$
e
$$\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^{p-1}\,|z_i - y_i| \le [d_p(X,Y)]^{\frac{p}{q}}\, d_p(Z,Y)\,.$$
Sostituendo in (1.6), si ha
$$[d_p(X,Y)]^{p} \le [d_p(X,Y)]^{\frac{p}{q}}\,[d_p(X,Z) + d_p(Z,Y)]\,.$$
Dividendo per $d_p(X,Y)$ (che è diverso da zero per ipotesi), si ottiene la disuguaglianza triangolare osservando che $p - p/q = 1$.

Sempre in $\mathbb{R}^N$ è possibile definire
$$d_\infty((x_1,\dots,x_N),(y_1,\dots,y_N)) = \max\{|x_i - y_i|, i = 1,\dots,N\}\,.$$
Lo spazio $(\mathbb{R}^N, d_\infty)$ è uno spazio metrico (verifica molto semplice, in questo caso).

Esercizio 1.10. Dimostrare che
$$\lim_{p\to+\infty} d_p((x_1,\dots,x_N),(y_1,\dots,y_N)) = d_\infty((x_1,\dots,x_N),(y_1,\dots,y_N))\,.$$

Teorema 1.11 (Cauchy-Schwarz e Hölder)**.** *Siano date $\{s_n\}$ e $\{t_n\}$ due successioni di numeri reali;*

a) *se*
$$\sum_{n=1}^{+\infty} s_n^2 < +\infty\,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} t_n^2 < +\infty\,,$$
si ha
$$\sum_{n=1}^{+\infty} |s_n\, t_n| \le \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} s_n^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} t_n^2\Big)^{\frac{1}{2}}\,; \tag{1.7}$$

b) *dati p e q due numeri reali tali che*
$$p > 1\,, \quad q > 1\,, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,,$$
se
$$\sum_{n=1}^{+\infty} |s_n|^p < +\infty\,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} |t_n|^q < +\infty\,,$$

si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |s_n\, t_n| \le \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |s_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |t_n|^q\Big)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.8}$$

Dimostrazione. Dimostriamo solo la prima formula (l'altra ha dimostrazione analoga). Sia N fissato; applicando (1.2), si ha

$$\sum_{n=1}^{N} |s_n\, t_n| \le \Big(\sum_{n=1}^{N} s_n^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{n=1}^{N} t_n^2\Big)^{\frac{1}{2}} \le \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} s_n^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} t_n^2\Big)^{\frac{1}{2}};$$

la seconda disuguaglianza è dovuta al fatto che le serie sono a termini non negativi (e quindi la successione delle somme parziali è monotona crescente). Pertanto, essendo la disuguaglianza precedente vera per ogni N in $\mathbb{N}$, si ha

$$\sup\Big\{\sum_{n=1}^{N} |s_n\, t_n|, n \in \mathbb{N}\Big\} \le \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} s_n^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} t_n^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Essendo la serie di termine generico $|s_n\, t_n|$ una serie a termini non negativi, la successione delle somme parziali è monotona crescente, cosicché l'estremo superiore delle somme parziali coincide con il limite per N tendente a $+\infty$, cioè la somma della serie. □

Esempio 1.12. Sia $p \ge 1$, e siano

$$X = \ell^p = \Big\{\{x_n\} \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty\Big\},$$

$$d_p(\{x_n\}, \{y_n\}) = \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n - y_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Allora (ℓ^p, d_p) è uno spazio metrico. Come al solito, i) e ii) sono di verifica immediata, e più complicato è il controllo della disuguaglianza triangolare. La verifica si effettua come nel caso di $(\mathbb{R}^n, d_p)$, usando (1.8). Se $p = 1$, la verifica discende semplicemente dalla disugaglianza triangolare in $\mathbb{R}$.

Si noti che gli spazi ℓ^p soddisfano le seguenti inclusioni, se $q > p \ge 1$:

$$\ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^q,$$

e le inclusioni sono strette. Per verificare le inclusioni, è sufficiente osservare che se $\{x_n\}$ appartiene a ℓ^p, allora $|x_n|^p$ tende a zero, e quindi $|x_n|$ tende a zero. Pertanto, $|x_n|$ è definitivamente minore di 1, il che implica che $|x_n|^q \le |x_n|^p$ definitivamente (essendo $q > p$). Quindi $\{x_n\}$ appartiene a ℓ^q (per il criterio del confronto). L'inclusione è stretta in quanto (ad esempio) $x_n = 1/[n^{1/q} \ln^2(n)]$ è in ℓ^q ma non in ℓ^p se $p < q$.

Sia poi

$$X = \ell^\infty = \{\{x_n\} \subset \mathbb{R} : \{x_n\} \text{ è limitata}\} \,,$$

$$d_\infty(\{x_n\},\{y_n\}) = \sup\{|x_n - y_n|, n \in \mathbb{N}\}\,. \tag{1.9}$$

Allora (ℓ^∞, d_∞) è uno spazio metrico (la verifica questa volta è facile!) tale che $\ell^p \subset \ell^\infty$ per ogni $p \geq 1$, con inclusione stretta (ogni successione limitata ma non infinitesima non appartiene ad ℓ^p dal momento che la condizione necessaria di convergenza della serie non è verificata).

Esempio 1.13. Siano

$$X = C^0([a,b],\mathbb{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \;\; f \text{ continua}\}\,,$$

e

$$d_\infty(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)|, x \in [a,b]\} = \max\{|f(x) - g(x)|, x \in [a,b]\}\,.$$

Allora $(C^0([a,b],\mathbb{R}), d_\infty)$ è uno spazio metrico, come si verifica facilmente (anche la disuguaglianza triangolare!).

Esempio 1.14. Siano

$$X = C^0([a,b],\mathbb{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \;\; f \text{ continua}\}\,,$$

e

$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx\,.$$

Allora $(C^0([a,b],\mathbb{R}), d_1)$ è uno spazio metrico: la ii) e la iii) sono facilmente verificate (ricordando la monotonia dell'integrale), mentre la i) segue dall'osservazione che se l'integrale del modulo di una funzione continua h è nullo, allora h è identicamente nulla. Infatti, se h non fosse nulla, esisterebbe x_0 in $[a,b]$ tale che $|h(x_0)| > 0$; per il teorema della permanenza del segno, esisterebbe un intorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ sul quale si ha $|h(x)| > |h(x_0)|/2$. Pertanto

$$0 = \int_a^b |h(x)|\, dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |h(x)|\, dx > \delta\, |h(x_0)| > 0\,,$$

da cui l'assurdo.

Teorema 1.15 (Disuguaglianza di Hölder)**.** *Siano f e g due funzioni appartenenti a $C^0([a,b],\mathbb{R})$ e siano p e q maggiori di 1 e tali che $1/p + 1/q = 1$. Allora*

$$\int_a^b |f(x)\, g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}}\,. \tag{1.10}$$

Dimostrazione. è sufficiente partire dalla disuguaglianza di Young, vera per ogni x in $[a, b]$,

$$|f(x)\,g(x)| \leq \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^q}{q}\,,$$

integrare i due termini su $[a, b]$ e poi applicare la disuguaglianza così trovata a

$$\overline{f}(x) = \frac{|f(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}}\,, \qquad \overline{g}(x) = \frac{|g(x)|}{\left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}}\,,$$

non prima di aver osservato che se l'integrale di $|f(x)|^p$ (o di $|g(x)|^q$) è nullo, la f (ovvero la g) è nulla e la disuguaglianza (1.10) è banalmente vera. $\square$

Esempio 1.16. Siano $p > 1$,

$$X = C^0([a, b], \mathbb{R}) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \;\; f \text{ continua}\}\,,$$

e

$$d_p(f, g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\,.$$

Ragionando come nell'Esempio 1.12, ed usando la (1.10), si dimostra facilmente che $(C^0([a, b], \mathbb{R}), d_p)$ è uno spazio metrico.

(!)Esercizio 1.17. Dimostrare che

$$\lim_{p \to +\infty} d_p(f, g) = d_\infty(f, g)\,.$$

Esempio 1.18. Siano

$$X = C^1([a, b], \mathbb{R}) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \;\; f \text{ continua con derivata continua}\}\,,$$

$$\overline{d}_{\infty,1}(f, g) = \sup\{|f'(x) - g'(x)|, x \in [a, b]\} = d_\infty(f', g')\,,$$

e

$$d_{\infty,1}(f, g) = d_\infty(f', g') + d_\infty(f, g)\,.$$

Allora $(C^1([a, b], \mathbb{R}), \overline{d}_{\infty,1})$ non è uno spazio metrico (dal momento che se f e g differiscono per una costante, $\overline{d}$ è nulla), mentre $(C^1([a, b], \mathbb{R}), d_{\infty,1})$ lo è. Dal momento che l'aggiunta di $d_\infty(f, g)$ è dovuta solo alla necessità di distinguere due funzioni la cui differenza è costante, si può considerare su $C^1([a, b], \mathbb{R})$ la distanza

$$\tilde{d}_{\infty,1}(f, g) = d_\infty(f', g') + |f(x_0) - g(x_0)|\,,$$

con x_0 punto qualsiasi di $[a, b]$. In questa maniera, per calcolare la distanza tra f e g è sufficiente "conoscere" le derivate di f e g, ed il valore delle due funzioni in un unico punto (e non su tutto l'intervallo).

2. Convergenza negli spazi metrici

Definizione 2.1. Sia (X, d) uno spazio metrico. Una successione $\{x_n\}$ contenuta in X si dice **convergente** a x_0 in X se si ha

$$\lim_{n \to +\infty} d(x_n, x_0) = 0\,.$$

Quindi, come si vede, la definizione di convergenza in uno spazio metrico è ricondotta (in maniera naturale) alla convergenza a zero in $\mathbb{R}$ (meglio, nello spazio metrico $(\mathbb{R}, |\cdot|)$) della successione $\{d(x_n, x_0)\}$.

Ad esempio, nello spazio metrico dell'Esempio 1.2, le successioni convergenti sono tutte e sole le successioni che sono definitivamente costanti. La convergenza in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ e in $(\mathbb{R}^N, d_p)$ (per ogni p) è la convergenza solita che si dà per successioni in $\mathbb{R}$ ed in $\mathbb{R}^N$ (quest'ultima è — come è noto — equivalente alla convergenza in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ delle N componenti).

La convergenza in $C^0([a, b]), d_\infty)$ è detta **convergenza uniforme**.

Teorema 2.2. *Sia $\{x_n\}$ una successione convergente in (X, d). Allora il limite è unico.*

Dimostrazione. Se x_n convergesse a x_0 e a y_0, si avrebbe

$$\lim_{n \to +\infty} d(x_n, x_0) = \lim_{n \to +\infty} d(x_n, y_0) = 0\,.$$

Ma allora, per la disuguaglianza triangolare,

$$d(x_0, y_0) \leq d(x_n, x_0) + d(x_n, y_0)\,,$$

da cui, ricordando che $d(x_0, y_0) \geq 0$ e passando al limite, $d(x_0, y_0) = 0$. Pertanto, $x_0 = y_0$. □

Consideriamo ora (ℓ^p, d_p), con $1 \leq p \leq +\infty$, e studiamo la convergenza di successioni in tale spazio (successioni di successioni, dunque, essendo elementi di ℓ^p)

Innanzitutto, supponiamo che $\{x^{(k)}\}$ converga in ℓ^p a $x^{(\infty)}$, ovvero che si abbia

$$\lim_{k \to +\infty} d_p^p(x^{(k)}, x^{(\infty)}) = \lim_{k \to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n^{(k)} - x_n^{(\infty)}|^p = 0\,.$$

Dal momento che, per ogni m in $\mathbb{N}$, si ha

$$0 \leq |x_m^{(k)} - x_m^{(\infty)}|^p \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n^{(k)} - x_n^{(\infty)}|^p\,,$$

dal teorema dei carabinieri segue che se $\{x^{(k)}\}$ converge in ℓ^p a $x^{(\infty)}$, allora

$$\lim_{k\to+\infty} x_n^{(k)} = x_n^{(\infty)}\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Definiamo tale convergenza **puntuale** o **componente per componente**. In $(\mathbb{R}^N, d_p)$ la convergenza componente per componente è equivalente alla convergenza; cosa succede in ℓ^p? È vero che se $\{x^{(k)}\}$ converge puntualmente a $x^{(\infty)}$, allora converge in ℓ^p? La risposta è negativa, per due motivi.

Innanzitutto, anche se $x^{(k)}$ appartiene a ℓ^p per ogni k, non è detto che il limite puntuale vi appartenga. Ad esempio, se

$$x_n^{(k)} = \begin{cases} n & \text{se } n \leq k, \\ 0 & \text{se } n > k, \end{cases}$$

allora $\{x^{(k)}\}$ è contenuta in ℓ^p per ogni k (si tratta di calcolare una somma finita di numeri reali), ma il suo limite puntuale, che è la successione dei numeri naturali, non appartiene ad alcun ℓ^p. Poco male, si dirà, possiamo aggiungere la condizione che il limite puntuale appartenga a ℓ^p; in questo caso, possiamo dire che la convergenza puntuale implica la convergenza in ℓ^p? La risposta è, ancora una volta, no: se consideriamo la successione $\{x^{(k)}\}$ definita da $x_n^{(k)} = 1$ se $n = k$ e zero altrimenti, il limite puntuale è la successione nulla (che è in tutti gli ℓ^p), ma

$$d_p(x^{(k)}, 0) = 1\,, \qquad \forall 1 \leq p \leq +\infty\,.$$

Il motivo per cui, in questo caso, non c'è convergenza in d_p è che non abbiamo un controllo sul modo in cui l'n-sima componente della successione tende a zero. Se, invece, possiamo controllare la convergenza delle componenti, è vero che dalla convergenza puntuale si passa a quella in ℓ^p.

Teorema 2.3 (Convergenza dominata in ℓ^p). *Sia $1 \leq p < +\infty$, e sia $\{x^{(k)}\}$ una successione in ℓ^p tale che:*

1) *per ogni n in $\mathbb{N}$, esiste $x_n^{(\infty)}$ in $\mathbb{R}$ tale che $x_n^{(k)}$ tende a $x_n^{(\infty)}$ quando k tende ad infinito;*
2) *esiste $y = \{y_n\}$ in ℓ^p tale che $|x_n^{(k)}| \leq y_n$, per ogni k in $\mathbb{N}$ e per ogni n in $\mathbb{N}$,*

allora $\{x^{(k)}\}$ tende a $x^{(\infty)}$ in ℓ^p.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che, passando al limite per k tendente ad infinito nella disuguaglianza $|x_n^{(k)}| \leq y_n$, si ottiene

$$|x_n^{(\infty)}| \leq y_n\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

da cui segue che

$$|x_n^{(k)} - x_n^{(\infty)}|^p \le (|x_n^{(k)}| + |x_n^{(\infty)}|)^p \le 2^p y_n^p \,. \tag{2.1}$$

D'altro canto, dalla convergenza di $x_n^{(k)}$ a $x_n^{(\infty)}$ segue che

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \sigma > 0\ \exists k_{\sigma,n} \in \mathbb{N}:\ |x_n^{(k)} - x_n^{(\infty)}|^p \le \sigma\,, \quad \forall k \ge k_{\sigma,n}\,. \tag{2.2}$$

Siamo ora pronti a stimare $d_p(x^{(k)}, x^{(\infty)})$. Si ha, per ogni h in $\mathbb{N}$,

$$d_p^p(x^{(k)}, x^{(\infty)}) = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n^{(k)} - x_n^{(\infty)}|^p = \sum_{n=1}^{h} |x_n^{(k)} - x_n^{(\infty)}|^p + \sum_{n=h+1}^{+\infty} |x_n^{(k)} - x_n^{(\infty)}|^p\,.$$

Usando la (2.1) nel secondo termine, abbiamo

$$d_p^p(x^{(k)}, x^{(\infty)}) \le \sum_{n=1}^{h} |x_n^{(k)} - x_n^{(\infty)}|^p + 2^p \sum_{n=h+1}^{+\infty} y_n^p\,.$$

Essendo $\{y_n\}$ in ℓ^p, l'ultima serie è la serie resto di una serie convergente; pertanto, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste h_ε in $\mathbb{N}$ tale che

$$2^p \sum_{n=h+1}^{+\infty} y_n^p \le \frac{\varepsilon}{2}\,, \qquad \forall h \ge h_\varepsilon\,.$$

In particolare, scegliendo (e quindi *fissando*) $h = h_\varepsilon$, abbiamo

$$d_p^p(x^{(k)}, x^{(\infty)}) \le \sum_{n=1}^{h_\varepsilon} |x_n^{(k)} - x_n^{(\infty)}|^p + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

A questo punto, la prima sommatoria ha un numero finito di addendi; usando la (2.2) con n variabile da 1 a h_ε, e con $\sigma = \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$, otteniamo che

$$\forall n = 1\,, \ldots\,, h_\varepsilon\ \exists k_{\varepsilon,n} \in \mathbb{N}:\ |x_n^{(k)} - x_n^{(\infty)}|^p \le \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\,, \qquad \forall k \ge k_{\varepsilon,n}\,.$$

Definendo $k_\varepsilon = \max(k_{\varepsilon,1}, k_{\varepsilon,2}, \ldots, k_{\varepsilon,h_\varepsilon})$ abbiamo dunque che $k \ge k_\varepsilon$ implica che

$$|x_n^{(k)} - x_n^{(\infty)}| \le \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\,, \qquad \forall n = 1\,, \ldots\,, h_\varepsilon\,.$$

Ne segue pertanto che, se $k \ge k_\varepsilon$,

$$d_p^p(x^{(k)}, x^{(\infty)}) \le \sum_{n=1}^{h_e} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2} \le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Abbiamo così dimostrato che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste k_ε in $\mathbb{N}$ tale che $k \ge k_\varepsilon$ implica

$$d_p^p(x^{(k)}, x^{(\infty)}) \le \varepsilon\,,$$

e questa è, per definizione, la convergenza a zero di $d_p^p(x^{(k)}, x^{(\infty)})$ quando k diverge.

