

ANALISI MATEMATICA

per Ingegneria aerospaziale

– Domande assegnate alle prove teoriche –

Queste sono alcune domande simili a quelle che potrebbero essere assegnate alla prova di teoria dell'esame finale. Durante questa prova lo studente deve rispondere per iscritto a tre domande di base e successivamente ad una domanda più avanzata.

1 Domande di base

1. Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale e spiegare "a cosa serve" mediante un esempio.

2. Cosa significa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 7 ?$$

3. Studiare la continuità e la derivabilità di

$$f(x) = x - |x - 1|.$$

4. Cosa significa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3 ?$$

5. Enunciare e, se c'è tempo, dimostrare il teorema di Fermat per gli estremi relativi delle funzioni di una variabile.

6. Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 3 della funzione $f(x) = xe^x$ con punto iniziale $x_0 = 1$. Cosa si può dire del resto?

7. Dare la definizione di limite di una funzione. Sia f una funzione definita in \mathbb{R} , e si supponga che $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 3$. Cosa si può dire su $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?

8. Cos'è la funzione inversa di una funzione data? Dare la definizione di arcocoseno.

9. Enunciare un criterio di convergenza per serie a termini di segno qualsiasi e mostrarne un'applicazione a un esempio concreto.

10. Dare la definizione di limite di una successione. Dare un esempio di successione che non ammette limite, giustificando l'affermazione.

11. Criterio di stretta monotonia per una funzione di una variabile: enunciato/i ed un esempio di applicazione.

12. Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x) = \sqrt[3]{4-x}$.

13. Cosa vuol dire che una funzione è continua in un punto? Dire se la funzione $f(x) = \sin \sqrt{x^2 + 1}$ lo è in tutti i punti del suo dominio, motivando l'affermazione.

14. Enunciare e, se c'è tempo, dimostrare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

15. Dimostrare che non esiste $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \sin x$.

16. Dare la definizione di limite di una successione, nel caso in cui il limite sia un numero reale. Mostrare, applicando tale definizione, che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

17. Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x) = \sqrt[5]{x}$ e di $g(x) = \sqrt[5]{x^2 - 1}$.

18. Enunciare il teorema di Lagrange e illustrarne il significato geometrico.

19. Dare la definizione di limite di una funzione in un punto, nel caso in cui il limite sia un numero reale. Mostrare, applicando tale definizione, che

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4.$$

20. Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x) = \log(1 + \sqrt[3]{x})$.

21. Cos'è una primitiva di una funzione? Quante primitive ha una funzione continua in un intervallo? Perché è utile il calcolo delle primitive?

2 Domande avanzate

1. Se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, e $a_n \geq 0$, cosa si può dire sulla serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$?

2. Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 2$, cosa si può dire di $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$? Dimostrare quanto affermato.

3. Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni definite in un intervallo I . Mostrare che si ha

$$\sup_{x \in I} (f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in I} f(x) + \sup_{x \in I} g(x),$$

e che in generale non vale l'uguaglianza.

4. Sia $f(x)$ una funzione convessa che ammette asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$. Dimostrare che il grafico di f si trova sopra l'asintoto.

5. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e tale che

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere, e perché:

- 1) f ammette sicuramente minimo assoluto su \mathbb{R} .
- 2) f sicuramente non ammette minimo assoluto su \mathbb{R} .
- 3) f ammette sicuramente massimo assoluto su \mathbb{R} .
- 4) f sicuramente non ammette massimo assoluto su \mathbb{R} .
- 5) f ammette sicuramente massimo oppure minimo assoluto su \mathbb{R} .

6. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile e tale che

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty.$$

Dimostrare che f ammette almeno un punto critico.

© A.Dall'Aglio

Questo documento è disponibile sul sito internet

<http://www.dmmm.uniroma1.it/~aglio/am-aero/>