$\square$

Come esempio di applicazione, consideriamo la successione $\{x^{(k)}\}$ così definita:

$$x_n^{(k)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} & \text{se } n \le k, \\ 0 & \text{se } n > k. \end{cases}$$

Chiaramente, fissando n in $\mathbb{N}$ e facendo tendere k ad infinito, si ha

$$\lim_{k \to +\infty} x_n^{(k)} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = x_n^{(\infty)} .$$

Dal momento che $x^{(\infty)}$ appartiene a ℓ^p se e solo se $p > 3$, è chiaro che non si può avere convergenza di $x^{(k)}$ a $x^{(\infty)}$ in ℓ^p se $p \le 3$.

Se, invece, $p > 3$, allora si ha

$$|x_n^{(k)}| \le \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = y_n ,$$

e $y = \{y_n\}$ appartiene ad ℓ^p. Per il teorema di convergenza dominata, $x^{(k)}$ converge a $x^{(\infty)}$ in ℓ^p, per ogni $p > 3$.

Che succede se $p = +\infty$? È sufficiente sapere che la successione $x^{(k)}$ è dominata da un elemento (indipendente da k) in ℓ^∞ per concludere che dalla convergenza "puntuale" segue la convergenza in ℓ^∞? La risposta è negativa, come dimostra il seguente controesempio[(2)].

Sia

$$x_n^{(k)} = \mathrm{e}^{-(n-k)^2} .$$

Chiaramente, si ha

$$\lim_{k \to +\infty} x_n^{(k)} = 0 , \qquad \forall n \in \mathbb{N} ,$$

e

$$|x_n^{(k)}| \le 1 , \qquad \forall n \in \mathbb{N} , \ \forall k \in \mathbb{N} ,$$

cosicché, definendo $y_n = 1$ per ogni n, e $y = \{y_n\}$, si ha che $y \in \ell^\infty$, e che

$$|x_n^{(k)}| \le y_n , \qquad \forall n \in \mathbb{N} , \ \forall k \in \mathbb{N} .$$

In altre parole, la successione $\{x^{(k)}\}$ soddisfa entrambe le ipotesi del "teorema di convergenza dominata" in ℓ^∞ (se esistesse un teorema siffatto). Però la successione $\{x^{(k)}\}$ non tende a zero in ℓ^∞ perché

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n^{(k)} - 0| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{e}^{-(n-k)^2} = \mathrm{e}^{-(k-k)^2} = 1 ,$$

che non tende a zero per k che diverge.

---

(2) In realtà, abbiamo già visto un controesempio…

Come possiamo recuperare la convergenza in ℓ^∞? Dobbiamo modificare l'ipotesi di "dominazione", supponendo che esista una successione y_n **infinitesima** tale che

$$|x_n^{(k)} - x_n^{(\infty)}| \leq y_n\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,,\ \forall k \in \mathbb{N}\,.$$

La dimostrazione che, sotto questa ipotesi, si ha convergenza di $x^{(k)}$ a $x^{(\infty)}$ in ℓ^∞ è lasciata al lettore (è sufficiente ragionare sulla falsariga della dimostrazione della convergenza dominata in ℓ^p).

3. Topologia negli spazi metrici

Definizione 3.1. Sia (X, d) uno spazio metrico. Allora:

- fissato x_0 in X e $r > 0$, definiamo

  $$B_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}\,,$$

  la **sfera aperta di centro** x_0 **e raggio** r, e

  $$\overline{B}_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}\,,$$

  la **sfera chiusa di centro** x_0 **e raggio** r;
- un sottoinsieme $A \subseteq X$ si dice **aperto** se

  $$\forall x_0 \in A,\ \exists r > 0 : B_r(x_0) \subset A\,;$$

- un sottoinsieme $C \subseteq X$ si dice **chiuso** se il complementare $C^{\mathrm{c}} = X \setminus A$ è aperto;
- un sottoinsieme $E \subseteq X$ si dice **limitato** se esistono x_0 in X e $r > 0$ tali che $E \subseteq B_r(x_0)$;
- dato $E \subseteq X$, un punto x_0 in X si dice **di accumulazione** per E se

  $$\forall r > 0 \quad \text{si ha} \quad E \cap [B_r(x_0) \setminus \{x_0\}] \neq \emptyset\,;$$

- dato $E \subseteq X$, definiamo il **derivato** di E come

  $$\mathcal{D}(E) = \{x \in X : x \text{ è di accumulazione per } E\}\,;$$

- dato $E \subseteq X$ definiamo la **chiusura** di E come

  $$\overline{E} = E \cup \mathcal{D}(E)\,.$$

- dato $E \subseteq X$ definiamo la **frontiera** di E come

  $$\partial E = \overline{E} \cap \overline{E^{\mathrm{c}}}\,;$$

A proposito degli oggetti definiti in precedenza, vale il seguente risultato:

Teorema 3.2. *Valgono le seguenti proprietà.*

(1) *Se* $\{A_i\}_{i \in I}$ *è una famiglia qualsiasi di aperti, allora*

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{è un aperto.}$$

(2) *Se* $\{A_i\}_{i=1,\ldots,m}$ *sono* m *aperti, allora*

$$A = \bigcap_{i=1}^{m} A_i \quad \text{è un aperto.}$$

(3) *Se* $\{C_i\}_{i \in I}$ *è una famiglia qualsiasi di chiusi, allora*

$$C = \bigcap_{i \in I} C_i \quad \text{è un chiuso.}$$

(4) *Se* $\{C_i\}_{i=1,\ldots,m}$ *sono* m *chiusi, allora*

$$C = \bigcup_{i=1}^{m} C_i \quad \text{è un chiuso.}$$

(5) $\emptyset$ *e* X *sono sia aperti che chiusi.*

(6) *Per ogni* x_0 *di* X *e per ogni* $r > 0$*,* $B_r(x_0)$ *è un aperto, e* $\overline{B}_r(x_0)$ *è un chiuso.*

(7) *Un insieme* $C \subseteq X$ *è chiuso se e solo se*

$$\forall \{x_n\} \subset C : x_n \to x_0 \text{ in } (X,d), \text{ si ha } x_0 \in C.$$

(8) *Un punto* x_0 *di* X *è di accumulazione per* $E \subseteq X$*, se e solo se esiste una successione* $\{x_n\}$ *tutta contenuta in* E*, con* $x_n \neq x_0$ *per ogni* n *in* $\mathbb{N}$*, e tale che* x_n *converge in* (X,d) *a* x_0*.*

(9) *Se* x_0 *è un punto di accumulazione per* $E \subseteq X$*, per ogni* $r > 0$ *esistono infiniti punti in* $E \cap [B_r(x_0) \setminus \{x_0\}]$*.*

(10) *Per ogni insieme* $E \subseteq X$*,* $\overline{E}$ *è chiuso, è l'intersezione di tutti i chiusi contenenti* E*, e quindi è il più piccolo chiuso contenente* E*.*

Dimostrazione. **(1)** Sia x_0 appartenente ad A. Allora esiste un i in I tale che x_0 appartiene ad A_i; essendo A_i aperto, esiste $r > 0$ tale che $B_r(x_0) \subset A_i$; ne segue che $B_r(x_0)$ è contenuta in A, e quindi la tesi.

(2) Sia x_0 appartenente ad A. Allora x_0 appartiene ad ognuno degli A_i; pertanto, per ogni i da 1 ad m esiste un raggio $r_i > 0$ tale che $B_{r_i}(x_0) \subset A_i$. Se definiamo $r = \min(r_1, \ldots, r_m)$, allora

$$B_r(x_0) = \bigcap_{i=1}^{m} B_{r_i}(x_0) \subseteq \bigcap_{i=1}^{m} A_i = A\,,$$

e quindi A è aperto.

(3) e **(4)** Ricordando che

$$\Big(\bigcap_{i\in I} C_i\Big)^{\mathrm{c}} = \bigcup_{i\in I} C_i^{\,\mathrm{c}}\,,$$

e che

$$\Big(\bigcup_{i=1}^{m} C_i\Big)^{\mathrm{c}} = \bigcap_{i=1}^{m} C_i^{\,\mathrm{c}}\,,$$

la tesi segue da (1) e (2).

(5) $\emptyset$ è aperto perché "non c'è niente da verificare", mentre X è aperto perché chiaramente ogni suo punto x_0 è tale che $B_r(x_0) \subset X$ qualsiasi sia $r > 0$. Passando al complementare, $\emptyset = X^{\mathrm{c}}$ e $X = \emptyset^{\mathrm{c}}$ sono chiusi (si noti che nell'ultimo caso il complementare è "relativo ad X").

(6) Sia x in $B_r(x_0)$, diverso da x_0 (altrimenti il risultato è banale), cosicché $d(x,x_0) < r$. Se definiamo $\delta = r - d(x,x_0) > 0$, allora $B_\delta(x) \subset B_r(x_0)$. Infatti, se y appartiene a $B_\delta(x)$ si ha, per la disuguaglianza triangolare,

$$d(y,x_0) \le d(y,x) + d(x,x_0) < r - d(x,x_0) + d(x,x_0) = r\,;$$

ne segue che $B_r(x_0)$ è aperto. Per dimostrare che $\overline{B}_r(x_0)$ è chiuso, sia A il suo complementare, dato da

$$A = \{x \in X : d(x,x_0) > r\}\,.$$

Sia ora x in A e sia $\delta = d(x,x_0) - r > 0$. Allora $B_\delta(x) \subset A$. Infatti, per ogni y in $B_\delta(x)$ si ha $d(y,x_0) > r$. Se infatti tale disuguaglianza non fosse vera, si avrebbe

$$d(x,x_0) \le d(x,y) + d(y,x_0) < \delta + r = d(x,x_0)\,,$$

che è assurdo. Ne segue che $B_\delta(x) \subset A$, che quindi è aperto.

(7) Sia C chiuso, e sia $\{x_n\}$ una successione contenuta in C e convergente (in (X,d)) a x_0. Se, per assurdo, x_0 non appartenesse a C, si avrebbe x_0 in $C^{\mathrm{c}} = A$, un aperto. Esisterebbe quindi $r > 0$ tale che $B_r(x_0) \subset A$, e quindi $B_r(x_0) \cap C = \emptyset$. Questo fatto è però impossibile perché, dal momento che $\{x_n\}$ converge a x_0 in (X,d), la successione $d(x_n,x_0)$ è infinitesima e quindi definitivamente minore di r; in altre parole, la successione $\{x_n\}$ è definitivamente contenuta in $B_r(x_0) \cap C$, che quindi non è vuoto.

Viceversa, supponiamo che ogni successione di elementi di C e convergente in (X,d) converga ad un elemento di C, e dimostriamo che C è chiuso. Se, per assurdo, C non fosse chiuso, il suo complementare A non sarebbe aperto. Non essendo aperto, esisterebbe un x_0 appartenente ad A tale che $B_r(x_0)$ non è tutta contenuta in A, qualsiasi sia $r > 0$; in altre parole, esisterebbe x_0 in A (e quindi non in C) tale che per ogni $r > 0$ esiste un punto x_r non appartenente ad A (e quindi appartenente a C), tale che $d(x_r, x_0) < r$. Scegliendo $r = \frac{1}{n}$ costruiamo così una successione $\{x_n\}$, tutta contenuta in C, e tale che $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$. Per il teorema dei carabinieri, x_n converge in (X, d) a x_0 che quindi, per ipotesi, dovrebbe appartenere a C, mentre invece appartiene al suo complementare A. Dall'assurdo segue la tesi.

(8) Sia x_0 di accumulazione per E. Per definizione, per ogni $r > 0$ esiste un punto x_r, diverso da x_0, appartenente all'intersezione $E \cap B_r(x_0)$. Scegliendo $r = \frac{1}{n}$, costruiamo una successione $\{x_n\}$, tutta contenuta in E, e tale che $0 < d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$. Per il teorema dei carabinieri, x_n converge in (X, d) a x_0, come volevasi dimostrare. Se, viceversa, esiste una successione $\{x_n\}$ di punti di E convergente ad x_0, con $x_n \neq x_0$ per ogni n in $\mathbb{N}$, allora x_0 è di accumulazione per E. Infatti, dato $r > 0$, la successione $\{x_n\}$ è definitivamente contenuta in $B_r(x_0)$ (per definizione di limite) e quindi $E \cap [B_r(x_0) \backslash \{x_0\}]$ è non vuoto (essendo $x_n \neq x_0$).

(9) Ad esempio, la successione $\{x_n\}$ costruita nel punto precedente (perché tale successione deve assumere infiniti valori diversi?). Oppure, se esistesse $r > 0$ tale che $E \cap [B_r(x_0) \backslash \{x_0\}] = \{y_1, \ldots, y_m\}$, detto $r_0 = \min\{d(y_i, x_0),\ i = 1, \ldots, m\}$, si avrebbe che $E \cap [B_\rho(x_0) \backslash \{x_0\}] = \emptyset$ per ogni $\rho \leq r_0$, contraddicendo il fatto che x_0 è di accumulazione per E.

(10) Se x_0 non appartiene ad $\overline{E} = E \cup \mathcal{D}(E)$, allora x_0 non appartiene né ad E, né al suo derivato. Non appartenendo al derivato di E, esiste $r > 0$ tale che $E \cap [B_r(x_0) \backslash \{x_0\}] = \emptyset$, cosicché $B_r(x_0) \backslash \{x_0\} \subset E^{\mathrm{c}}$. D'altra parte, poiché x_0 è in E^{c}, si ha

$$B_r(x_0) = [B_r(x_0) \backslash \{x_0\}] \cup \{x_0\} \subset E^{\mathrm{c}}\,.$$

Abbiamo così dimostrato che, per ogni x_0 nel complementare di $\overline{E}$, esiste $r > 0$ tale che $B_r(x_0) \subset E^{\mathrm{c}}$. È ora chiaro che ogni punto in $B_r(x_0)$ non può essere d'accumulazione per E: se lo fosse, sarebbe limite di una successione di E (per (8)); tale successione dovrebbe quindi appartenere definitivamente a $B_r(x_0)$, cosa che non può essere perché $B_r(x_0)$ è ad intersezione vuota con E. Dunque, $B_r(x_0) \subset (\overline{E})^{\mathrm{c}}$, che è quindi aperto, ed il suo complementare $\overline{E}$ è chiuso, come volevasi dimostrare.

Sia ora C un chiuso contenente E, e dimostriamo che $\overline{E} \subset C$. Siccome $E \subset C$, non resta da dimostrare che $\mathcal{D}(E) \subset C$. Se x_0 è in $\mathcal{D}(E)$, per il punto (8) esiste una successione $\{x_n\}$ tutta contenuta in E e convergente ad x_0. Essendo $E \subset C$, $\{x_n\}$ è una successione di punti di C, convergente a x_0 in (X, d). Essendo C chiuso, per il punto (7) si ha che x_0 appartiene a C. In definitiva, $\mathcal{D}(E) \subset C$, che è quello che si voleva dimostrare.

Pertanto, $\overline{E}$ è un chiuso, contenente E, e contenuto in ogni chiuso che contiene E; è, quindi, il più piccolo chiuso contenente E.

□

Esempio 3.3. Sia (X, d_d), con X qualsiasi e d_d la metrica discreta. Allora:

- $B_r(x_0) = \{x_0\}$ se $r \leq 1$, e $B_r(x_0) = X$ se $r > 1$; se, invece di considerare $B_r(x_0)$, consideriamo $\overline{B}_r(x_0)$, allora abbiamo $\{x_0\}$ se $r < 1$, ed X se $r \geq 1$;
- dal momento che l'unione qualsiasi di aperti è un aperto (per la (1) del Teorema 3.2), allora ogni sottoinsieme di X (che si può scrivere come unione dei suoi punti) è aperto e quindi chiuso (dato che il complementare è aperto essendo un sottoinsieme di X);
- siccome, se $r \leq 1$, $B_r(x_0) = \{x_0\}$, si ha che $B_r(x_0) \setminus \{x_0\} = \emptyset$ per ogni $r \leq 1$. Ne consegue che nessun punto di X può essere di accumulazione per nessun sottoinsieme di X, e quindi $\mathcal{D}(E) = \emptyset$ per ogni $E \subseteq X$;
- dal punto precedente segue ovviamente che $\partial E = \emptyset$ per ogni $E \subseteq X$, e che $\overline{E} = E$ (d'altra parte, ogni sottoinsieme E di X è chiuso, ed è quindi il più piccolo chiuso che contiene se stesso).

Esempio 3.4. Sia $(X, d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, e consideriamo $E = (0, 1] \cup \{2\}$. Allora:

- chiaramente, E non è aperto, dato che ogni intorno di $x = 1$ è della forma $(1 - r, 1 + r)$ e "sconfina" a destra di $x = 1$;
- analogamente, E non è chiuso dato che (usiamo la (7) del Teorema 3.2) la successione $\{\frac{1}{n}\}$ è tutta contenuta in E, ma converge a $x_0 = 0$ che non vi appartiene;
- sia $x = 0$ che $x = 1$ sono di accumulazione per E, dato che ogni insieme della forma $(-r, r)$ e $(1 - r, 1 + r)$ contiene almeno un punto di E diverso (rispettivamente) da 0 e da 1 (si osservi che, in realtà, contiene *infiniti* punti diversi da 0 e da 1); $x = 2$, invece, non è di accumulazione per E dato che non esiste alcuna successione contenuta in E, fatta di punti diversi da 2, che vi converge (e quindi la (8) del Teorema 3.2) non vale;
- siccome ogni punto x in $(0, 1)$ è di accumulazione per E (come si verifica facilmente dato che la successione $x + \frac{1}{n}$ vi converge, si veda la (8) del Teorema 3.2), si ha $\mathcal{D}(E) = [0, 1]$, e $\overline{E} = [0, 1] \cup \{2\}$; essendo inoltre $\mathcal{D}(E^{c}) = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ (verificare per esercizio che $x = 2$ è di accumulazione per il complementare di E), si ha $\partial E = \{0\} \cup \{1\}$.

Esercizio 3.5. Dimostrare che se X è finito, allora $\mathcal{D}(X) = \emptyset$ qualsiasi sia la distanza d. Dedurne che se X è finito, allora ogni sottoinsieme di X è sia chiuso che aperto.

Esercizio 3.6. Dimostrare che $\partial B_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) = r\}$.

4. Compattezza negli spazi metrici

Un ruolo importante nel contesto degli spazi metrici è quello degli insiemi cosiddetti **compatti**.

Definizione 4.1. Dato uno spazio metrico (X, d), e $K \subseteq X$, un **ricoprimento di aperti** di K è una famiglia $\{A_i\}_{i \in I}$ di aperti di X tale che

$$K \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \,.$$

Dato uno spazio metrico (X, d), un sottoinsieme $K \subseteq X$ si dice **compatto** se ogni ricoprimento di aperti di K ammette un ricoprimento *finito*:

$$K \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \quad \Longrightarrow \quad \exists \{A_1, \ldots, A_m\} \subset \{A_i\} : \; K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} A_i \,.$$

Dato uno spazio metrico (X, d), un sottoinsieme $K \subseteq X$ si dice **compatto per successioni** o *sequenzialmente compatto* se da ogni successione $\{x_n\}$ contenuta in K si può estrarre una sottosuccessione convergente ad un punto x_0 di K.

Dato uno spazio metrico (X, d), un sottoinsieme $E \subseteq X$ si dice **totalmente limitato** se per ogni $r > 0$ esistono x_1, ..., x_{m_r} in X tali che

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{m_r} B_r(x_i) \,.$$

Teorema 4.2. *Sia $K \subseteq X$ un compatto. Allora K è chiuso e totalmente limitato. In particolare, K è limitato.*

Dimostrazione. Sia $A = K^{\mathrm{c}}$, e sia x_0 in A. Preso y in K, si ha $y \neq x_0$, e quindi $d_y = d(y, x_0)/3 > 0$. Grazie alla disuguaglianza triangolare, $B_{d_y}(x_0) \cap B_{d_y}(y) = \emptyset$. Inoltre, dato che y appartiene a $B_{d_y}(y)$, si ha

$$K \subseteq \bigcup_{y \in K} B_{d_y}(y) \,,$$

cosicché abbiamo un ricoprimento di aperti di K. Essendo K compatto, esistono y_1, ..., y_m in K tali che

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B_{d_{y_i}}(y_i) \,, \qquad B_{d_{y_i}}(y_i) \cap B_{d_{y_i}}(x_0) = \emptyset \,.$$

Se definiamo

$$r = \min(d_{y_1}, \ldots, d_{y_m}) > 0 \,,$$

si ha
$$B_r(x_0) \subseteq B_{d_{y_i}}(x_0)\,, \qquad \forall i = 1, \ldots, m\,,$$
e quindi
$$B_r(x_0) \cap B_{d_{y_i}}(y_i) = \emptyset\,, \qquad \forall i = 1, \ldots, m\,.$$
Ma allora
$$B_r(x_0) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{m} B_{d_{y_i}}(y_i) \right) = \emptyset\,,$$
e quindi $B_r(x_0) \cap K = \emptyset$; pertanto, $B_r(x_0) \subseteq K^{\mathrm{c}} = A$, e quindi A è aperto. Da questo fatto segue che K è chiuso.

Sia ora $r > 0$; dal momento che $\{B_r(x)\}_{x \in K}$ è un ricoprimento di aperti di K, esiste un sottoricoprimento finito, e quindi esistono x_1, ..., x_{m_r} in K tali che
$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m_r} B_r(x_i)\,,$$
il che prova che K è totalmente limitato.

Per dimostrare che ogni insieme E totalmente limitato è anche limitato, usiamo la definizione di totale limitatezza per ricoprire E con un numero finito di sfere aperte di raggio 1:
$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B_1(x_i)\,.$$
Se definiamo $d_i = 1 + d(x_1, x_i)$ (con $1 \le i \le m$), dalla disuguaglianza triangolare segue che $B_1(x_i) \subseteq B_{d_i}(x_1)$. Infatti, se x è in $B_1(x_i)$, allora
$$d(x, x_1) \le d(x, x_i) + d(x_i, x_1) < 1 + d(x_1, x_i) = d_i\,,$$
come volevasi dimostrare. Se definiamo $d = \max(d_1, \ldots, d_m)$, abbiamo che
$$B_1(x_i) \subseteq B_d(x_1)\,, \qquad \forall i = 1, \ldots, m\,,$$
Ma allora
$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B_1(x_i) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B_d(x_1) = B_d(x_1)\,,$$
e quindi E è limitato.

$\square$

Esempio 4.3. Ricordando che ogni punto è aperto in (X, d_d), è chiaro che $K \subseteq X$ è compatto per la metrica discreta se e solo se è finito.

È anche facile vedere che $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ non è compatto; infatti,
$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n)\,;$$

se esistesse un sottoricoprimento finito, esisterebbero n_1, …, n_m in $\mathbb{N}$ tali che

$$\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^{m} (-n_i, n_i) = (-N, N)\,,$$

dove $N = \max(n_1, \ldots, n_m)$, e chiaramente l'ultima uguaglianza è assurda. D'altra parte, $\mathbb{R}$ non può essere compatto perché non è limitato.

Definiamo ora, per x, y in $\mathbb{R}$,

$$d(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}\,.$$

Per tale metrica, se $0 < r < 1$ abbiamo

$$B_r(0) = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{|x|}{1+|x|} < r\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : |x| < \frac{r}{1-r}\right\},$$

e quindi $B_r^d(0) = B^{|\cdot|}_{\frac{r}{1-r}}(0)$ e, viceversa, $B_r^{|\cdot|}(0) = B^{d}_{\frac{r}{1+r}}(0)$. In altre parole, ogni sfera centrata nell'origine in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ coincide con una sfera, centrata nell'origine ma di raggio diverso, in $(\mathbb{R}, d)$. Ora, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ non è compatto perché dal ricoprimento con intervalli del tipo $(-n, n)$ non si può estrarre alcun sottoricoprimento finito, e quindi nemmeno $(\mathbb{R}, d)$ lo è, perché lo stesso ricoprimento è fatto di aperti in tale spazio metrico. Si osservi però che, mentre $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ non è limitato, $(\mathbb{R}, d)$ lo è, dato che $B_1(0) = \mathbb{R}$. In definitiva, la compattezza è un concetto che dipende dagli aperti, e non dalla limitatezza dell'insieme (anche se, come abbiamo visto, compatto implica limitato — o, meglio, totalmente limitato).

I prossimi teoremi spiegano come "costruire" insiemi compatti.

Teorema 4.4. *Sia $K \subset H \subset X$. Se K è chiuso, e H è compatto, allora K è compatto.*

Dimostrazione. Sia $\{A_i\}_{i\in I}$ una famiglia di aperti di (X, d) che ricopre K. Essendo K chiuso, allora $B = K^{\mathrm{c}}$ è un aperto di (X, d) e

$$H \subseteq X = B \cup \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right).$$

Essendo H compatto, esiste un sottoricoprimento finito formato da $\{A_1, \ldots, A_m\}$ ed, eventualmente, da B. Sia che B faccia parte del sottoricoprimento, sia che non ne faccia parte, si ha

$$K = H \backslash B \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} A_i\,,$$

cosicché K è compatto. □

Il legame "chiusi–compatti" è rafforzato dal seguente teorema.

Teorema 4.5. *Siano $\{K_i\}_{i=1,\ldots,m}$ sottoinsiemi compatti di X. Allora l'unione dei K_i è compatta. Siano $\{K_i\}_{i\in I}$ sottoinsiemi compatti di X. Allora l'intersezione dei K_i è compatta.*

Dimostrazione. Se $\{A_j\}_{j\in J}$ è un ricoprimento di

$$K = \bigcup_{i=1}^{m} K_i \,,$$

allora $\{A_j\}_{j\in J}$ è un ricoprimento di K_i. Essendo K_i compatto, esiste un sottoricoprimento finito $\{A_1^i, \ldots, A_{m_i}^i\}$. Prendendo l'unione degli A_j^i al variare di i tra 1 ed m, ad al variare di j tra 1 e m_i, si ottiene un sottoricoprimento finito di K, che dunque è compatto.

Siccome ognuno dei K_i, essendo compatto, è chiuso, allora K, l'intersezione di tutti i K_i, è chiusa (per il Teorema 3.2, (3)). Inoltre, $K \subset K_1$ (ad esempio), e quindi è un chiuso contenuto in un compatto. Per il teorema precedente, K è compatto. □

Il prossimo teorema è di fondamentale importanza, e spiega a cosa servano gli insiemi compatti.

Teorema 4.6. *Sia $Z \subset K$, con K compatto e Z infinito. Allora $\mathcal{D}(Z) \cap K \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che nessun punto di K sia di accumulazione per Z. Per definizione di punto di accumulazione, per ogni x in K esiste $r_x > 0$ tale che $Z \cap [B_{r_x}(x) \setminus \{x\}] = \emptyset$. In altre parole, $Z \cap B_{r_x}(x)$ è o vuoto, o composto da un unico punto. Essendo

$$Z \subseteq K \subseteq \bigcup_{x\in K} B_{r_x}(x) \,,$$

ed essendo K compatto, esistono x_1, ..., x_m in K tali che

$$Z \subseteq K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B_{r_{x_i}}(x_i) \,.$$

Intersecando con Z si ha

$$Z \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} [B_{r_{x_i}}(x_i) \cap Z] \,,$$

il che è assurdo perché Z è infinito, mentre l'unione a destra è composta da, al più, m punti. □

Una conseguenza del teorema precedente (e della (8) del Teorema 3.2) è il seguente risultato.

Teorema 4.7. *Sia $K \subset X$ un compatto, e sia $\{x_n\}$ una successione contenuta in K. Allora esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ convergente ad un punto x_0 di K. In altre parole, ogni compatto K è sequenzialmente compatto.*

Dimostrazione. Se l'insieme $\{x_n\}$ è costituito da un numero finito di elementi, esiste almeno uno dei valori della successione — sia esso x_0 — che si ripete infinite volte: è allora sufficiente prendere gli indici n tali che $x_n = x_0$ per ottenere una sottosuccessione che converge ad x_0, ed x_0 ovviamente appartiene a K. Se, invece, $Z = \{x_n\}$ è formato da infiniti valori, per il teorema precedente esiste almeno un punto x_0 di accumulazione di Z in K. Dire che x_0 è di accumulazione per Z vuol dire (Teorema 3.2, (8)) che esiste una successione di punti di Z che converge a x_0; per come è fatto Z, una tale successione non può che essere una sottosuccessione di $\{x_n\}$, ed il teorema è dimostrato. $\square$

Negli esempi che abbiamo visto fino ad ora, gli insiemi o erano banali se erano compatti (nel caso della metrica discreta) o non erano compatti. Il prossimo teorema riguarda i compatti di $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Teorema 4.8 (Heine-Borel)**.** *L'intervallo* $[0, 1]$ *è compatto.*

Dimostrazione. Sia $\{A_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento di aperti di $[0, 1]$, e sia

$$E = \{x \in [0, 1] : [0, x] \text{ può essere ricoperto da un numero finito degli } A_i\} .$$

Chiaramente, siccome 0 è in $[0, 1]$, 0 appartiene ad almeno uno degli A_i, e quindi $[0, 0] = \{0\}$ si può ricoprire con un numero finito degli A_i, cosicché 0 appartiene ad E, che quindi è non vuoto. Inoltre, essendo per definizione E contenuto in $[0, 1]$, che è limitato superiormente, esiste finito

$$\alpha = \sup\, E \le 1 .$$

Iniziamo col dimostrare che α appartiene ad E. Infatti, per definizione di α, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste λ in E con $\alpha - \varepsilon < \lambda \le \alpha$. Scegliendo $\varepsilon = \frac{1}{n}$, costruiamo una successione λ_n tutta contenuta in E, quindi in $[0, 1]$, e convergente ad α. Essendo $[0, 1]$ chiuso, per la (7) del Teorema 3.2 il limite di λ_n (che è α) appartiene ad $[0, 1]$. Dal momento che α è in $[0, 1]$, esiste un insieme $\tilde{A}$ del ricoprimento $\{A_i\}$ di $[0, 1]$ tale che α appartiene ad $\tilde{A}$, e quindi esiste $r > 0$ tale che $B_r(\alpha) = (\alpha - r, \alpha + r)$ è contenuto in $\tilde{A}$. Sempre per definizione di estremo superiore, esiste λ appartenente ad E con $\alpha - \frac{r}{2} < \lambda \le \alpha$; pertanto, l'intervallo $[0, \lambda]$ è ricoperto da un numero finito degli A_i, siano essi A_1, ..., A_m. Ma allora,

$$[0, \alpha] \subset [0, \lambda] \cup (\alpha - r, \alpha + r) \subset \tilde{A} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i \right) ,$$

e quindi l'intervallo $[0, \alpha]$ si può ricoprire con un numero finito degli A_i, il che implica che α appartiene ad E.

Se fosse $\alpha < 1$, ripetendo il ragionamento precedente, potremmo trovare $\delta > 0$ sufficientemente piccolo e tale che $B_\delta(\alpha) = (\alpha - \delta, \alpha + \delta) \subset \tilde{A}$ e che $\alpha + \delta < 1$. Ma allora (scegliendo λ in E con $\lambda > \alpha - \delta$) si avrebbe

$$[0, \alpha + \delta/2] \subset [0, \lambda] \cup (\alpha - \delta, \alpha + \delta) \subset \tilde{A} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i \right),$$

e quindi $\alpha + \delta/2$ apparterrebbe ad E, il che è assurdo per definizione di $\alpha = \sup E$. Ne consegue che $\alpha = 1 = \sup E = \max E$, e quindi $[0, 1]$ può essere ricoperto con un numero finito degli A_i.

$\square$

Si noti che il fatto che $[0, 1]$ sia compatto è stato dimostrato usando due sole proprietà di $[0, 1]$: che è chiuso, e che è limitato, cosicché si ha il seguente teorema (una delle due implicazioni è dimostrata nel Teorema 4.2).

Teorema 4.9. *Sia $K \subset \mathbb{R}$. Allora K è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

Come conseguenza del teorema precedente e del Teorema 4.7 abbiamo il seguente risultato.

Teorema 4.10 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Sia $\{x_n\}$ una successione limitata nello spazio metrico $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Allora da $\{x_n\}$ si può estrarre una sottosuccessione convergente.*

Dimostrazione. Se $\{x_n\}$ è limitata, esiste $M > 0$ tale che $|x_n| \leq M$ per ogni n in $\mathbb{N}$. Ne segue che $\{x_n\}$ è una successione contenuta nell'insieme $[-M, M]$, che è compatto essendo chiuso e limitato. Per il Teorema 4.7, possiamo estrarre da $\{x_n\}$ una sottosuccessione convergente.

$\square$

Il seguente teorema (che non dimostreremo) permette di estendere la caratterizzazione dei compatti di $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ alla caratterizzazione dei compatti di $(\mathbb{R}^N, d_p)$, qualsiasi sia p.

Teorema 4.11. *Il cubo unitario $[0, 1]^N$ è compatto in $(\mathbb{R}^N, d_p)$, qualsiasi sia p in $[1, +\infty]$.*

Teorema 4.12. *Sia $K \subset \mathbb{R}^N$. Allora K è compatto in $(\mathbb{R}^N, d_p)$ se e solo se è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. Grazie al Teorema 4.2, è sufficiente dimostrare che se K è chiuso e limitato, allora è compatto. Essendo K limitato, esiste $r > 0$, che potremo supporre intero, tale che $K \subset B_r(0)$. Essendo, qualsiasi sia p, $B_r(0) \subseteq [-r, r]^N$, si ha che $K \subset [-r, r]^N$. Ora, ricordando che n è intero, possiamo vedere $[-r, r]^N$ come l'unione di $(2r)^N$ copie (opportunamente traslate) di $[0, 1]^N$. Essendo $[0, 1]^N$ compatto, anche $[-r, r]^N$ è compatto come unione finita di compatti (Teorema 4.5). Ma allora K è un chiuso contenuto in un compatto e quindi, per il Teorema 4.4, è compatto.

□

Il precedente teorema è — purtroppo / per fortuna — caratteristico solo degli spazi di dimensione finita.

Esempio 4.13. Consideriamo (ℓ^2, d_2), e sia

$$\overline{B}_1(0) = \Big\{ \{x_n\} \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2 \leq 1 \Big\} ,$$

la sfera chiusa di centro l'origine (la successione nulla) e raggio 1. Chiaramente $\overline{B}_1(0)$ è sia chiusa che limitata, ma non è compatta. Se lo fosse, per il Teorema 4.7, da ogni successione in $\overline{B}_1(0)$ si potrebbe estrarre una sottosuccessione convergente. Se troviamo una successione in $\overline{B}_1(0)$ per la quale non esistono sottosuccessioni convergenti, avremo dimostrato che $\overline{B}_1(0)$ non è compatto.

Sia allora $x^{(k)}$ la successione di ℓ^2 definita da $x_n^{(k)} = \delta_{k,n}$ per ogni n in $\mathbb{N}$; $\delta_{n,k}$, il *simbolo di Krönecker*, vale 1 se $n = k$, e zero altrimenti. La successione $x^{(k)}$, avendo un solo elemento non nullo (quello di posto k-simo), è chiaramente in ℓ^2, ed essendo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} [x_n^{(k)}]^2 = 1 ,$$

si ha che $\{x^{(k)}\}$ è contenuta in $\overline{B}_1(0)$. Se $k \neq h$, si ha

$$d_2(x^{(k)}, x^{(h)}) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} [x_n^{(k)} - x_n^{(h)}]^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} ,$$

dato che solo due addendi sono non nulli, e valgono entrambi 1. Supponiamo ora per assurdo che da $\{x^{(k)}\}$ si possa estrarre una sottosuccessione $\{x^{k_j}\}$ convergente in ℓ^2 a $x^{(\infty)}$, ovvero tale che

$$\lim_{j \to +\infty} d(x^{(k_j)}, x^{(\infty)}) = 0 .$$

Per la disuguaglianza triangolare si avrebbe allora

$$\sqrt{2} = d(x^{(k_j)}, x^{(k_{j+1})}) \leq d(x^{(k_j)}, x^{(\infty)}) + d(x^{(k_{j+1})}, x^{(\infty)}) ,$$

da cui l'assurdo $\sqrt{2} \leq 0$ facendo tendere j ad infinito. Oppure, osservando che $x_n^{(k)}$ tende a zero per k tendente ad infinito, l'unico limite possibile per la successione $\{x^{(k)}\}$, e quindi per ogni sua sottosuccessione $x^{(k_j)}$, è $x^{(\infty)} = 0$. Ma nessuna sottosuccessione di $\{x^{(k)}\}$ può convergere a zero dato che

$$d_2(x^{(k)}, 0) = 1\,, \qquad \forall k \in \mathbb{N}\,.$$

Un modo alternativo per dimostrare la non compattezza di $\overline{B}_1(0)$ è il seguente. Sia

$$E = \{\{x_n\} \in \overline{B}_1(0) : x_n \geq 0\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\}\,.$$

Chiaramente, E è chiuso[(3)], ed è un sottoinsieme di $\overline{B}_1(0)$. Se $\overline{B}_1(0)$ fosse compatto, allora anche E lo sarebbe, come chiuso in un compatto. Per mostrare che $\overline{B}_1(0)$ non è compatto, è allora sufficiente dimostrare che E non lo è. Iniziamo con l'osservare che

$$E \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_{\sqrt{2}}(x^{(k)})\,.$$

Infatti, sia $y = \{y_n\}$ appartenente ad E; se $y_n \equiv 0$, allora y appartiene a tutte le sfere (dato che dista 1 da ognuno degli $x^{(k)}$); se, invece, $y_n \not\equiv 0$, sia k il primo indice tale che $y_k \neq 0$; essendo $y_n \geq 0$ per ogni n, si ha allora $y_k > 0$. Pertanto, ricordando che y è in $\overline{B}_1(0)$,

$$d_2^2(\{y_n\}, x^{(k)}) = 1 - 2y_k + \sum_{n=1}^{+\infty} y_n^2 \leq 2 - 2y_k < 2\,,$$

e quindi y appartiene a $B_{\sqrt{2}}(x^{(k)})$. Supponiamo ora per assurdo che si possa estrarre un sottoricoprimento finito: si avrebbe allora, per un numero finito di indici $\{k_1, \ldots, k_m\}$,

$$Z = \{x^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset E \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_{\sqrt{2}}(x^{(k_i)})\,.$$

Intersecando nuovamente con Z, si ha

$$Z = \{x^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_{\sqrt{2}}(x^{(k_i)}) \cap Z = \bigcup_{k=1}^{m} \{x^{(k_i)}\}\,,$$

dato che $x^{(h)} \notin B_{\sqrt{2}}(x^{(k)})$ se $h \neq k$. Si arriva così all'assurdo di un insieme infinito, Z, contenuto in un insieme finito.

Il legame tra compattezza e successioni (o, meglio, tra compattezza e sottosuccessioni), è chiarito dal seguente risultato.

---

(3) Perché?

Teorema 4.14. *Sia K un sottoinsieme (X, d). Allora K è compatto se e solo se è sequenzialmente compatto.*

Dimostrazione. La prima parte del teorema è già stata dimostrata (Teorema 4.7), cosicché non rimane che dimostrare che se K è un insieme tale che da ogni successione contenuta in K si può estrarre una sottosuccessione convergente in K, allora K è compatto.

Supponiamo per assurdo che K non sia compatto, e che esista quindi un ricoprimento $\{A_i\}_{i\in I}$ di K dal quale non si possa estrarre alcun sottoricoprimento finito. Chiaramente, possiamo supporre che I sia infinito (altrimenti non c'è problema ad estrarre un sottoricoprimento finito...), ed anche[(4)] che I sia numerabile, cosicché

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\,.$$

Dal momento che da $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ non si può estrarre alcun sottoricoprimento finito, è chiaro che per ogni n in $\mathbb{N}$ l'insieme

$$E_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i\,,$$

non ricopre K, e quindi per ogni n in $\mathbb{N}$ esiste almeno un punto x_n in $K \setminus E_n$. Abbiamo così costruito una successione $\{x_n\}$ tutta contenuta in K. Essendo K sequenzialmente compatto, esiste una sottosuccessione convergente ad x_0, con x_0 appartenente a K. Esiste pertanto j in $\mathbb{N}$ tale che x_0 appartiene a A_j, che è aperto, e quindi esiste $r > 0$ tale che $B_r(x_0) \subset A_j$. Essendo (una sottosuccessione di) x_n convergente a x_0, infiniti termini della successione appartengono a $B_r(x_0)$, e quindi ad A_j. Questo fatto è però assurdo, perché, per costruzione, A_j contiene al massimo i primi $j-1$ elementi della successione x_n, dato che $h \geq j$ implica che x_h appartiene $K\setminus E_h$ e quindi a $K\setminus A_j$.

□

5. Spazi metrici completi

Il seguente teorema mostra come una successione convergente soddisfi una proprietà aggiuntiva.

Teorema 5.1. *Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $\{x_n\}$ una successione in X convergente a x_0 in X. Allora la successione $\{x_n\}$ soddisfa la* **condizione di Cauchy**, *ovvero*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : d(x_n, x_m) < \varepsilon \qquad \forall n, m \geq n_\varepsilon\,.$$

[(4)] Non è restrittivo, ma non è banale! Serve di nuovo la sequenziale compattezza.

Dimostrazione. Se x_n converge a x_0 in X, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε tale che $d(x_n, x_0) < \varepsilon/2$ per ogni $n \geq n_\varepsilon$. Se n e m sono entrambi maggiori di n_ε si ha allora, per la disuguaglianza triangolare,

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_0) + d(x_0, x_m) < \varepsilon\,,$$

da cui la tesi. □

Esempio 5.2. Il viceversa del teorema precedente non è vero: non tutte le successioni di Cauchy sono convergenti. Sia $X = (0, 2)$ e $d(x, y) = |x - y|$. Allora (X, d) è uno spazio metrico, come si verifica facilmente, e la successione $x_n = 1/n$, pur essendo di Cauchy, non è convergente. La successione è di Cauchy perché è convergente in $(\mathbb{R}, d)$, ma non è convergente in X perché il suo (unico!) limite è zero, che non appartiene ad X.

Definizione 5.3. Uno spazio metrico si dice **completo** se ogni successione di Cauchy è convergente.

Nell'Esempio 1.2 lo spazio è completo perché le successioni di Cauchy sono tutte e sole le successioni definitivamente costanti (quindi convergenti). Tutti gli spazi metrici su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^N$ considerati nei vari esempi sono completi. Per dimostrare questo fatto, ci servono due risultati, che sono interessanti di per sé.

Teorema 5.4. *Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy in (X, d). Allora $\{x_n\}$ è limitata.*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon = 1$, e sia n_ε in $\mathbb{N}$ tale che n, $m \geq n_\varepsilon$ implica $d(x_n, x_m) < 1$. In particolare, abbiamo che

$$m \geq n_\varepsilon \implies d(x_m, x_{n_\varepsilon}) < 1 \implies x_m \in B_1(x_{n_e})\,.$$

Sia ora

$$R = \max(d(x_1, x_{n_\varepsilon}), d(x_2, x_{n_\varepsilon}), \ldots, d(x_{n_\varepsilon - 1}, x_{n_\varepsilon})) + 1\,.$$

Chiaramente R è finito (essendo il massimo di un numero finito di numeri reali) e, per definizione,

$$x_i \in B_R(x_{n_\varepsilon})\,, \qquad \forall i = 1, \ldots, n_\varepsilon - 1\,.$$

Essendo $R \geq 1$, si ha anche

$$x_m \in B_1(x_{n_\varepsilon}) \implies x_m \in B_R(x_{n_\varepsilon})\,, \qquad \forall m \geq n_\varepsilon\,,$$

cosicché tutta la successione $\{x_n\}$ è contenuta nella sfera $B_R(x_{n_\varepsilon})$, ed è quindi limitata. □

Teorema 5.5. *Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy tale che esiste una sottosuccessione $\{x_{n_h}\}$ convergente ad x_0. Allora tutta la successione $\{x_n\}$ converge ad x_0.*

Dimostrazione. Dalla disuguaglianza triangolare, si ha

$$d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_{n_h}) + d(x_{n_h}, x_0)\,.$$

Scegliendo h sufficientemente grande, il secondo termine a destra diventa arbitrariamente piccolo, dato che la sottosuccessione converge ad x_0, e l'indice n_h diventa arbitrariamente grande. Scegliendo anche n grande, il primo termine a destra diventa arbitrariamente piccolo, perché la successione è di Cauchy. Pertanto, se n è sufficientemente grande, il termine a sinistra diventa arbitrariamente piccolo; vale a dire, x_n tende ad x_0. □

Possiamo ora dimostrare che $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ è completo: se, infatti, $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy, $\{x_n\}$ è limitata; per Bolzano-Weierstrass, esiste una sottosuccessione convergente ad un numero reale x_0; essendo però di Cauchy, per il teorema precedente l'intera successione $\{x_n\}$ converge ad x_0, e quindi $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ è completo.

Una volta dimostrato che $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ è completo, è sufficiente osservare che se $\{x^{(n)}\}$ è di Cauchy in $(\mathbb{R}^N, d_p)$, allora le N successioni $\{x_1^{(n)}\}$, …, $\{x_N^{(n)}\}$ sono di Cauchy in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$[(5)], quindi convergenti; essendo la convergenza in $(\mathbb{R}^N, d_p)$ equivalente alla convergenza componente per componente, ne segue che $(\mathbb{R}^N, d_p)$ è completo.

Un primo risultato generale sulla completezza è il seguente.

Teorema 5.6. *Sia (X, d) uno spazio metrico completo, e sia $C \subseteq X$ un insieme chiuso. Allora (C, d) è completo.*

Dimostrazione. Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy in (C, d). Allora $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy in (X, d), che è completo per ipotesi. Pertanto, esiste x_0 in X tale che x_n converge a x_0. Essendo C chiuso, x_0 appartiene a C (Teorema 3.2, (7)), che quindi è completo. □

Definizione 5.7. Sia $(Y, \overline{d})$ uno spazio metrico. Una funzione $f : X \to Y$ si dice **limitata** se $f(X)$ è un sottoinsieme limitato di Y, ovvero se esistono $M > 0$ e $y_0 \in Y$ tali che

$$f(x) \in B_M(y_0)\,, \qquad \forall x \in X\,. \tag{5.1}$$

[(5)] Perché?

Se (X,d) e $(Y,\overline{d})$ sono due spazi metrici, una funzione $f : X \to Y$ si dice **continua in** x_0 di X se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0 :\ d(x,x_0) < \delta_\varepsilon \implies \overline{d}(f(x),f(x_0)) < \varepsilon\,.$$

Una funzione $f : X \to Y$ si dice **continua in** X se è continua in x_0, per ogni x_0 in X.

Esercizio 5.8. Sia (X,d) uno spazio metrico e sia x_0 in X. Dimostrare che la funzione $d_{x_0} : X \to \mathbb{R}$ definita da $d_{x_0}(x) = d(x_0,x)$ è continua.

Definizione 5.9. Siano (X,d) e $(Y,\overline{d})$ due spazi metrici. Definiamo

$$L(X,Y) = \{f : X \to Y\,,\ f \text{ limitata}\}\,,$$

$$C_{\mathrm{b}}(X,Y) = \{f : X \to Y\,,\ f \text{ continua e limitata}\}\,.$$

L'insieme $C_{\mathrm{b}}(X,Y)$ è alle volte anche denotato con $C_\ell(X,Y)$. L'insieme $L(X,Y)$ (e quindi anche $C_{\mathrm{b}}(X,Y)$ che ne è un sottoinsieme) può essere reso uno spazio metrico introducendo la distanza

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in X} \overline{d}(f(x),g(x))\,. \tag{5.2}$$

è facile verificare che d_∞ è effettivamente una distanza; si noti che è ben definita perché sia f che g sono funzioni limitate. Nel caso in cui $(X,d) = ([a,b],|\cdot|)$ e $(Y,\overline{d}) = (\mathbb{R},|\cdot|)$, $C_{\mathrm{b}}(X,Y)$ è proprio $C^0([a,b],\mathbb{R})$, dal momento che la limitatezza delle funzioni continue su $[a,b]$ è data dal teorema di Weierstrass. Inoltre, d_∞ è esattamente la distanza definita nell'Esempio 1.13.

Esempio 5.10. Siano $(X,d) = (\mathbb{N},d_d)$ e $(Y,\overline{d}) = (\mathbb{R},|\cdot|)$. Si ha allora, dal momento che ogni funzione f da X a Y non è niente altro che una successione di numeri reali,

$$L(X,Y) = \{\text{successioni limitate di numeri reali}\} = \ell^\infty\,.$$

Inoltre, essendo ogni "funzione" da X a Y continua (si veda l'Esempio 6.3), si ha $C_{\mathrm{b}}(X,Y) = L(X,Y)$. La distanza d_∞ definita da (5.2) è esattamente la distanza definita su ℓ^∞ da (1.9).

Per quanto riguarda la completezza di $L(X,Y)$ e $C_{\mathrm{b}}(X,Y)$, abbiamo il seguente risultato.

Teorema 5.11. *Siano (X,d) e $(Y,\overline{d})$ due spazi metrici. Se $(Y,\overline{d})$ è completo, lo sono sia $L(X,Y)$ e $C_{\mathrm{b}}(X,Y)$, dotati della metrica definita da* (5.2).

Dimostrazione. Sia $\{f_n\}$ una successione di Cauchy in $(L(X,Y),d_\infty)$. Allora

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}:\sup_{x\in X}\overline{d}(f_n(x),f_m(x))<\varepsilon\qquad\forall n,m\geq n_\varepsilon\,.$$

Per definizione di estremo superiore, questo implica che

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}:\overline{d}(f_n(x),f_m(x))<\varepsilon\qquad\forall n,m\geq n_\varepsilon\,,\ \forall x\in X\,.$$

Pertanto, per ogni x in X la successione $\{f_n(x)\}$ è di Cauchy in $(Y,\overline{d})$, completo, e quindi converge ad un elemento di Y che definiremo $f(x)$. Passando al limite per m tendente ad infinito nella disuguaglianza $\overline{d}(f_n(x),f_m(x))<\varepsilon$, si trova (grazie all'Esercizio 5.8)

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}:\overline{d}(f_n(x),f(x))\leq\varepsilon\,,\qquad\forall n\geq n_\varepsilon\,,\ \forall x\in X\,. \tag{5.3}$$

Per la disuguaglianza triangolare, ed essendo f_{n_ε} limitata per ipotesi, per ogni x di X si ha

$$\overline{d}(f(x),0)\leq\overline{d}(f(x),f_{n_\varepsilon}(x))+\overline{d}(f_{n_\varepsilon}(x),0)\leq\varepsilon+M\,,$$

e quindi f appartiene a $L(X,Y)$. Inoltre, prendendo l'estremo superiore per x in X in (5.3), si ha

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}:d_\infty(f_n(x),f(x))\leq\varepsilon\qquad\forall n\geq n_\varepsilon\,,$$

e quindi f_n converge a f in $(L(X,Y),d_\infty)$.

Se $\{f_n\}$ è una successione di Cauchy in $C_{\rm b}(X,Y)$, lo stesso ragionamento svolto precedentemente permette di costruire una funzione in $L(X,Y)$ tale che f_n converge a f in d_∞. L'unica cosa da dimostrare è pertanto la continuità di f. Se x_0 e x_1 appartengono a X, si ha

$$\overline{d}(f(x_0),f(x_1))\leq\overline{d}(f(x_0),f_{n_\varepsilon}(x_0))+\overline{d}(f_{n_\varepsilon}(x_0),f_{n_\varepsilon}(x_1))+\overline{d}(f_{n_\varepsilon}(x_1),f(x_1))\,.$$

La prima e la terza quantità sono minori di ε, mentre la seconda può essere scelta piccola prendendo x_0 ed x_1 vicini (dal momento che f_{n_ε} è continua). Pertanto, f è continua. $\square$

Corollario 5.12. *Sia $(C^0([a,b],\mathbb{R}),d_\infty)$ che (ℓ^∞,d_∞) sono completi.*

Infine, non penserete mica che ci siamo dimenticati degli spazi ℓ^p, vero?

Teorema 5.13. *Sia $p\geq1$. Lo spazio (ℓ^p,d_p) è completo.*

Dimostrazione. Sia $\{x^{(k)}\}$ una successione di Cauchy in (ℓ^p,d_p). Si ha allora

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists k_\varepsilon\in\mathbb{N}:\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|x_n^{(k)}-x_n^{(h)}|^p\Big)^{\frac1p}<\varepsilon\qquad\forall k,h\geq k_\varepsilon\,. \tag{5.4}$$

Pertanto, per ogni n in $\mathbb{N}$,

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N} : |x_n^{(k)} - x_n^{(h)}| < \varepsilon \qquad \forall k, h \geq k_\varepsilon\,,$$

e quindi la successione $\{k \mapsto x_n^{(k)}\}$ è di Cauchy in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, che è completo. Siano allora $x_k^{(\infty)}$ il limite per n tendente ad infinito di $x_n^{(k)}$, e $x^{(\infty)}$ la successione $\{x_n^{(\infty)}\}$(6). Dal momento che da (5.4) segue che, per ogni N in $\mathbb{N}$,

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N} : \Big(\sum_{n=1}^{N} |x_n^{(k)} - x_n^{(h)}|^p\Big)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \qquad \forall k, h \geq k_\varepsilon\,,$$

passando al limite per h tendente ad infinito, si ha

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N} : \Big(\sum_{n=1}^{N} |x_n^{(k)} - x_n^{(\infty)}|^p\Big)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \qquad \forall k \geq k_\varepsilon\,.$$

Prendendo l'estremo superiore su N in $\mathbb{N}$,

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N} : \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n^{(k)} - x_n^{(\infty)}|^p\Big)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \qquad \forall k \geq k_\varepsilon\,,$$

da cui segue che $\{x^{(k)}\}$ converge a $x^{(\infty)}$ in (ℓ^p, d_p). Il fatto che $x^{(\infty)}$ appartenga ad ℓ^p segue poi dalla disuguaglianza triangolare per d_p:

$$\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n^{(\infty)}|^p\Big)^{\frac{1}{p}} = d_p(x^{(\infty)}, 0) \leq d_p(x^{(\infty)}, x^{(k_\varepsilon)}) + d_p(x^{(k_\varepsilon)}, 0) < +\infty\,,$$

essendo $x^{(k_\varepsilon)}$ fissa in ℓ^p. □

Esempio 5.14. Lo spazio $C^0([a,b]), d_1)$ non è completo. Consideriamo infatti $C^0([-1,1],\mathbb{R})$ e la successione $f_n(x)$ così definita:

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [-1, -1/n], \\ nx & \text{se } x \in (-1/n, 1/n) \\ 1 & \text{se } x \in [1/n, 1]. \end{cases}$$

La successione f_n è di Cauchy; infatti f_n e f_m differiscono al più (se $m > n$) sull'insieme $(-1/n, 1/n)$ e su questo insieme si ha $|f_n(x) - f_m(x)| \leq 2$. Allora

$$d_1(f_n, f_m) = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|\,dx = \int_{-1/n}^{1/n} |f_n(x) - f_m(x)|\,dx \leq \frac{4}{n}\,,$$

(6)Si confronti questo risultato di convergenza "componente per componente" ottenuto usando che la successione è di Cauchy, con il risultato di convergenza "componente per componente" a meno di sottosuccessioni ottenuto con ben maggiore fatica nel successivo paragrafo (opzionale) sul cubo di Hilbert.

che può essere reso minore di ε se n è sufficientemente grande. D'altra parte non esiste nessuna funzione continua f tale che

$$\lim_{n\to+\infty} d_1(f_n, f) = \lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f(x)|\, dx = 0\,.$$

Sia infatti $a > 0$; allora

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{a}^{1} |f_n(x) - f(x)|\, dx = 0\,,$$

essendo questa quantità positiva e minore di $d_1(f_n, f)$. Se n è tale che $1/n < a$ (fatto che accade definitivamente), dalla definizione di f_n si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{a}^{1} |1 - f(x)|\, dx = 0\,,$$

da cui (essendo questa quantità indipendente da n),

$$\int_{a}^{1} |1 - f(x)|\, dx = 0\,,$$

il che implica che $f \equiv 1$ su $[a, 1]$ per ogni $a > 0$. Con ragionamento analogo si prova che $f \equiv -1$ su $[-1, -a]$ con $a > 0$. Ma allora

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 \neq 1 = \lim_{x\to 0^+} f(x)\,,$$

e quindi f non può essere continua in $x = 0$.

Esempio 5.15. Lo spazio $(X, d) = ((0, 1), |\cdot|)$ non è completo. Può, però, essere reso completo, aggiungendo i due punti 0 ed 1, senza modificare la distanza; in altre parole, si può prendere la "chiusura" di X in $\mathbb{R}$ (di $(X, |\cdot|)$ nello spazio metrico $(\mathbb{R}, |\cdot|)$), ed ottenere così uno spazio metrico completo. L'aggiunta dei due punti 0 ed 1 è "minimale" nel senso che per rendere X completo (senza cambiare metrica) non è necessario utilizzare altri punti. Si osservi che esistono successioni di Cauchy tutte contenute in X che convergono a 0 o ad 1 (mentre non esistono successioni di Cauchy contenute in X che convergono ad un qualsiasi numero reale non appartenente a $[0, 1]$).

Lo spazio $(X, d) = (\mathbb{Q}, |\cdot|)$ non è completo. Ad esempio, la successione

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\,,$$

è contenuta in $\mathbb{Q}$, è di Cauchy (perché converge in $\mathbb{R}$ ad "e"), ma il limite non è un numero razionale. Anche in questo caso, come nel precedente, si può rendere $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ completo "aggiungendo" i limiti delle successioni di Cauchy di razionali.

Ricordando che ogni numero reale è limite (in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$) di una successione di razionali (dunque di una successione di Cauchy di razionali), si ottiene tutto $\mathbb{R}$.

Lo spazio $(X, d) = (\{f \in C^0([a, b], \mathbb{R}) : d_\infty(f, 0) < 1\}, d_\infty)$ non è completo. Ad esempio, la successione $f_n(x) = 1 - \frac{1}{n}$ è in X, è di Cauchy (dal momento che converge uniformemente a $f(x) = 1$), ma il suo limite non è in X. Anche in questo caso, si può rendere (X, d) completo "aggiungendo" le funzioni continue su $[a, b]$ tali che $d_\infty(f, 0) = 1$. Il risultato, che è $(\{f \in C^0([a, b], \mathbb{R}) : d_\infty(f, 0) \leq 1\}, d_\infty)$, è completo essendo chiuso in $(C^0([a, b], \mathbb{R}), d_\infty)$, come si verifica facilmente. Si noti che, essendo possibile ottenere ogni funzione f tale che $d_\infty(f, 0) = 1$ come limite uniforme della successione $f_n = \frac{n}{n+1} f$ (che è tutta contenuta in X), e dal momento che nessuna funzione tale che $d_\infty(f, 0) > 1$ può essere ottenuta come limite uniforme di funzioni in X, ancora una volta abbiamo reso X completo aggiungendo i limiti delle successioni di Cauchy contenute in X.

A questo punto ci si può chiedere se l'operazione dell'esempio precedente si può sempre effettuare. La risposta è affermativa, ed è data dal seguente teorema.

Teorema 5.16 (Completamento)**.** *Dato uno spazio metrico (X, d), esiste uno spazio metrico* **completo** $(Y, \overline{d})$ *ed un'applicazione $i : X \to Y$ tale che*

(1) *i è un'***isometria***, ovvero $\overline{d}(i(x_0), i(x_1)) = d(x_0, x_1)$, per ogni x_0, x_1 in X;*
(2) *$i(X)$ è* **denso** *in Y, ovvero la chiusura di $i(X)$ in Y è Y.*

Dimostrazione. Sia
$$\mathcal{C} = \{\{x_n\} \text{ di Cauchy in } (X, d)\}.$$

Passo 1: Se $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ appartengono a $\mathcal{C}$, allora la successione $z_n = d(x_n, y_n)$ è di Cauchy in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Infatti si ha
$$z_n = d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n) = d(x_n, x_m) + z_m + d(y_m, y_n),$$
da cui
$$z_n - z_m \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n).$$
Scambiando il ruolo di n e m si trova la disuguaglianza $z_m - z_n \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n)$, da cui segue
$$|z_n - z_m| \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n).$$
A questo punto, fissato $\varepsilon > 0$, è sufficiente scegliere n ed m più grandi di
$$n_\varepsilon = \max(n_\varepsilon(\{x_n\}), n_\varepsilon(\{y_n\}))$$
per avere che $|z_n - z_m| < \varepsilon$.

Passo 2: Essendo $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ completo, per ogni coppia di successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ di $\mathcal{C}$, esiste il limite di $d(x_n, y_n)$. Definiamo in $\mathcal{C}$ la relazione seguente
$$\{x_n\}\rho\{y_n\} \iff \lim_{n\to+\infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

Si vede facilmente che ρ è una relazione di equivalenza (la transitività è conseguenza della disuguaglianza triangolare) su $\mathcal{C}$. Definiamo Y come lo spazio quoziente di $\mathcal{C}$ modulo la relazione ρ. Successivamente, rendiamo Y uno spazio metrico nel modo seguente: siano $\overline{x}$ e $\overline{y}$ in Y, e siano $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ due successioni in $[\overline{x}]$ e $[\overline{y}]$ rispettivamente. Allora

$$\overline{d}(\overline{x},\overline{y}) = \lim_{n\to+\infty} d(x_n,y_n)\,.$$

Tale definizione è ben posta, dal momento che cambiando rappresentanti in $[\overline{x}]$ e $[\overline{y}]$ il limite non cambia (sempre per la disuguaglianza triangolare). La funzione $\overline{d}$ è non negativa (dal momento che d lo è), e si annulla se e solo se $\overline{x} = \overline{y}$ (per definizione, se il limite di $d(x_n,y_n)$ è zero, $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sono nella stessa classe di equivalenza). La simmetria è conseguenza della simmetria di d, mentre la disuguaglianza triangolare segue passando al limite per n tendente ad infinito nella disuguaglianza

$$d(x_n,y_n) \leq d(x_n,z_n) + d(z_n,y_n)\,.$$

Passo 3: Dato x in X, definiamo $\mathrm{cost}(x)$ la successione che ha tutte le componenti uguali ad x. Tale successione è evidentemente in $\mathcal{C}$. Definiamo $i : X \to Y$ nel modo seguente: $i(x) = [\mathrm{cost}(x)]$. Essendo la definizione di $\overline{d}$ indipendente dalla scelta del rappresentante nella classe di equivalenza, si può scegliere la successione $\mathrm{cost}(x)$ in $[\mathrm{cost}(x)]$ e si ha allora

$$\overline{d}(i(x),i(y)) = \lim_{n\to+\infty} d((\mathrm{cost}(x))_n,(\mathrm{cost}(y))_n) = \lim_{n\to+\infty} d(x,y) = d(x,y)\,,$$

e quindi i è un'isometria.

Passo 4: $i(X)$ è denso in $(Y,\overline{d})$.

Sia $\overline{y}$ in Y, e sia $\{x_m\}$ una successione qualsiasi in $[\overline{y}]$. Definiamo $y_m = i(x_m) = [\mathrm{cost}(x_m)]$ e calcoliamo $\overline{d}(y_m,y)$. Si ha

$$\overline{d}(y_m,y) = \lim_{n\to+\infty} d((\mathrm{cost}(x_m))_n,x_n) = \lim_{n\to+\infty} d(x_m,x_n)\,.$$

Essendo la successione $\{x_m\}$ in $\mathcal{C}$, la successione $\{x_m\}$ è di Cauchy in (X,d). Pertanto, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste n_ε in $\mathbb{N}$ tale che

$$d(x_m,x_n) < \varepsilon\,, \quad \forall n,m \geq n_\varepsilon\,.$$

Questo fatto implica che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste n_ε in $\mathbb{N}$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_m,x_n) \leq \varepsilon\,, \quad \forall m \geq n_\varepsilon$$

(ricordiamo che tale limite esiste perché la successione $\{n \mapsto d(x_m,x_n)\}$ è di Cauchy in $(\mathbb{R},|\cdot|)$). Pertanto, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste n_ε in $\mathbb{N}$ tale che $\overline{d}(y_m,y) \leq \varepsilon$ per ogni $m > n_\varepsilon$, ovvero si ha che $\{y_m\}$ converge a y in $(Y,\overline{d})$.

Passo 5: $(Y,\overline{d})$ è completo.

Sia $\{x^{(n)}\}$ una successione di Cauchy in $(Y,\overline{d})$. Dal momento che $i(X)$ è denso in $(Y,\overline{d})$, per ogni n in $\mathbb{N}$ esiste x_n in X tale che

$$\overline{d}(x^{(n)},i(x_n)) \leq \frac{1}{n}\,. \tag{5.5}$$

Mostriamo che la successione $\{x_n\}$ è in $\mathcal{C}$. Si ha infatti (ricordando che i è un'isometria),

$$d(x_n, x_m) = \overline{d}(i(x_n), i(x_m)) \leq \overline{d}(i(x_n), x^{(n)}) + \overline{d}(x^{(n)}, x^{(m)}) + \overline{d}(x^{(m)}, i(x_m)) .$$

Usando (5.5), e scegliendo n e m sufficientemente grandi (in modo che $\frac{1}{n}$ e $\frac{1}{m}$ siano minori di ε, e in modo che $\overline{d}(x^{(n)}, x^{(m)})$ sia anch'essa minore di ε), si prova che $d(x_n, x_m) < 3\varepsilon$ e quindi $\{x_n\}$ è in $\mathcal{C}$. Sia ora $\overline{x} = [\{x_n\}]$; mostriamo che $\{x^{(n)}\}$ converge a $\overline{x}$ in $(Y, \overline{d})$. Si ha infatti, sempre per (5.5), e per definizione di $\overline{d}$,

$$\overline{d}(\overline{x}, x^{(n)}) \leq \overline{d}(\overline{x}, i(x_n)) + \overline{d}(i(x_n), x^{(n)}) \leq \lim_{m \to +\infty} d(x_n, x_m) + \frac{1}{n} .$$

Ricordando che $\{x_n\}$ è di Cauchy, se n è sufficientemente grande si ha

$$\lim_{n \to +\infty} d(x_n, x_m) \leq \varepsilon ,$$

e $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$. Pertanto, per tali n, $\overline{d}(\overline{x}, x^{(n)}) \leq 2\varepsilon$, da cui la tesi. □

Osservazione 5.17. Si può anche dimostrare che lo spazio metrico $(Y, \overline{d})$ è unico a meno di isometrie, ovvero se esiste un altro spazio metrico $(Z, \tilde{d})$ che verifica 1. e 2. del teorema precedente, allora esiste un'isometria biiettiva $\overline{i}$ tra $(Y, \overline{d})$ e $(Z, \tilde{d})$.

(!)Esercizio 5.18. Nel caso di $(C^0([a, b], \mathbb{R}), d_1)$, chi sono Y e i? Ovvero, se $\{f_n\}$ è una successione di Cauchy in d_1, che proprietà ha il suo limite in Y? È chiaro che non è possibile ragionare come nell'Esempio 5.15, perché in tutti e tre i casi era sufficiente prenderne la chiusura (e scegliere per i l'identità) per completarlo (dato che lo spazio non completo era contenuto in un altro completo). In questo caso $C^0([a, b], \mathbb{R})$ è già "tutto lo spazio", il che vuol dire che sarà necessario ampliarlo con funzioni non continue per renderlo completo. Ma non tutte le funzioni discontinue sono integrabili (secondo Riemann)...

Osservazione 5.19. Consideriamo lo spazio non completo $(\mathbb{Q} \cap [0, 1], |\cdot|)$, e definiamo l'applicazione $\Phi : \mathbb{Q} \cap [0, 1] \to C^0([0, 1]; \mathbb{R})$ definita da

$$\Phi(q)(x) = |x - q| .$$

Osserviamo[7] che se q_1 e q_2 sono in $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$, allora

$$d_\infty(\Phi(q_1), \Phi(q_2)) = \max_{x \in [0,1]} \big| |x - q_1| - |x - q_2| \big| = |q_1 - q_2| ,$$

cosicché Φ risulta essere un'isometria tra $(\mathbb{Q} \cap [0, 1], |\cdot|)$ e $C^0([0, 1]; \mathbb{R})$; chiaramente, Φ è invertibile tra $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ e $\Phi(\mathbb{Q} \cap [0, 1])$. Definiamo ora

$$Y = \overline{\Phi(\mathbb{Q} \cap [0, 1])} ,$$

dove la chiusura è presa in $(C^0([0, 1], \mathbb{R})$. Allora Y, essendo chiuso in uno spazio completo, è completo a sua volta (Teorema 5.6). Abbiamo così costruito un'isometria Φ tra $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ ed Y, ed inoltre, per definizione, $\Phi(\mathbb{Q} \cap [0, 1])$ è densa in Y. Ne segue che (Y, d_∞) è un (quindi, è il) completamento di $(\mathbb{Q} \cap [0, 1], |\cdot|)$. Si vede abbastanza facilmente che

$$Y = \{x \mapsto |x - x_0|, \ x_0 \in [0, 1]\} ,$$

[7] Esercizio!

e quindi Y è isometricamente isomorfo a $[0,1]$, cosicché il completamento di $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ è $[0,1]$ (come ci si poteva aspettare).

6. Continuità negli spazi metrici

Riprendiamo in questa sezione il concetto di funzione continua definito precedentemente.

Definizione 6.1. Siano (X, d) e $(Y, \overline{d})$ due spazi metrici. Una funzione $f : X \to Y$ si dice **continua** in x_0 di X se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0 : d(x, x_0) < \delta_\varepsilon \implies \overline{d}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon\,.$$

La funzione f si dice continua in X se è continua in x_0 per ogni x_0 in X.

Come già per le funzioni f da $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ in sé, la continuità può essere "letta" lungo le successioni.

Teorema 6.2. *Dati (X, d) e $(Y, \overline{d})$ spazi metrici, $f : X \to Y$ è continua in x_0 di X se e solo se per ogni successione $\{x_n\}$ convergente in (X, d) a x_0 si ha che $\{f(x_n)\}$ converge in $(Y, \overline{d})$ a $f(x_0)$.*

Dimostrazione. Supponiamo che f sia continua in x_0, e sia x_n convergente a x_0 in (X, d). Sia $\varepsilon > 0$, e sia $\delta_\varepsilon > 0$ dato dalla definizione di continuità per f in x_0. Dalla convergenza di x_n a x_0 segue che esiste n_{δ_ε} in $\mathbb{N}$ tale che $n \geq n_{\delta_\varepsilon}$ implica $d(x_n, x_0) < \delta_\varepsilon$; per la continuità di f, si ha $\overline{d}(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$. Abbiamo così dimostrato che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_{δ_ε} in $\mathbb{N}$ tale che $n \geq n_{\delta_\varepsilon}$ implica $\overline{d}(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$; ovvero, che $f(x_n)$ tende a $f(x_0)$ in $(Y, \overline{d})$.

Viceversa, supponiamo che $f(x_n)$ tenda ad $f(x_0)$ per ogni x_n convergente a x_0 e dimostriamo che f è continua in x_0. Se per assurdo non lo fosse, esisterebbe $\overline{\varepsilon} > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ esiste un punto x_δ in X tale che $d(x_\delta, x_0) < \delta$ e $\overline{d}(f(x_\delta), f(x_0) \geq \overline{\varepsilon}$. Scegliendo $\delta = \frac{1}{n}$, costruiamo una successione x_n convergente a x_0 e tale che $f(x_n)$ non tende a $f(x_0)$. $\square$

Esempio 6.3. Siano (X, d_d) e $(Y, \overline{d})$ due spazi metrici. Allora ogni funzione $f : X \to Y$ è continua. Infatti, se $\{x_n\}$ è una qualsiasi successione convergente in (X, d_d) a x_0, allora si deve avere $x_n = x_0$ definitivamente. Pertanto, $f(x_n) = f(x_0)$ definitivamente, e quindi $\overline{d}(f(x_n), f(x_0))$ tende a zero.

Tra insiemi compatti e funzioni continue esistono legami forti.

Teorema 6.4. *Siano (X, d) e $(Y, \overline{d})$ due spazi metrici, e $f : X \to Y$ una funzione continua. Se $K \subset X$ è compatto, allora $f(K)$ è compatto.*

Dimostrazione. Dimostriamo che $f(K)$ è sequenzialmente compatto. Sia $\{y_n\} \subset f(K)$ una successione. Per definizione di $f(K)$, per ogni n esiste x_n in K tale che $f(x_n) = y_n$, cosicché $\{x_n\}$ è una successione a valori in K. Essendo K compatto, da $\{x_n\}$ si può estrarre una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ convergente ad x_0 in K. Per continuità (e per il teorema precedente), $f(x_{n_k})$ converge in $(Y, \overline{d})$ a $f(x_0)$; abbiamo così estratto da $\{f(x_n)\}$ una sottosuccessione convergente ad un elemento di $f(K)$, che quindi è sequenzialmente compatto (ovvero, compatto). $\square$

Nel caso particolare in cui $(Y, \overline{d}) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ il teorema precedente diventa noto.

Teorema 6.5 (Weierstrass)**.** *Sia (X, d) uno spazio metrico, e sia $f : X \to \mathbb{R}$ continua. Se K è un compatto di (X, d), allora f ammette sia massimo che minimo su K.*

Dimostrazione. Per il teorema precedente, $f(K)$ è chiuso e limitato in $\mathbb{R}$. Essendo limitato, esiste $\sup f(K)$, finito. Essendo chiuso, l'estremo superiore (che è un punto di accumulazione per $f(K)$) appartiene all'insieme $f(K)$, che quindi ammette massimo. Stesso ragionamento per il minimo.

Alternativamente — è più dettagliatamente: sia S l'estremo superiore di $f(K)$. Per definizione di estremo superiore, possiamo costruire una successione $\{x_n\}$ contenuta in K e tale che $f(x_n)$ converge ad S. Essendo K compatto, da $\{x_n\}$ possiamo estrarre una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ convergente a x_0 in K, cosicché, per continuità, $f(x_{n_k})$ converge a $f(x_0)$; ma $f(x_{n_k})$ converge anche a S (essendo un'estratta di $\{f(x_n)\}$) da cui $f(x_0) = S$, che è quindi un massimo. $\square$

Osservazione 6.6. Un'osservazione sul teorema precedente: continuità (a valori in $\mathbb{R}$) più compattezza implicano l'esistenza di massimo e minimo. Ora: più aperti ci sono nello spazio metrico, più sono le funzioni continue, perché è più "facile" trovare la sfera $B_{\delta_\varepsilon}(x_0)$ la cui immagine è contenuta nella sfera $B_\varepsilon(f(x_0))$; ad esempio, come abbiamo visto, se in X mettiamo la metrica discreta, tutte le funzioni a valori reali sono continue. D'altra parte, meno sono gli aperti dello spazio metrico, più è "facile" trovare compatti (ad esempio, in uno spazio topologico che abbia un numero finito di aperti tutti gli insiemi sono compatti[(8)]): se in X mettiamo la metrica discreta, gli aperti sono talmente tanti che solo gli insiemi finiti sono compatti (e quindi sono pochi).

Dal momento che massimizzare o minimizzare quantità è importante per quasi tutte le applicazioni della matematica, trovare una distanza (o, meglio, una topologia) che permettesse di avere sia tante funzioni continue da un lato che tanti

---

[(8)] Trovare un esempio di spazio metrico siffatto.

compatti dall'altro è stata una delle "conquiste matematiche" del secolo scorso, conquista che ha aperto la strada a nuovi (ed ancora vitali) campi di ricerca.

Il secondo risultato che lega compattezza e continuità dimostra che le funzioni continue sui compatti sono "un po' più che continue".

Teorema 6.7 (Heine-Cantor)**.** *Siano (X, d) e $(Y, \overline{d})$ spazi metrici, sia K un sottoinsieme compatto di X, e sia $f : K \to Y$ una funzione continua. Allora f è uniformemente continua, ovvero*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \delta_\varepsilon > 0 : d(x, y) < \delta_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \overline{d}(f(x), f(y)) < \varepsilon\,.$$

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che f non sia uniformemente continua. Allora esiste $\overline{\varepsilon} > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ possiamo trovare due punti x_δ e y_δ in K tali che $d(x_\delta, y_\delta) < \delta$ e $\overline{d}(f(x_\delta), f(y_\delta)) \geq \overline{\varepsilon}$. Scegliendo $\delta = \frac{1}{n}$ possiamo costruire così due successioni contenute in K, $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, tali che, per ogni n in $\mathbb{N}$,

$$d(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n} \qquad \text{e} \qquad \overline{d}(f(x_n), f(y_n)) \geq \overline{\varepsilon}\,.$$

Consideriamo ora la successione $\{x_n\}$; essendo contenuta in K, che è compatto, esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ convergente a x_0 appartenente a K, ovvero tale che

$$\lim_{k \to +\infty} d(x_{n_k}, x_0) = 0\,.$$

Ma allora, per la disuguaglianza triangolare,

$$d(y_{n_k}, x_0) \leq d(y_{n_k}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) \leq \frac{1}{n_k} + d(x_{n_k}, x_0)\,.$$

Facendo tendere k ad infinito, abbiamo così

$$\lim_{k \to +\infty} d(y_{n_k}, x_0) = 0\,,$$

e quindi anche $\{y_{n_k}\}$ converge a x_0. Essendo f continua per ipotesi,

$$\lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) = \lim_{k \to +\infty} f(y_{n_k})\,,$$

da cui — sempre grazie alla disuguaglianza triangolare — segue che

$$\lim_{k \to +\infty} \overline{d}(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) = 0\,.$$

Ma quest'ultimo fatto è impossibile, perché $\overline{d}(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \geq \overline{\varepsilon}$ per ogni k, e quindi non può tendere a zero quando k diverge. □

Osservazione 6.8. Per chiarire meglio la differenza tra "continuità in un insieme" e "uniforme continuità in un insieme", riscriviamo le due definizioni:

- una funzione è continua in un insieme E se, per ogni x in E, e per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta_{\varepsilon,x} > 0$ tale che se $d(x,y) < \delta_{\varepsilon,x}$, allora $\overline{d}(f(x), f(y)) < \varepsilon$;
- una funzione è uniformemente continua in un insieme E se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che se $d(x,y) < \delta_\varepsilon$, allora $\overline{d}(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Come si vede, l'uniforme continuità afferma che il valore di δ da scegliere non dipende dal punto in cui stiamo controllando la continuità di f, ma solo da ε (l'errore che vogliamo commettere sull'asse delle ordinate); la continuità in un insieme, invece, ci dice che il valore di δ da scegliere dipende non solo da ε, ma anche dal punto che stiamo considerando.

Per capire meglio, consideriamo due funzioni continue su due insiemi non compatti; iniziamo da $f(x) = x^2$ su $\mathbb{R}$. Fissati x_0 in $\mathbb{R}$, $x_0 > 0$, e $\varepsilon > 0$, vogliamo determinare $\delta > 0$ tale che $|x - x_0| < \delta$ implica $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$. Ora

$$|x^2 - x_0^2| < \varepsilon \iff x_0^2 - \varepsilon < x^2 < x_0^2 + \varepsilon \iff \sqrt{x_0^2 - \varepsilon} < x < \sqrt{x_0^2 + \varepsilon}\,,$$

e quindi, se definiamo

$$\delta = \min\left(x_0 - \sqrt{x_0^2 - \varepsilon}, \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - x_0\right),$$

abbiamo che

$$|x - x_0| < \delta \implies \sqrt{x_0^2 - \varepsilon} < x < \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} \iff |x^2 - x_0^2| < \varepsilon\,.$$

In altre parole, il "δ della continuità" è dato dalla funzione

$$\delta(\varepsilon, x_0) = \min\left(x_0 - \sqrt{x_0^2 - \varepsilon}, \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - x_0\right).$$

Che succede se x_0 tende a più infinito (qui sfruttiamo la non limitatezza di $\mathbb{R}$, che "genera" la non compattezza di $\mathbb{R}$)? È facile vedere, razionalizzando, che

$$\lim_{x_0 \to +\infty} \left[x_0 - \sqrt{x_0^2 - \varepsilon}\right] = \lim_{x_0 \to +\infty} \left[\sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - x_0\right] = 0\,,$$

e quindi non è possibile trovare un valore di δ che sia indipendente da x_0.

Consideriamo ora $f(x) = \frac{1}{x}$ con x in $(0,1)$ (che non è compatto perché non è chiuso); ripetendo i calcoli, vogliamo trovare $\delta > 0$ tale che

$$|x - x_0| < \delta \implies \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon\,.$$

Ora,

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{x_0} - \varepsilon < \frac{1}{x} < \frac{1}{x_0} + \varepsilon\,,$$

e l'ultima disuguaglianza è verificata se e solo se

$$\frac{x_0}{1 + \varepsilon\, x_0} < x < \frac{x_0}{1 - \varepsilon\, x_0}\,.$$

Ripetendo il ragionamento precedente, dobbiamo scegliere

$$\delta(\varepsilon, x_0) = \min\left(x_0 - \frac{x_0}{1+\varepsilon\, x_0}, \frac{x_0}{1-\varepsilon\, x_0} - x_0\right),$$

ed è facile vedere che

$$\lim_{x_0 \to 0} \delta(\varepsilon, x_0) = 0\,,$$

cosicché non è possibile scegliere un valore di δ indipendente da x_0[9].

Grazie all'essere uniformemente continue le funzioni continue su un compatto di $\mathbb{R}$, è possibile dimostrare che tutte le funzioni continue su un compatto sono integrabili secondo Riemann; è sufficiente, infatti, fissato $\varepsilon > 0$, prendere l'ampiezza della partizione minore di δ_ε (dato dall'uniforme continuità) per dimostrare che la differenza tra somme superiori e somme inferiori è minore di una costante per ε.

7. Il Teorema delle contrazioni

Molto spesso, in analisi, risolvere un'equazione comporta la risoluzione di un cosiddetto **problema di punto fisso**. Data una funzione $f : X \to X$ (è importante che lo spazio di partenza e quello di arrivo siano lo stesso), un elemento $\overline{x}$ di X si dice **punto fisso** di f se si ha $f(\overline{x}) = \overline{x}$.

Ogni equazione $g(x) = 0$ (con g, ad esempio, definita su $\mathbb{R}$ e a valori reali) si può riscrivere come problema di punto fisso; infatti, $g(x_0) = 0$ se e solo se $x_0 + g(x_0) = x_0$, ovvero se e solo se x_0 è punto fisso per la funzione $f(x) = x + g(x)$. Fin qui, nulla di trascendentale: abbiamo solo trasformato il problema in un altro equivalente, e apparentemente più difficile (non si capisce perché risolvere l'equazione $x^2 - 1 = 0$ sia più complicato (o più semplice) di trovare un punto fisso per la funzione $x + x^2 - 1$).

In alcuni casi, però, il problema di risolvere un'equazione si presenta naturalmente sotto forma di punto fisso, come nell'esempio che segue.

Esempio 7.1. Vogliamo trovare $x > 0$ soluzione di

$$x^3 = \ln(2 + x)\,. \tag{7.1}$$

Per risolverla, operiamo così: fissiamo x_0 in $\mathbb{R}$, e consideriamo l'equazione (più semplice)

$$x^3 = \ln(2 + x_0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \sqrt[3]{\ln(2 + x_0)}\,,$$

e costruiamo l'applicazione S da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ definita da

$$S(x_0) = \sqrt[3]{\ln(2 + x_0)}\,,$$

[9]Perché se facciamo tendere x_0 ad 1, troviamo invece un limite strettamente positivo?

ovvero $S(x_0)$ è l'unica radice reale y dell'equazione $y^3 = \ln(2 + x_0)$, cioè tale che $[S(x_0)]^3 = \ln(2 + x_0)$. Sia ora $\overline{x}$ un punto fisso di S (supponiamo di avere degli strumenti (cioè, teoremi) che ci garantiscano che S ha un punto fisso). Questo vuol dire che si ha

$$[\overline{x}]^3 = [S(\overline{x})]^3 = [\text{per definizione di } S] = \ln(2 + \overline{x}),$$

e quindi $\overline{x}$ risolve (7.1). Pertanto, un teorema di esistenza di punto fisso ci permette di "dimostrare" un teorema di esistenza per un'equazione.

Di teoremi di punto fisso ne abbiamo già incontrato uno, sia pure "sotto mentite spoglie".

Teorema 7.2. *Sia $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ una funzione continua. Allora esiste $\overline{x}$ in $[-1, 1]$ tale che $f(\overline{x}) = \overline{x}$.*

Dimostrazione. Se $f(1) = 1$ o se $f(-1) = -1$, non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo allora che $f(1) \neq 1$ e che $f(-1) \neq -1$. Siccome f assume valori in $[-1, 1]$, deve essere per forza

$$f(1) < 1, \qquad f(-1) > -1.$$

Definiamo ora $g(x) = f(x) - x$. Allora g è continua da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ ed è tale che

$$g(1) = f(1) - 1 < 0, \qquad g(-1) = f(-1) - (-1) = f(-1) + 1 > 0.$$

Per il teorema dell'esistenza degli zeri, esiste $\overline{x}$ in $(-1, 1)$ tale che $g(\overline{x}) = 0$, cioè tale che $f(\overline{x}) = \overline{x}$. $\square$

Esercizio 7.3. Supponiamo ora di sapere che il Teorema 7.2 è vero. Dimostrare il Teorema di esistenza degli zeri per funzioni continue usando il Teorema 7.2 (ed il Teorema di Weierstrass).

Il problema è che spesso è difficile verificare non già la continuità di f, quanto piuttosto il fatto che esista un insieme "invariante" per la funzione f (come nel teorema precedente, in cui $[-1, 1]$ andava a finire in se stesso). Ovviamente ogni funzione può essere vista come funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, ma la dimostrazione precedente non funziona, in quanto è necessario trovarsi su un intervallo limitato.

Nel contesto degli spazi metrici completi, è invece possibile dare un teorema di esistenza (e di unicità) per punti fissi di particolari applicazioni.

Definizione 7.4. Sia (X, d) uno spazio metrico; una funzione $f : X \to X$ si dice una **contrazione** se esiste $L \in [0, 1)$ tale che

$$d(f(x), f(y)) \leq L\, d(x, y), \qquad \forall x, y \in X \tag{7.2}$$

In altre parole, una contrazione è una funzione lipschitziana di costante di lipschitzianità minore (strettamente!) di 1.

Esempio 7.5. Se (X, d_d) è lo spazio dell'Esempio 1.2, le uniche contrazioni sono le funzioni costanti.

In $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ sono contrazioni le funzioni $f(x) = x/2$ ($L = 1/2$), la funzione $x \mapsto x^2$ su $[-1/4, 1/4]$ (nuovamente $L = 1/2$, dimostrarlo con il teorema di Lagrange), mentre non è una contrazione (pur essendo lipschitziana) la funzione $x \mapsto x^2$ su $[0, 1]$.

Teorema 7.6 (Teorema delle contrazioni – Banach-Caccioppoli)**.** *Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $f : X \to X$ una contrazione. Allora esiste un unico punto fisso di f.*

Dimostrazione. Iniziamo con l'unicità; supponiamo per assurdo che esistano x e y in X tali che $f(x) = x$ e $f(y) = y$, e dimostriamo che $x = y$. Allora

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq L\, d(x, y)\,,$$

da cui $(1 - L)\, d(x, y) \leq 0$. Essendo $1 - L$ non negativo, ne segue che deve essere $d(x, y) \leq 0$, da cui $d(x, y) = 0$, e quindi $x = y$.

Per quanto riguarda l'esistenza, sia x_0 in X, e definiamo $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$ e, per ricorrenza, $x_{n+1} = f(x_n)$. Abbiamo così una successione $\{x_n\}$ contenuta in X. Sia n in $\mathbb{N}$ fissato; si ha

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq L\, d(x_n, x_{n-1}) \\ &= L\, d(f(x_{n-1}), f(x_{n-2})) \leq L^2\, d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\leq \ldots \leq L^n\, d(x_1, x_0)\,. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Siano ora $m > n \geq 1$. Allora, per la disuguaglianza triangolare e la (7.3),

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \ldots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &= \sum_{k=n}^{m-1} d(x_{k+1}, x_k) \leq \sum_{k=n}^{m-1} L^k\, d(x_1, x_0) = d(x_1, x_0)\, L^n \sum_{k=n}^{m-1} L^{k-n} \\ &= d(x_1, x_0)\, \frac{L^n\,(1 - L^{m-n})}{1 - L} \leq d(x_1, x_0)\, \frac{L^n}{1 - L}\,. \end{aligned}$$

Siccome $L < 1$,

$$\lim_{n \to +\infty} d(x_1, x_0)\, \frac{L^n}{1 - L} = 0\,.$$

Ne segue che, per ogni $\varepsilon > 0$ fissato, esiste n_ε tale che se n, $m \geq n_\varepsilon$, si ha

$$d(x_m, x_n) \leq \varepsilon\,.$$

Pertanto la successione $\{x_n\}$ è di Cauchy. Essendo (X, d) completo, la successione converge verso un certo $\overline{x}$ di X, cioè $d(x_n, \overline{x})$ tende a zero per n tendente all'infinito. Dunque, essendo $0 \leq d(f(x_n), f(\overline{x})) \leq L\, d(x_n, \overline{x})$, ne segue che $f(x_n)$ converge a $f(\overline{x})$. D'altra parte, però, $f(x_n) = x_{n+1}$ e quindi $f(x_n)$ converge anche a $\overline{x}$. Dunque $f(\overline{x}) = \overline{x}$, come volevasi dimostrare. □

Osservazione 7.7. Si osservi che la dimostrazione è costruttiva: qualsiasi sia x_0, la successione definita per ricorrenza a partire da x_0 converge al punto fisso (che è unico). Ad esempio, sia $f(x) = \cos(x)$ con $X = [0, 1]$ (che è completo con la metrica data da $d(x, y) = |x - y|$). Allora $f : [0, 1] \to [0, 1]$ ed è una contrazione (infatti $|f'(x)| \leq \cos(1) < 1$). Per calcolare il punto fisso si può fare così: accendere la calcolatrice, e settarla in radianti. Scrivere un qualsiasi numero positivo e minore di 1 (che è x_0). Premere il tasto "cos"; il risultato è $x_1 = \cos(x_0)$; premere nuovamente il tasto "cos"; dopo n ripetizioni di questa procedura, il risultato si stabilizza, e il valore trovato è il (in realtà un'approssimazione del) punto fisso ($\overline{x} = 0.739085133215\ldots$).

Nel caso dell'Esempio 7.1, la funzione S (della quale si cerca un punto fisso) è la funzione $S : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ definita da $S(x) = \sqrt[3]{\ln(2 + x)}$. Si ha

$$S'(x) = \frac{1}{3[\ln(2 + x)]^{\frac{2}{3}}\,(2 + x)}\,,$$

che si vede subito essere minore di 1 per ogni $x \geq 0$ (l'estremo superiore è $1/6 \ln(2)^{\frac{2}{3}}$). Pertanto S è una contrazione su $[0, +\infty)$ che è completo. Dunque esiste un unico punto fisso di S, che è l'unica soluzione positiva dell'equazione $x^3 = \ln(2 + x)$.

8. Complementi

In questa sezione, "evitabile" in prima lettura, trovano posto alcune digressioni su argomenti non fondamentali, ma interessanti: la dimostrazione che un sottoinsieme chiuso e limitato di uno spazio di dimensione infinita è compatto (ovviamente, dipende da come è definito. . .), esempio importante per la tecnica di "estrazione diagonale" che viene descritta, una discussione sulla cardinalità (ovvero, sul numero degli elementi) degli insiemi, ed una brevissima introduzione agli spazi normati.

8.1. **Successioni di successioni ed il cubo di Hilbert.** Data $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ricordiamo che una sottosuccessione di $\{x_n\}$ si ottiene assegnando una funzione $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ con la proprietà che ψ sia strettamente crescente (il che è equivalente[10] a chiedere che $\psi(n) \geq n$ per ogni n in $\mathbb{N}$). La sottosuccessione è allora $\{x_{\psi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Ricordiamo inoltre che se x_n converge a x_0, allora ogni sua sottosuccessione converge allo stesso limite.

Ovviamente, data una sottosuccessione, possiamo sempre pensare di estrarre da questa una sotto–sottosuccessione, e da questa un'altra e così via. Quello che vogliamo dimostrare adesso (prima con un esempio e poi nel caso generale), è che, data una "successione di sottosuccessioni di $\mathbb{N}$"[11], esiste un modo per costruire una sottosuccessione di $\mathbb{N}$ che sia, definitivamente, una sotto–sottosuccessione di **ognuna** delle sottosuccessioni della famiglia data.

Per $k \geq 0$, k intero, definiamo $\varphi_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ come $\varphi_k(n) = 2^k\, n$. Viste come successioni, $\varphi_0(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\varphi_1(\mathbb{N}) = \{\text{numeri pari}\}$, $\varphi_2(\mathbb{N}) = \{\text{multipli di } 4\}$, e, in generale, $\varphi_k(\mathbb{N}) = \{\text{multipli di } 2^k\}$. Scrivendo le immagini di φ_k in un'enorme tabella, abbiamo

φ_0	$\boxed{1}$	2	3	4	5	6	7	8	...
φ_1	2	$\boxed{4}$	6	8	10	12	14	16	...
φ_2	4	8	$\boxed{12}$	16	20	24	28	32	...
φ_3	8	16	24	$\boxed{32}$	40	48	56	64	...
φ_4	16	32	48	64	$\boxed{80}$	96	112	128	...
φ_5	32	64	96	128	160	$\boxed{192}$	224	256	...
φ_6	63	128	192	256	320	384	$\boxed{448}$	512	...
φ_7	128	256	348	512	640	768	896	$\boxed{1024}$	...
φ_m	2^m	$2\cdot 2^m$	$3\cdot 2^m$	$4\cdot 2^m$	$5\cdot 2^m$	$6\cdot 2^m$	$7\cdot 2^m$	$8\cdot 2^m$	...

Come si vede, ogni riga contiene gli elementi di posto pari della riga precedente, per cui la successione $\varphi_k(\mathbb{N})$ è una sottosuccessione estratta da $\varphi_{k-1}(\mathbb{N})$, per ogni $k \geq 1$. Consideriamo ora la successione di numeri naturali data da

$$S = \{z_h = \varphi_h(h)\}_{h\in\mathbb{N}}\,,$$

ovvero dai valori presenti sulla diagonale della tabella. Calcolandone i primi elementi (sono quelli "inscatolati"), abbiamo

$$1\,,\ 4\,,\ 12\,,\ 32\,,\ 80\,,\ 192\,,\ 448\,,\ 1024\,,\ \ldots\,,\ k\,2^k\,,\ \ldots$$

---

[10]Perché?

[11]Si veda "Spingitori di cavalieri" e "Spingitori di spingitori di cavalieri" su *Rieducational Channel*.

Fissiamo ora m in $\mathbb{N}$: per costruzione, $\{z_h\}_{h\geq m}$ è una sottosuccessione di $\varphi_m(\mathbb{N})$. Ad esempio, la successione $\{12, 32, 80, 192, \ldots\} = \{z_h\}_{h\geq 3}$ è contenuta nella terza riga della tabella, mentre $\{80, 192, 448, 1024, \ldots\} = \{z_h\}_{h\geq 5}$ è contenuta nella quinta riga della tabella. Questo è dovuto al fatto che:

- $\varphi_m(m)$ si trova nella m-sima riga della tabella per costruzione;
- $\varphi_{m+1}(m+1)$ si trova nella $(m+1)$-sima riga della tabella, che però è composta da gli elementi di posto pari della riga m-sima, e quindi $\varphi_{m+1}(m+1)$ compare anche nella m-sima riga;
- $\varphi_{m+2}(m+2)$ si trova nella $(m+2)$-sima riga, composta dagli elementi di posto pari della riga $(m+1)$-sima, composti a loro volta dagli elementi di posto pari della riga m-sima, cosicché $\varphi_{m+2}(m+2)$ compare nella riga m-sima;
- e così via...

D'altra parte, $z_h = h\,2^h = 2^m\,[h\,2^{h-m}]$ e il numero tra parentesi quadre è un intero se $h \geq m$ (il che fa sì che z_h sia un elemento della successione $\varphi_m(\mathbb{N})$ che è composta dai multipli interi di 2^m).

Dopo questo esempio, passiamo al caso generale di "successioni di (sotto)successioni".

Supponiamo di avere una successione di funzioni $\psi_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, con la proprietà che, al variare di k in $\mathbb{N}\cup\{0\}$, si ha che $\psi_0(n) = n$, ψ_k è strettamente crescente, e che $\psi_{k+1}(\mathbb{N}) \subset \psi_k(\mathbb{N})$ per ogni $k \geq 0$. In altre parole, le ψ_k sono tutte successioni contenute in $\mathbb{N}$, ognuna delle quali è una sottosuccessione della precedente.

Un esempio di funzioni ψ_k è la successione definita da $\psi_k(n) = n\,2^k$, ovvero le φ_k dell'esempio precedente. Per come sono fatte le ψ_k, se scrivessimo le immagini delle ψ_k in una tabella, avremmo che nella riga $(k+1)$-sima compaiono numeri "selezionati" dalla riga precedente (come accade per l'esempio delle φ_k). Se — come prima — definiamo $z_h = \psi_h(h)$, allora vale la stessa proprietà vista in precedenza per le φ_k: se $h \geq m$, $\{z_h\}_{h\geq m}$ è una sottosuccessione di $\psi_m(\mathbb{N})$. Infatti, $z_m = \psi_m(m)$ si trova nella m-sima riga; $z_{m+1} = \psi_{m+1}(m+1)$ si trova nella $(m+1)$-sima riga, e quindi anche nella m-sima; e così via.

Abbiamo così dimostrato il seguente risultato.

Teorema 8.1. *Supponiamo di avere una successione $\{\psi_k(\mathbb{N})\}_{k\geq 0}$ di successioni di $\mathbb{N}$, tutte contenute l'una nell'altra:*

$$\mathbb{N} = \psi_0(\mathbb{N}) \supset \psi_1(\mathbb{N}) \supset \psi_2(\mathbb{N}) \supset \ldots \supset \psi_k(\mathbb{N}) \supset \ldots$$

Se consideriamo la successione di numeri naturali $\{z_h = \psi_h(h)\}_{h\in\mathbb{N}}$, allora

$$\{z_h\}_{h\geq m} \subset \psi_m(\mathbb{N})\,, \qquad \forall m \in \mathbb{N}\,.$$

Definiamo ora il cubo di Hilbert come

$$\mathcal{H} = \left\{ \{x_n\} \in \ell^2 : |x_n| \le \frac{1}{n}\,,\ \forall n \in \mathbb{N} \right\},$$

e dimostriamo che $\mathcal{H}$ è compatto dimostrando che è sequenzialmente compatto.

Sia allora $\{x^{(h)}\}$ una successione di $\mathcal{H}$, il che vuol dire che per ogni h in $\mathbb{N}$ si ha

$$|x_n^{(h)}| \le \frac{1}{n}\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Dal momento che la successione $\{1/n\}$ appartiene ad ℓ^2 e domina la successione $x^{(h)}$ uniformemente rispetto a h, grazie al teorema di convergenza dominata in ℓ^2 (Teorema 2.3) è sufficiente dimostrare che da $x^{(h)}$ si può estrarre una sottosuccessione che converge puntualmente (ovvero, componente per componente) ad una successione $x^{(\infty)}$, per ottenere che da $\{x^{(h)}\}$ si può estrarre una sottosuccessione convergente.

Consideriamo allora la successione di numeri reali $\{x_1^{(h)}\}_{h\in\mathbb{N}}$; per ipotesi si ha $|x_1^{(h)}| \le 1$ per ogni h, e quindi $\{x_1^{(h)}\}_{h\in\mathbb{N}}$ è una successione limitata di numeri reali. Per il teorema di Bolzano-Weierstrass, esiste una sottosuccessione convergente, ovvero esiste una funzione $\psi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente e tale che la successione $\{x_1^{(\psi_1(h))}\}_{h\in\mathbb{N}}$ è convergente ad un numero reale $x_1^{(\infty)}$. Consideriamo ora la successione di numeri reali $\{x_2^{(\psi_1(h))}\}_{h\in\mathbb{N}}$. Sempre per ipotesi, si ha $|x_2^{(\psi_1(h))}| \le \frac{1}{2}$ per ogni h, e quindi, ancora per Bolzano-Weierstrass, si può estrarre una sottosuccessione convergente, ovvero esiste una funzione $\psi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente, tale che $\psi_2(\mathbb{N}) \subset \psi_1(\mathbb{N})$, e tale che $\{x_2^{(\psi_2(h))}\}_{h\in\mathbb{N}}$ è convergente ad un numero reale $x_2^{(\infty)}$. Continuiamo il procedimento, considerando la successione di numeri reali $\{x_3^{(\psi_2(h))}\}_{h\in\mathbb{N}}$; essendo per ipotesi $|x_3^{(\psi_2(h))}| \le \frac{1}{3}$ per ogni h, per Bolzano-Weierstrass esiste una sottosuccessione convergente, ovvero una funzione $\psi_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente, tale che $\psi_3(\mathbb{N}) \subset \psi_2(\mathbb{N})$, e tale che $\{x_3^{(\psi_3(h))}\}_{h\in\mathbb{N}}$ è convergente in $\mathbb{R}$ al numero reale $x_3^{(\infty)}$.

Iterando il procedimento, costruiamo una "successione di (sotto)successioni" $\psi_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che soddisfa le ipotesi del teorema precedente. Pertanto, la successione $\{z_h = \psi_h(h)\}_{h\in\mathbb{N}}$ è tale che $\{z_h\}_{h\ge m}$ è una sottosuccessione di $\psi_m(\mathbb{N})$, per ogni m in $\mathbb{N}$.

Che cosa possiamo dire della successione $\{x^{(z_h)}\}_{h\in\mathbb{N}}$? Chiaramente, è una sottosuccessione estratta da $\{x^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Sia ora $m \ge 1$, e consideriamo la successione di numeri reali $\{x_m^{(z_h)}\}_{h\ge m}$. Dal momento che $\{z_h\}_{h\ge m}$ è una sottosuccessione estratta da $\psi_m(\mathbb{N})$, allora $\{x_m^{(z_h)}\}_{h\ge m}$ è una sottosuccessione estratta da $\{x_m^{(\psi_m(h))}\}_{h\in\mathbb{N}}$. Dal momento che

$$\lim_{h\to+\infty} x_m^{(\psi_m(h))} = x_m^{(\infty)}\,,$$

per definizione di ψ_m, si ha anche

$$\lim_{h\to+\infty} x_m^{(z_h)} = x_m^{(\infty)}\,.$$

Essendo m arbitrario, abbiamo dimostrato che la sottosuccessione $\{x^{(z_h)}\}_{h\in\mathbb{N}}$ converge componente per componente ad $x^{(\infty)}$, e quindi converge allo stesso limite in (ℓ^2, d_2) per il teorema di convergenza dominata. Ne segue che $\mathcal{H}$ è sequenzialmente compatto, e dunque compatto.

8.2. **Cardinalità.** In questa sezione abbandoniamo — temporaneamente — il concetto di spazio metrico, e ci dedichiamo al "contare" gli elementi di un insieme.

Definizione 8.2. Due insiemi E ed F si dicono avere la stessa *cardinalità* se esiste un'applicazione biunivoca $\varphi : E \to F$, mentre E si dice avere cardinalità *minore o uguale* di F se esiste un'applicazione iniettiva tra E ed F, mentre se esiste un'applicazione suriettiva di E in F, la cardinalità di E è *maggiore o uguale* di quella di F.

In generale, dunque, se $E \subset F$ si ha che la cardinalità di E è minore o uguale a quella di F, cosicché se $E \subset F \subset G$ ed E e G hanno la stessa cardinalità, allora F ha la stessa cardinalità di E e di G.

Un insieme si dice *finito* se non esiste alcuna applicazione biunivoca tra E ed un sottoinsieme proprio di E. Di conseguenza, un insieme E è *infinito* se esiste un'applicazione biunivoca tra E ed un suo sottoinsieme proprio.

Ad esempio, $E = \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ è finito, mentre $\mathbb{N}$ è infinito perché l'applicazione φ tra $\mathbb{N}$ ed $\mathbb{N}\backslash\{1\}$ definita da $\varphi(n) = n + 1$ è biunivoca (la sua inversa essendo $\psi(m) = m - 1$).

Definizione 8.3. Un insieme E si dice *numerabile* se ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$, ovvero se esiste un'applicazione biunivoca tra E ed $\mathbb{N}$.

Ad esempio, $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}\backslash\{1\}$, $\{$numeri pari$\}$, $\{$numeri dispari$\}$ e $\{$numeri primi$\}$ sono tutti insiemi numerabili[(12)]. Dati due insiemi numerabili, la loro unione (e quindi qualsiasi unione finita) è ancora numerabile. Infatti, se E e F sono numerabili, siano φ_E e φ_F le due applicazioni biunivoche tra $\mathbb{N}$ ed E e tra $\mathbb{N}$ ed F. Se definiamo

$$\varphi(n) = \begin{cases} \varphi_E(n/2) & \text{se } n \text{ è pari,} \\ \varphi_F((n+1)/2) & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases}$$

abbiamo che φ è suriettiva su $E \cup F$ (essendo φ_E suriettiva su E, e φ_F suriettiva su F). Da questo fatto segue che la cardinalità di $E \cup F$ è minore della cardinalità

(12) Per esercizio, scrivere l'applicazione φ nel caso dei pari e dei dispari.

di $\mathbb{N}$, che però è uguale a quella di E (o di F), che quindi hanno cardinalità minore o uguale a quella di $E \cup F$; se ne deduce che la cardinalità di $E \cup F$ è uguale alla cardinalità di E (o di F), e quindi che $E \cup F$ è numerabile.

In maniera molto più semplice si dimostra che se E è numerabile e F è finito, allora $E \cup F$ è numerabile[13].

Esempio 8.4. $\mathbb{Z}$ è numerabile. Definiamo infatti

$$\varphi(n) = \begin{cases} n/2 & \text{se } n \text{ è pari}, \\ (1-n)/2 & \text{se } n \text{ è dispari}. \end{cases}$$

Allora $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ è biunivoca, e la sua inversa $\psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ è data da

$$\psi(m) = \begin{cases} 2m & \text{se } m > 0, \\ 1-2m & \text{se } m \leq 0. \end{cases}$$

Si vede facilmente che φ è iniettiva (dato che è positiva sui pari e negativa sui dispari, e le due funzioni sono iniettive), ed inoltre

$$\psi(\varphi(n)) = \begin{cases} 2 \cdot (n/2) = n & \text{se } n \text{ è pari}, \\ 1 - 2 \cdot ((1-n)/2) = n & \text{se } n \text{ è dispari}. \end{cases}$$

In maniera del tutto analoga, $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N}) \cup \{0\}$ è numerabile perché unione di due insiemi numerabili e di uno finito.

Esempio 8.5. $\mathbb{Q}$ è numerabile. Per vederlo, ricordiamo che

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \right\} \subset \{(p,q),\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\} = Q\,.$$

Dal momento che $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, se dimostriamo che $\mathbb{N}$ e Q hanno la stessa cardinalità, allora $\mathbb{Q}$ è numerabile. Per semplicità, dimostriamo che esiste un'applicazione biunivoca tra $\mathbb{N}$ e

$$Q^+ = \{(p,q),\ p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^2\,.$$

Iniziamo col definire, per m in $\mathbb{N}$, l'm-simo numero triangolare

$$T_m = \frac{m(m+1)}{2}\,.$$

Fissato n in $\mathbb{N}$ esiste un unico $m \in \mathbb{N}$, ed un unico k in $\{1, \ldots, m\}$ tale che

$$T_{m-1} + 1 \leq n \leq T_m\,, \qquad n = T_m + k\,.$$

Definiamo allora $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2 = Q^+$ come $\varphi(n) = (k, m+1-k)$. In questa maniera, ad esempio, i primi valori di φ sono

$$(1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (1,3),\ (2,2),\ (3,1),\ \ldots$$

[13]Esercizio!

Per l'unicità della decomposizione $n = T_m + k$, è chiaro che l'applicazione è iniettiva; per vedere che è suriettiva, sia (p, q) in $\mathbb{N}^2$; definiamo $m = p + q - 1$ e $k = p$; allora $n = T_m + k$ è tale che $\varphi(n) = (p, q)$ (sempre per l'unicità della decomposizione di n in termini di numeri triangolari).

Avendo dimostrato che $\mathbb{N}^2 = Q^+$ ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$, è sufficiente osservare che Q è numerabile perché è l'unione di due copie di $\mathbb{N}^2$ (ovvero: $p > 0$ e $p < 0$) e di una copia di $\mathbb{N}$ ($p = 0$), che sono tutti insiemi numerabili.

Per spiegare "graficamente" quello che sta succedendo (ovvero, come ci si è inventati la funzione φ) scriviamo Q^+ come un'enorme tabella:

$$
\begin{array}{ccccccc}
(1,1) & (2,1) & (3,1) & (4,1) & (5,1) & (6,1) & \cdots \\
(1,2) & (2,2) & (3,2) & (4,2) & (5,2) & (6,2) & \cdots \\
(1,3) & (2,3) & (3,3) & (4,3) & (5,3) & (6,3) & \cdots \\
(1,4) & (2,4) & (3,4) & (4,4) & (5,4) & (6,4) & \cdots \\
(1,5) & (2,5) & (3,5) & (4,5) & (5,5) & (6,5) & \cdots \\
(1,6) & (2,6) & (3,6) & (4,6) & (5,6) & (6,6) & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots &
\end{array}
$$

La funzione φ "legge" la tabella nel senso delle frecce; è chiaro che è iniettiva, ed è chiaro che, in questo modo, seleziona tutte le coppie (p, q) di $\mathbb{N}^2$.

Esempio 8.6. Sia E un insieme qualsiasi, e sia $\mathcal{P}(E) = \{F : F \subseteq E\}$ l'insieme delle parti di E. Allora la cardinalità di $\mathcal{P}(E)$ è maggiore (strettamente) della cardinalità di E.

Per dimostrare questo fatto, ad ogni sottoinsieme F di E associamo la funzione $\varphi_F : E \to \{0, 1\}$ definita da $\varphi_F(x) = 1$ se x appartiene ad F, e zero altrimenti. Si ha allora una corrispondenza biunivoca S tra $\mathcal{P}(E)$ e $\mathcal{F} = \{f : E \to \{0, 1\}\}$, data da $S(F) = \varphi_F$. La funzione S è chiaramente iniettiva, dato che se $F \neq G$, esiste almeno un x in F che non appartiene a G (o viceversa), da cui $S(F)(x) = \varphi_F(x) = 1$ e $S(G)(x) = \varphi_G(x) = 0$, cosicché $S(F) \neq S(G)$. La funzione S è anche suriettiva: presa f in $\mathcal{F}$, se definiamo $F = f^{-1}(\{1\})$, allora $S(F) = \varphi_F = f$. Pertanto, $\mathcal{P}(E)$ e $\mathcal{F}$ hanno la stessa cardinalità.

Supponiamo ora che E sia finito, di cardinalità m; non è restrittivo supporre che $E = \{1, \dots, m\}$; per quanto detto prima, $\mathcal{P}(E)$ ha la stessa cardinalità dell'insieme $\mathcal{F} = \{f : \{1, \dots, m\} \to \{0, 1\}\}$. Chiaramente, assegnare una funzione f da E in $\{0, 1\}$ è la stessa cosa che assegnare vettore ad m componenti, ognuna delle quali può essere uguale a 0 o ad 1. Contando tali vettori, si vede facilmente che sono 2^m, cosicché la cardinalità di $\mathcal{F}$, e quindi di $\mathcal{P}(E)$, è 2^m. Dal momento che $2^m > m$ qualsiasi sia m (come si dimostra per induzione), abbiamo dimostrato che se E è finito, allora ha una cardinalità strettamente minore alla cardinalità dell'insieme delle sue parti.

Che succede se E è numerabile, ad esempio $E = \mathbb{N}$? Per quanto detto prima, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ha la stessa cardinalità dell'insieme $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}\}$, ovvero dell'insieme di tutte le successioni $\{x_n\}$ con $x_n \in \{0, 1\}$. Quante sono queste successioni? Supponiamo (come si vedrà, per assurdo) che siano numerabili, il che vuol dire che esiste un'applicazione biunivoca φ tra $\mathbb{N}$ e $\mathcal{F}$; vale a dire, possiamo specificare la successione numero 1, la numero 2, la numero 3, e così via. In altre parole, con le successioni a valori in $\{0, 1\}$ possiamo costruire l'ennesima, enorme tabella:

$$
\begin{array}{c|ccccccccc}
\varphi_1 & \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots \\
\varphi_2 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\
\varphi_3 & 1 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\
\varphi_4 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\varphi_5 & 1 & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} & 0 & 1 & 1 & \dots \\
\varphi_6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \boxed{1} & 1 & 1 & \dots \\
\varphi_7 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \boxed{1} & 1 & \dots \\
\varphi_8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \boxed{0} & \dots \\
 & & & & & & & & & \\
\varphi_8 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots
\end{array}
$$

Prendiamo ora i numeri sulla diagonale[14], vale a dire $\varphi(n)_n$, e costruiamo una successione x_n a valori in $\{0, 1\}$ nel modo seguente: se $\varphi(n)_n = 1$, poniamo $x_n = 0$, mentre se $\varphi(n)_n = 0$, poniamo $x_n = 1$. Nel nostro caso,

$$\{x_n\} = \{0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ \dots\}\,.$$

Essendo x_n una successione a valori in $\{0, 1\}$, possiamo identificare $\{x_n\}$ con un elemento di $\mathcal{F}$; pertanto, $\{x_n\}$ deve essere una delle (infinite) righe della tabella. Ma quale? Non la prima, perché x_n inizia con zero, e la prima riga inizia con 1. Non la seconda, perché $x_2 = 0$ mentre $\varphi(2)_2 = 1$; non la terza, perché $x_3 = 0$ mentre $\varphi(3)_3 = 1$; non la quarta, perché... Non c'è! Questo vuol dire che la tabella

[14] Questo metodo è detto "Metodo diagonale di Cantor", da Georg Cantor che per primo lo utilizzò.

non è completa: abbiamo costruito un elemento di $\mathcal{F}$ che non fa parte della tabella; la "pretesa" che la tabella esaurisse $\mathcal{F}$ era errata. Poco male, si dirà, ci siamo sbagliati; possiamo aggiungere $\{x_n\}$ alla tabella; ad esempio, sopra la prima riga. Ma, allora, possiamo ripetere la costruzione precedente con la "nuova diagonale" e costruire una seconda successione $\{y_n\}$ che appartiene a $\mathcal{F}$ ma non è nella tabella. Possiamo aggiungere anche questa successione, ma così facendo apriamo la porta ad un'ulteriore diagonale, che genera un ulteriore elemento assente nella tabella... In altre parole, ogni volta che pensiamo di aver trovato una tabella "completa", possiamo dimostrare che completa non è; dunque, è la premessa ad essere sbagliata: non esiste una funzione biunivoca tra $\mathbb{N}$ e $\mathcal{P}(\mathbb{N})$; dal momento che è sempre possibile "immergere" $\mathbb{N}$ in $\mathcal{P}(\mathbb{N})$[15] abbiamo dimostrato che $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ha una cardinalità maggiore di $\mathbb{N}$.

Esempio 8.7. La cardinalità di $\mathbb{R}$ è uguale alla cardinalità di $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Iniziamo col dimostrare che la cardinalità di $[0,1)$ è la stessa di $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Infatti, se x appartiene a $[0,1)$, esiste un'unica successione $\{a_n\}$ a valori in $\{0,1\}$, la successione delle cifre binarie di x, con queste proprietà: a_n non è definitivamente uguale ad 1, e

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^k}\,.$$

Pertanto, possiamo costruire un'applicazione iniettiva da $[0,1)$ a $\mathcal{F}$ associando ad ogni x in $[0,1)$ la sua successione di cifre binarie. In questa maniera, però, non otteniamo tutto $\mathcal{F}$, perché le successioni di $\mathcal{F}$ che valgono definitivamente 1 non provengono da alcun x in $[0,1)$. Quante sono, però, tali successioni? Se le contiamo, sono: una successione fatta di soli 1 (che — come sottoinsieme di $\mathbb{N}$ — sarebbe tutto $\mathbb{N}$); una successione che inizia per 0 e prosegue con tutti 1 (sarebbe $\mathbb{N}\backslash\{1\}$); due successioni che valgono 1 dal terzo indice in poi, e che hanno i primi due uguali a $(0,0)$ e a $(1,0)$[16]; quattro successioni che valgono 1 dal quarto indice in poi e che iniziano con $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$; in generale, esistono 2^{m-2} successioni che valgono 1 dall'm-simo indice in poi, valgono 0 al posto $m-1$, e tutte le possibili combinazioni di 0 ed 1 nei primi $m-2$ posti. Se prendiamo tutte le successioni che sono in $\mathcal{F}$ senza provenire da elementi di $[0,1)$ ci accorgiamo che sono sì infinite (m può essere preso arbitrariamente grande), ma sono "numerabili": sono 1, più 1, più 2, più 4, più 8, eccetera[17]. Ora, se

[15] Come?

[16] Dobbiamo scartare $(1,1)$ e $(0,1)$ perché le abbiamo già contate!

[17] Sono numerabili nel senso che potremmo costruire una tabella con infinite righe e con 1, 1, 2, 4, 8 elementi per riga, e contare gli elementi riga per riga.

eliminiamo da $\mathcal{F}$, che non è numerabile, un insieme numerabile di successioni, il risultato continua ad essere non numerabile (se, per assurdo, fosse numerabile, potremmo ottenere $\mathcal{F}$ come unione di insiemi numerabili, fatto che lo renderebbe numerabile — cosa che non è). Pertanto, $\mathcal{F}$ meno le "successioni che valgono definitivamente 1" è a) in corrispondenza biunivoca con $[0, 1)$ e b) non numerabile. Abbiamo così dimostrato che $[0, 1)$ non è numerabile.

Eliminando lo 0, abbiamo che $(0, 1)$ non è numerabile (se lo fosse...). Ne segue che $\mathbb{R}$ è a sua volta non numerabile, dato che l'applicazione $\varphi : (0, 1) \to \mathbb{R}$ che a x associa $\mathrm{tg}(\pi(x - \frac{1}{2}))$ è biunivoca.

Esercizio 8.8. Costruire un'applicazione biunivoca da $[0, 1)$ in $(0, 1)$[18].

8.3. **Gli spazi normati.** Come abbiamo detto all'inizio, uno spazio metrico è una coppia (X, d), con X un insieme e d una distanza. Sull'insieme X non si fa alcuna ipotesi; in altre parole, non viene richiesta nessuna struttura. Per poter definire una **norma**, invece, lo spazio X deve essere almeno uno spazio vettoriale; per semplicità, supporremo sempre che X sia uno spazio vettoriale sui reali.

Definizione 8.9. Uno spazio normato è una coppia $(X, \|\cdot\|)$, con X spazio vettoriale, e $\|\cdot\|$ un'applicazione da X in $\mathbb{R}$ tale che

i) $\|x\| \geq 0$ per ogni x in X, e $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$;
ii) $\|\lambda\, x\| = |\lambda|\, \|x\|$ per ogni x in X e per ogni λ in $\mathbb{R}$;
iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ per ogni x e y in X.

Esempi di spazi normati sono $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, come si verifica facilmente, e $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_p)$, dove $p \geq 1$ e

$$\|(x_1, \ldots, x_N)\|_p = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

La verifica che $\|\cdot\|_p$ sia una norma è lasciata come esercizio (si tratta di applicare la disuguaglianza di Hölder in maniera opportuna). È anche facile verificare che $(C^0([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, dove

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| ,$$

è uno spazio normato.

A ben vedere, gli esempi precedenti sono stati ottenuti a partire dagli esempi degli spazi metrici definiti nel primo paragrafo semplicemente considerando come norma del vettore x la sua distanza dal vettore nullo. Questo fatto non è però vero sempre; ovvero, se abbiamo uno spazio vettoriale X con una distanza d, la

[18] Attenzione: è assai difficile!

funzione $\|x\| = d(x,0)$ non è necessariamente una norma. Quello che è sempre vero, invece, è il contrario.

Proposizione 8.10. *Sia* $(X, \|\cdot\|)$ *uno spazio normato; allora la funzione* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *definita da* $d(x,y) = \|x-y\|$ *è una distanza su* X*.*

Dimostrazione. Che $d(x,y)$ sia non negativa, e nulla se e solo se $x = y$, segue dal primo assioma sulle norme. Che sia simmetrica, segue dal secondo:

$$d(y,x) = \|y-x\| = \|-(x-y)| \ = |-1|\,|\ x-y\| = \|x-y\| = d(x,y)\,.$$

La disuguaglianza triangolare, infine, segue dalla iii):

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \le \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y)\,,$$

come volevasi dimostrare. □

Il viceversa del risultato precedente, invece, non è vero: non tutte le distanze "provengono" da una norma. Ad esempio, la metrica discreta non proviene da nessuna norma, dato che $d_d(x,0)$ non soddisfa la ii).

In definitiva, l'insieme degli spazi vettoriali normati è contenuto, strettamente, nell'insieme degli spazi vettoriali metrici.

Uno spazio vettoriale normato che, come spazio metrico con la metrica indotta dalla norma, risulti completo, si dice **spazio di Banach**.